Revista Notas de Matemática
Vol.6(1), No. 291, 2010, pp.62-73
http://www.saber.ula.ve/notasdematematica
Pre-prints
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Método de Homogeneización Asociado a un Problema Elíptico de Segundo Orden con Valores en la Frontera

Javier Quintero y Gaetano Tepedino Aranguren

Resumen

En [6] y [7], sus autores desarrollaron la teoría de la $\Gamma-$convergencia y homogeneización periódica de la familia de funcionales convexos de la forma:

$$J_\epsilon(u) := \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon}, u, \nabla u\right) dx$$

para $\epsilon \to 0$, bajo ciertas condiciones de f.

Este trabajo aplica esas teorías al problema:

$$\begin{cases} -div_x(h(x/\epsilon, \nabla u_\epsilon)) = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u_\epsilon = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verifica que $h(x,\cdot)$ es convexa, $h(\cdot,\xi)$ es $Y-$periódica, medible y cumple con una condición de elípticidad. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado y $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Obteniéndose esto, cuando demostramos que, si u_ϵ converge en $L^2(\Omega)$ a la solución del problema de homogeneización generado por (1) cuando $\epsilon \to 0$, entonces

$$J(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)dx = \Gamma(L^2(\Omega)) \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega f(x/\epsilon, \nabla u)dx$$

$$J(u) = \Gamma(L^2(\Omega)) \lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(u).$$

En general, esto nos permitió pasar del problema (1) al problema de homogeneización.

Abstract

In [6] and [7], the authors developed the theory of $\Gamma-$convergence and periodic homogenization of convex funtionals of the form:

$$J_\epsilon(u) := \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon}, u, \nabla u\right) dx$$

for $\epsilon \to 0$, under certain conditions on f.

This paper applies these theores to the problem:

$$\begin{cases} -div_x(h(x/\epsilon, \nabla u_\epsilon)) &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ \\ u_\epsilon &= g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

where $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verifies that $h(x, \cdot)$ is convex, $h(\cdot, \xi)$ is $Y-$periodica, measurable and satisfies an elliptical condition; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ open bounded and $g \in L^2(\partial\Omega)$.

This being obtained, if we show that if u_ϵ converges in $L^2(\Omega)$ to the solving of the problem of homogenization generated by (1) when $\epsilon \to 0$, then

$$J(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)dx = \Gamma(L^2(\Omega)) \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega f(x/\epsilon, \nabla u)dx$$

$$J(u) = \Gamma(L^2(\Omega)) \lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(u)$$

In general, it allowes us to pass the problem (1) the problem of homogenization.

key words. Problem of Homogenization, Convex, G^1-differentiable and

$\Gamma-$ Convergence.

Introducción

El siguiente trabajo está basado en la teoría desarrollada en forma general en [6] y [7]; y tiene como objetivo principal simplificar el proceso de resolución del problema:

Dado $g \in L^2(\partial\Omega)$. Para cada $\epsilon > 0$ y u_ϵ una solución de

$$\begin{cases} -div_x(h(x/\epsilon, \nabla u_\epsilon)) &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ \\ u_\epsilon &= g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

donde $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verifica que $\forall\, x \in \mathbb{R}^N \,:\, h(x, \cdot)$ es convexa y $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \,:\, h(\cdot, \xi)$ es $Y-$peródica y medible, además cumple con una condición de elípticidad.

Para realizar esto (2) lo llevamos a un problema equivalente del *Cálculo Variacional* en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales definiendo:

Para cada $\epsilon > 0$, $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, por

$$h\left(\frac{x}{\epsilon}, \xi\right) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\xi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

donde $A(x/\epsilon) = \Big(a_{ij}(x/\epsilon)\Big)_{i,j=1}^N$ matriz simétrica, periódica y cumple una condición de elípticidad.

El problema (2) es entonces equivalente a minimizar $J_\epsilon : X \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_\epsilon(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla u, h\left(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u\right)\rangle dx \qquad \forall\, u \in X \tag{3}$$

donde X es cualquier subconjunto convexo, cerrado, no vacío de $\mathbb{E}$, espacio de Banach.

Uno de los objetivos es mostrar que cuando $\epsilon \to 0$, u_ϵ (minimizante de J_ϵ) converge en un sentido apropiado a una función más simple u, solución del problema de homogeneización

$$\left\{\begin{array}{rcll} -div_x(h(\nabla\, u)) & = & 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & g & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4}$$

donde $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es definido por

$$h(\xi) = B\xi \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

con $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$ matriz de coefientes constantes.

Siendo (4) a su vez equivalente a minimizar el funcional de homogeneización

$$J : X \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla u, h(\nabla u)\rangle dx \qquad \forall\, u \in X.$$

Esto nos indica en otras palabras que la familia $\{J_\epsilon\}$ $\Gamma-$converge a J; lo cual permite pasar del problema (2) al problema (4).

Todo lo anterior podemos entonces presentarlo aquí como sigue:

1. Definiciones y Notaciones.
2. Planteamiento del Problema Elíptico de Segundo Orden.
3. $\Gamma-$Convergencia de los Funcionales J_ϵ.
4. Homogeneización Periódica de los Funcionales J_ϵ.

1 Definiciones y Notaciones

(1.1) (a) Dado $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0N}) \in \mathbb{R}^N$ con $y_{0i} > 0 \ \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$, se denotará por $Y = Y(y_0)$ al rectángulo abierto

$$Y = \prod_{i=0}^{N} (0, y_{0i}) \subset \mathbb{R}^N.$$

(b) El volumen o medida de Lebesgue de este rectángulo abierto se denotará por

$$|Y| = \prod_{i=0}^{N} y_{0i}.$$

(c) Una función $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ diremos que es $Y-$peródica si

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^N, \ \forall\, y = (\delta_1 y_{01}, \dots, \delta_N y_{0N}), \ \forall\, (\delta_1, \dots, \delta_N) \in^n$.

En particular,

$$\varphi(x_1 + y_{01}, \dots, x_n + y_{0N}) = \varphi(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

(1.2) Dado el rectángulo abierto Y definido como en (1.1) parte (a), $C^1_{per}(\overline{Y})$ denotará el conjunto de las funciones $u \in C^1(\overline{Y}, \mathbb{R})$ que se extienden a todo $\mathbb{R}^N$ vía $Y-$periódicidad.

(1.3) Los espacios $W^{1,2}(\Omega), \ W^{1,2}_0(\Omega), \ W^{1,2}_{per}(Y)$ son respectivamente la completación de los espacios $C^1(\overline{\Omega}), \ C^1_0(\Omega), \ C^1_{per}(\overline{Y})$ bajo la norma

$$\|u\|_{1,2,\Omega} := \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

(1.4) Definamos las siguientes métricas en $C^1(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} d_\Omega(u, v) &= \|u - v\|_{1,2,\Omega} \\ \sigma_\Omega(u, v) &= \|u - v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\sigma_\Omega(u,v) = \begin{cases} \sigma_\Omega(u,v) & \text{si,} \quad sop(u-v) \subset \Omega \\ \\ +\infty & \text{si,} \quad sop(u-v) \not\subset \Omega. \end{cases}$$

Es decir, d_Ω es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_{1,2,\Omega}$ y σ_Ω es la métrica inducida por la norma usual de $L^2(\Omega)$.

(1.5) Dados $N \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, se denotará $\mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen:

(a1) $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\cdot, \xi)$ es medible, $Y-$periódica.

(a2) $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \,:\, f(x, \cdot)$ es convexa y $C^1(\mathbb{R}^N)$.

(a3) $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$:

$$\alpha\|\xi\|^2 \leq f(x,\xi) \leq \beta\|\xi\|^2$$

para algún $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

(a4) $\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^N$:

$$|f^{\frac{1}{2}}(x,\xi) - f^{\frac{1}{2}}(x,\zeta)| \leq \beta^{\frac{1}{2}}\|\xi - \zeta\|$$

para algún $\beta > 0$.

(1.6) Dado $N \in \mathbb{N}$ se denotará ^{N} a la clase de todos los conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abiertos y acotados.

(1.7) Dados $(\mathbb{E}, \tau)$ un espacio topológico. Sean $J_n : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $J : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ diremos que $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\Gamma(\tau)-$convergente a J, y lo denotaremos como

$$\forall\, u \in \mathbb{E} \,:\, J(u) = \Gamma(\tau) \lim_{n\to\infty} J_n(u)$$

si y sólo si

(i) $\forall\, u \in \mathbb{E},\ \exists\, \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$:

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} u \quad \text{y} \quad J(u) = \lim_{n\to\infty} J_n(u_n).$$

(ii) $\forall\, u \in \mathbb{E},\ \exists\, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ con $\{w_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} u$:

$$J(u) \leq \lim_{n\to\infty}\inf\, J_n(w_n).$$

2 Planteamiento del Problema Elíptico de Segundo Orden

Dados $\Omega \in \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. $A(x) = \Big(a_{ij}(x)\Big)_{i,j=1}^{N}$ matriz, donde para cada $i,j \in \{1,\dots,N\}$ $a_{ij} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

a_{ij} son $Y-$periódicos.

Para cada $\epsilon > 0$, nuestro problema es hallar $u_\epsilon : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -div_x(A(x/\epsilon)\nabla\, u_\epsilon) & = & 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u_\epsilon & = & g & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{5}$$

donde $g \in L^2(\partial\Omega)$.

El problema (5) es equivalente al *Problema del Cálculo Variacional:* definamos

$$\begin{array}{rcl} q_\epsilon(v,u_\epsilon) & := & \displaystyle\int_\Omega \langle \nabla v, A(x/\epsilon)\nabla\, u_\epsilon\rangle dx \\ X & = & \Big\{ u \in W^{1,2}(\Omega)\,:\, u - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \Big\} \end{array}$$

donde $g \in W^{1,2}(\Omega)$ con $g\Big|_{\partial\Omega} = g$, subespacio cerrado, convexo, no vacío de $W^{1,2}(\Omega)$ que contiene a $W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces consideremos $J_\epsilon : X \subset W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_\epsilon(u) := \frac{1}{2} q_\epsilon(u,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla\, u, A(x/\epsilon)\nabla\, u\rangle dx \qquad \forall\, u \in X$$

y sea $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,\xi) := \langle \xi, A(x)\xi\rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Además, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$ y $\epsilon > 0$

$$f_\epsilon(x,\xi) = f(x/\epsilon, \xi).$$

Por otro lado, J_ϵ es convexo, inferiormente semi - continuo en X y coersivo. Entonces existe $u_\epsilon \in X + g$ tal que

$$J_\epsilon(u_\epsilon) :=_{u\in X+g} \{J_\epsilon(u)\}.$$

3 $\Gamma-$Convergencia de los Funcionales J_ϵ.

Aquí se aplica la $\Gamma-$Convergencia desarrollada en [6] a la familia de funcionales dada por: para cada $\epsilon > 0,\ J_\epsilon : X \subset W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$J_\epsilon(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega f(x/\epsilon, \nabla\, u)dx \qquad \forall\, u \in X$$

y al funcional $J : X \subset W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega f(x, \nabla\, u)dx \qquad \forall\, u \in X$$

para algún $f \in \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$.

Teorema 3.1 $\Gamma(\sigma_\Omega)-$***Convergencia en*** $W^{1,2}(\Omega)$

Dados $N \in \mathbb{N},\ \alpha > 0, \beta > 0,\ \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$. *Entonces existen* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *monótoma creciente y* $f \in \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$ *tales que* $\forall\, \Omega \in^N,\ \forall\, u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega f(x, \nabla\, u)dx = \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{n\to\infty} f_{h_n}(x, \nabla\, u)dx.$$

*Demostración:*Ver [6].

Corolario 3.1 *Dados* $N \in \mathbb{N},\ \alpha > 0, \beta > 0,\ \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$. *Entonces existen* $f \in \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$ *y* $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ *con* $\varepsilon_n \to 0$ *tales que* $\forall\, \Omega \in^N,\ \forall\, u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$J(u) = \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(u).$$

Además,

$$\lim_{n\to\infty} {}_{u\in X+g}\{J_{\epsilon_n}(u)\} =_{u\in X+g} \{J(u)\}$$

donde $g \in W^{1,2}(\Omega)$ *con* $g\Big|_{\partial\Omega} = g$ *y* X *subespacio cerrado, convexo, no vacío de* $W^{1,2}(\Omega)$ *que contiene a* $W_0^{1,2}(\Omega)$.

*Demostración:*Para cada $\epsilon > 0$,

$$J_\epsilon(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega f(x/\epsilon, \nabla u)dx$$

ahora bien, como $f_\epsilon(x,\xi) = f(x/\epsilon,\xi)$, se tiene una familia $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subset \mathbb{F}_{con}(N,\alpha,\beta,2)$ y aplicando el teorema 3.1 existen $\{1/\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente y $f \in \mathbb{F}_{con}(N,\alpha,\beta,2)$ tal que $\forall\, \Omega \in^N,\ \forall\, u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega f(x, \nabla u)dx$$

y obtener que

$$\forall\, u \in W^{1,2}(\Omega): \quad J(u) := \Gamma(\sigma_\Omega)\lim_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(u).$$

Por otro lado, J_ϵ y J son propios, convexos e inferiormente semi - continuos en $X+g$ y coersivos, entonces existen $u_\epsilon, u \in X+g$ tales que

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) &= {}_{u\in X+g}\{J_\epsilon(u)\} \\ J(u) &= {}_{u\in X+g}\{J(u)\}. \end{aligned}$$

Además, $u_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} u$ de donde

$$\lim_{n_k\to\infty} {}_{u\in X+g}\{J_{\epsilon_{n_k}}(u)\} =_{u\in X+g} \{J(u)\}.$$

Nótese que el corolario 3.1 es equivalente a:

Dados $N \in \mathbb{N},\ \alpha > 0, \beta > 0,\ \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}_{con}(N,\alpha,\beta,2)$. Entonces

1. Existen $f \in \mathbb{F}_{con}(N,\alpha,\beta,2)$ y $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,+\infty)$ con $\epsilon_n \to 0$.
2. $\forall\, \Omega \in^N$ se tiene

2.1) $\forall\, u \in W^{1,2}(\Omega)$ existe $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\Omega)$ con

i) $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} u.$

ii)

$$\int_\Omega f(x, \nabla\, u)dx = \lim_{n_k\to\infty} f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}}, \nabla\, u_k\right) dx.$$

2.2) $\forall\, u \in W^{1,2}(\Omega),\ \forall\, \{u_k\} \subset W^{1,2}(\Omega)$ con $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} u$

$$\int_\Omega f(x, \nabla\, u)dx \leq \lim \inf_{n_k\to\infty} f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}}, \nabla\, u_k\right) dx.$$

Herramienta primormial para el estudio de la homogeneización periódica de los funcionales $J_\epsilon(\epsilon > 0)$.

4 Homogeneización Periódica de los Funcionales J_ϵ.

Aquí usamos los resultados anteriores de $\Gamma-$convergencia.

Para cada $\epsilon > 0$, se tienen los funcionales $J_\epsilon : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$J_\epsilon(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega f(x/\epsilon, \nabla\, u)dx \qquad \forall\, u \in W^{1,2}(\Omega)$$

donde $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, \xi) := \langle \xi, A(x), \xi\rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{6}$$

verifica que $f \in \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$.

En la sección anterior se probó que existe $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f \in \mathbb{F}_{con}(N, \alpha, \beta, 2)$ y que además, $\forall\, \Omega \in A^N$ y $\forall\, u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega f(x, \nabla\, u)dx = \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2}\int_\Omega f(x/\epsilon, \nabla\, u)dx.$$

Y en [6], [7] se prueba que $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N\ :\ f(\cdot, \xi)$ es constante salvo en un conjunto de medida cero, y se da una construcción explícita de f.

Observemos que según lo desarrollado, el aspecto más importante al que hemos llegado, es el hecho que dada la existencia de f y haciendo su construcción explícita, podemos pasar del problema (2) al problema de homogeneización (4).

Teorema 4.1 ***Teorema de Homogeneización***

Dados $N \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Sea* $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como en (6) que satisface* $(a1) - (a4)$ *y* $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. *Entonces dados* $\Omega \in A^N$, X *subespacio cerrado, convexo, no vacío de* $W^{1,2}(\Omega)$ *que contiene a* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *y* $g \in W^{1,2}(\Omega)$ *con* $g\Big|_{\partial\Omega} = g \in L^2(\partial\Omega)$, *supongamos que* $\{u \in X \,:\, \nabla u = \theta\} = \{\theta\}$.

Si para cada $\epsilon > 0$, $u_\epsilon \in X + g$ *es solución de la ecuación*

$$\begin{cases} -div_x\left(h\left(\dfrac{x}{\epsilon}, \nabla u\right)\right) & = & 0 & en & \Omega \\ u & = & g & sobre & \partial\Omega \end{cases}$$

donde $h\left(\dfrac{x}{\epsilon}, \nabla u_\epsilon\right) = A(x/\epsilon) \cdot \nabla u$, *entonces*

$$u_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} u$$

con $u \in X + g$ *solución de la ecuación*

$$\begin{cases} -div_x\Big(h(\nabla u)\Big) & = & 0 & en & \Omega \\ u & = & g & sobre & \partial\Omega \end{cases}$$

*Demostración:*Para cada $\epsilon > 0$, definamos los funcionales $J_\epsilon : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $J : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u\right) dx \\ J(u) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega f(\nabla u) dx. \end{aligned}$$

Se puede probar que f es propia y convexa, en consecuencia J es propia y convexa sobre $W^{1,2}(\Omega)$, en particular, sobre el subespacio convexo, cerrado, no vacío $X + g$. Lo mismo, se puede decir de los funcionales J_ϵ. Además, podemos probar que los funcionales J_ϵ y J son $G^{-1}-$diferenciables sobre $W^{1,2}(\Omega)$, donde

$$
\begin{aligned}
DJ_\epsilon(u,v) &:= \int_\Omega \langle \nabla v, h(x/\epsilon, \nabla u)\rangle dx \\
DJ(u,v) &:= \int_\Omega \langle \nabla v, h(\nabla u)\rangle dx.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que para cada $\epsilon > 0$, $J_\epsilon : X+g \subset W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexo y G^{-1}−diferenciable, en consecuencia

$u_\epsilon \in X+g$ minimizante de J_ϵ

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall\, u \in X+g \,:\, DJ_\epsilon(u,v) = 0 \\
&\iff \forall\, u \in X+g \,:\, \int_\Omega \left\langle v, -div_x \left(A\left(\frac{x}{\epsilon} \nabla u_\epsilon\right)\right)\right\rangle dx = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} -div_x\left(A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon\right) &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u_\epsilon|_{\partial\Omega} &=& g. & \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$u \in X+g$ minimizante de J

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall\, u \in X+g \,:\, DJ(u,v) = 0 \\
&\iff \forall\, u \in X+g \,:\, \int_\Omega \langle v, -div_x(B\nabla u)\rangle\, dx = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} -div_x\left(B\nabla u\right) &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &=& g. & \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Aplicamos el corolario 3.1 y concluimos que

$$u_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} u.$$

Referencias

[1] Ivan Ekeland - Roger Temon, Analysse Convexe el Problémes Variationneles. E'Tudes Mathematiques. Collection dirigée par P. Lomg Gauthier - Villars. París - Bruxelles - Montreal (1974)

[2] Jaques L. Lions. Asymptotic Calculus of Variations. Academic Press. Inc. (1980)

[3] P. Marcellini - C. Sbordone. Sur quelques questions de $\Gamma-$Convergence et d'homogeneisation non linéaire. C.R. Acad. Sc. París, 284, pp. 535 - 537. (1997)

[4] J.A. Quintero. Existencia, Unicidad y Regularidad de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas de Orden Par con Valores en la Frontera, Tesis de Licenciatura, U.L.A. (1992).

[5] J.A. Quintero. Introducción al Análisis Convexo. Trabajo de Ascenso, U.N.A (1997)

[6] G. Tepedino - M. Vinci - C. Sánchez. Gamma Convergencia y Homogeneización. Trabajo de Ascenso. U.L.A (1994)

[7] G. Tepedino. Homogeneización Periódica de una Clase de Funcionales No - Coersivos. Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 N 1 (1999), pp 59 - 85.

Javier Quintero
Área de Matemnática,
Universidad Nacional Abierta Centro Local M
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: javier58@cantv.net

Gaetano Tepedino Aranguren
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: tepedino@ula.ve