Revista Notas de Matemática
Vol.3(2), No. 257, 2007, pp.65-79
http://www.matematica/ula.ve
Comisión de Publicaciones
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Espacios de Banach exóticos

Manuel González

Resumen

Se describen las propiedades de algunos espacios de Banach obtenidos por Gowers, Maurey y otros autores a partir de 1990. Estos ejemplos han permitido dar respuestas negativas a varios problemas que llevaban mucho tiempo abiertos. Se les denomina espacios *exóticos* porque sus propiedades contrastan enormemente con las de los espacios *clásicos* conocidos hasta entonces.

Abstract

In the article we describe the properties of some Banach space that were introduced by Gowers, Maurey and other autors since 1990. These examples have provided negative answers to several long standing open problems. They are called *Exotic* Spaces because their properties contrast a lot with those of the *classical* Banach spaces.

1 Introducción.

En [14], Gowers and Maurey presentaron un ejemplo de espacio de Banach de dimensión infinita X_{GM} (Example 6.1.1) tal que ninguno de sus subespacios cerrados puede descomponerse como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita. La existencia de espacios de Banach con esta propiedad (se denominan *espacios hereditariamente indescomponibles*, o *espacios H.I.*) fue una sorpresa. Aparecieron en el estudio del *problema de la sucesión básica incondicional*, para el que proporcionaron una respuesta negativa, y permitieron dar respuesta negativa a otros problemas que llevaban mucho tiempo abiertos: no son isomorfos a sus hiperplanos, (de hecho no son isomorfos a ninguno de sus subespacios o cocientes propios), y no admiten ninguna proyección con rango y núcleo de dimensión infinita. Además, tanto en la versión real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ como en la compleja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, para cada operador $T : X_{GM} \longrightarrow X_{GM}$ existe un escalar $\lambda_T \in \mathbb{K}$ y un operador estrictamente singular S de modo que $T = \lambda_T I + S$. Luego el espectro esencial de T se reduce a un punto $\sigma_e(T) = \{\lambda_T\}$.

Posteriormente se han obtenido muchos ejemplos de espacios H.I. y otros con propiedades similares. Véase, por ejemplo, [3], [4] y [18]. Además se ha probado que para $1 < p < \infty$, el espacio de sucesiones ℓ_p puede obtenerse como cociente de un espacio H.I. separable y reflexivo [3], y que existe un compacto K tal que el espacio $C(K)$ de las funciones continuas en K no es isomorfo a ninguno de sus subespacios o cocientes propios, y no admite ningún subespacio complementado no trivial [18].

En estas notas se describen las propiedades de algunos de estos espacios exóticos, así como los problemas que han contribuido a resolver, haciendo énfasis en la descomponibilidad de los subespacios y cocientes, y en las propiedades de los operadores en espacios exóticos que son relevantes en teoría de Fredholm. En particular, describimos las soluciones negativas al problema de las clases de perturbación obtenidas en [9]. En [10] se hace una exposición más extensa de estas cuestiones. No se describe la construcción de los espacios H.I., que tiene grandes dificultades técnicas. Se recomienda el artículo de Maurey [20] como introducción a este tipo de construcciones.

El contenido de estas notas corresponde a las Conferencias impartidas en la Universidad de los Andes (Mérida) y en la Univeridad de Oriente (Cumaná), en Febrero de 2007. El autor agradece a los Profesores José Giménez y Ennis Rosas el trabajo realizado para hacer posible su estancia en Venezuela.

2 El problema de la base incondicional

Sea (x_n) una sucesión en un espacio de Banach X. Denotamos por $[x_n]$ el subespacio cerrado que genera. Diremos que (x_n) es una *sucesión básica incondicional* si existe una constante $C > 0$ tal que para cada sucesión de escalares (λ_i) y para cada sucesión creciente $n_1 < n_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$ se verifica

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n_i} x_{n_i}\| \leq C \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i\|.$$

El siguiente resultado, que es consecuencia directa de la definición, muestra el interés de este tipo de sucesiones.

Proposición 1 *Sea (x_n) una sucesión básica incondicional.*

Cada sucesión creciente $n_1 < n_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$ genera una proyección continua en $[x_n]$, con lo que obtenemos muchas descomposiciones de $[x_n]$ como suma directa de dos subespacios cerrados; por ejemplo,

$$[x_n] = [x_{2n}] \oplus [x_{2n-1}].$$

Los siguientes problemas han estado abierto varias décadas.

Problemas. Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita.

1. ¿Es posible encontrar en X una sucesión básica incondicional?
2. ¿Es X isomorfo a sus hiperplanos; es decir, a sus subespacios cerrados de codimensión 1?
3. ¿Es posible obtener descomposiciones $X = M \oplus N$ de X como suma directa de subespacios cerrados de dimensión infinita?
4. Si X es isomorfo a un subespacio complementado de Y e Y es isomorfo a un subespacio complementado de X, ¿es X isomorfo a Y?
5. Si X es isomorfo a todos sus subespacios cerrados de dimensión infinita, ¿es X isomorfo a ℓ_2?

Todos ellos, salvo el último, han recibido respuesta negativa por medio de ejemplos de espacios exóticos. Y en la respuesta positiva al último juega un papel fundamental el siguiente resultado.

Teorema 2 *[13]* (Dicotomía de Gowers). *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica incondicional o un subespacio cerrado H.I. de dimensión infinita.*

3 Definiciones básicas y notaciones

Sean X e Y espacios de Banach. Si M es un subespacio de X, denotaremos J_M a la inclusión de M en X, y Q_M a la aplicación cociente de X sobre X/M. Además $\mathcal{L}(X,Y)$ denotará los operadores (lineales y continuos) de X en Y y $\mathcal{K}(X,Y)$ los operadores compactos. En el caso $X = Y$ escribiremos simplemente $\mathcal{L}(X)$.

Definiciones. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

- T es *semi-Fredholm superior*, $T \in \Phi_+$, si $R(T)$ es cerrado y $\dim N(T) < \infty$.
- T es *semi-Fredholm inferior*, $T \in \Phi_-$, si $R(T)$ es cerrado y $\dim Y/R(T) < \infty$.
- T es *semi-Fredholm* si $T \in \Phi_+ \cup \Phi_-$. En este caso definimos el *índice de* T mediante

$$\mathrm{ind(T) := \dim N(T) - \dim Y/R(T).}$$

- T es *Fredholm*, $T \in \Phi$, si $T \in \Phi_+ \cap \Phi_-$.

- El *espectro esencial* de un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es
$$\sigma_e(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}.$$

- T es *estrictamente singular*, $T \in \mathcal{SS}$, si M subespacio cerrado de X y TJ_M isomorfismo implica $\dim M < \infty$.

- T es *estrictamente cosingular*, $T \in \mathcal{SC}$, si N subespacio cerrado de Y y $Q_N T$ suprayectivo implica $\dim Y/N < \infty$.

- T es *inesencial*, $T \in \mathcal{I}n$, si $I - ST \in \Phi(X)$ para todo $S \in \mathcal{L}(Y, X)$.

4 Espacios H.I. y Q.I.

Una de las propiedades más llamativas de los primeros espacios exóticos obtenidos por Gowers y Maurey era que no admitían descomposiciones no triviales.

Definición 3 *Sea X un espacio de Banach.*

X es indescomponible *si no podemos descomponerle como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita.*

X es hereditariamente indescomponible (abreviadamente, H.I.) *si todos sus subespacios cerrados son indescomponibles.*

X es cociente indescomponible (abreviadamente, Q.I.) *si todos sus cocientes son indescomponibles.*

Nótese que todo espacio de Banach de dimensión finita es trivialmente indescomponible. Además, se sigue fácilmente de la dualidad subespacio-cociente que
$$X^* \text{ H.I. (Q.I.)} \implies X \text{ Q.I. (H.I.)}.$$

En el Teorema 18 veremos que X H.I. no implica X^* Q.I. Por otro lado, se sigue directamente de la Proposición 1 que los espacios H.I. no contienen sucesiones básicas incondicionales.

Curiosamente, los espacios H.I. y Q.I. fueron considerados por Weis mucho antes de que se supiese si existía algún ejemplo. De hecho, Weis probó las siguientes caracterizaciones.

Teorema 4 *[24] Sea X un espacio de Banach.*

1. *El espacio X es H.I. si y sólo si para cada espacio de Banach Y,*

$$\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y) \cup \Phi_+(X,Y).$$

2. *El espacio X es Q.I. si y sólo si para cada espacio de Banach Z,*

$$\mathcal{L}(Z,X) = \mathcal{SC}(Z,X) \cup \Phi_-(Z,X).$$

Prueba 1 *(1) Supongamos que existe $T \in \mathcal{L}(X,Y) \setminus (\mathcal{SS}(X,Y) \cup \Phi_+(X,Y))$. Podemos suponer que $\|T\| = 1$.*

De $T \notin \mathcal{SS}$ se sigue que existe un subespacio cerrado de dimensión infinita M en X y $C > 0$ tales que $\|Tm\| \geq 2C\|m\|$ para todo $m \in M$.

De $T \notin \Phi_+$ se sigue que existe un subespacio cerrado de dimensión infinita N en X tal que $\|Tn\| \leq C\|n\|$ para todo $n \in N$.

Entonces si $m \in M$, $n \in N$ y $\|m\| = \|n\| = 1$,

$$\|m - n\| \geq \|T(m-n)\| \geq \|Tm\| - \|Tn\| \geq C.$$

De aquí se sigue fácilmente que $M \cap N = \{0\}$ y $M + N$ es cerrado; luego X no es H.I.

Recíprocamente, supongamos que X no es H.I., luego existen subespacios cerrados de dimensión infinita M y N en X tales que $M \cap N = \{0\}$ y $M + N$ es cerrado.

La aplicación cociente $Q_M : X \longrightarrow X/M$ verifica $Q_M \notin \Phi_+$ porque $N(Q_M) = M$ y $Q_M \notin \mathcal{SS}$ porque la restricción de Q_M a N tiene inverso continuo.

La demostración de (2) es similar y puede encontrarse en [24].

Una interesante consecuencia de la caracterización anterior es el siguiente resultado. Nótese que en [4] pueden encontrarse ejemplos de espacios H.I. no separables.

Teorema 5 *Todo espacio de Banach H.I. es isomorfo a un subespacio de ℓ_∞.*

Prueba 2 *Sea X un espacio de Banach H.I. y sea M un subespacio cerrado, separable y de dimensión infinita de X.*

Sea (m_k) una sucesión densa en la bola unidad de M. El teorema de Hahn-Banach nos permite encontrar, para cada $k \in \mathbb{N}$, un funcional $f_k \in X^*$ tal que $\|f_k\| = 1$ y $f_k(m_k) = \|m_k\|$.

Consideramos el operador $T : X \longrightarrow \ell_\infty$ *definido por* $T(x) := (f_k(x))$. *Claramente la restricción de* T *a* M *tiene inverso continuo; luego* $T \notin \mathcal{SS}$. *Por el Teorema 4,* $T \in \Phi_+$.

Como $\dim N(T) < \infty$, *añadiendo un número finito de términos a la sucesión* (f_k) *podemos suponer que* T *es inyectivo; luego* T *es un isomorfismo de* X *sobre un subespacio de* ℓ_∞.

Problema 1 *¿Es posible encontrar un resultado paralelo al Teorema 5 para espacios Q.I.?*

El Problema 1 está relacionado con el clásico *problema del cociente separable:* no se sabe si todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene un cociente separable. Si éste último tuviese respuesta positiva, el siguiente resultado resolvería el Problema 1.

Teorema 6 *Todo espacio de Banach Q.I. con un cociente separable de dimensión infinita es isomorfo a un cociente de* ℓ_1.

Prueba 3 *Sea* X *un espacio de Banach Q.I. y sea* M *un subespacio cerrado de* X *tal que* X/M *es separable y de dimensión infinita. Sea* (m_k) *una sucesión densa en la bola unidad de* X/M. *Denotamos por* $Q :\longrightarrow X/M$ *la aplicación cociente y seleccionamos una sucesión acotada* (x_k) *en* X *tal que* $Qx_k = m_k$ *para cada* k.

El operador $T : \ell_1 \longrightarrow X$ *definido por* $T(e_n) := x_n \quad (n \in \mathbb{N})$, *donde* (e_n) *es la base canónica de* ℓ_1, *es acotado. Claramente* QT *es suprayectivo; luego* $T \notin \mathcal{SC}$. *Por el Teorema 4,* $T \in \Phi_-$.

Como $\dim Y/R(T) < \infty$, *añadiendo un número finito de términos a la sucesión* (x_k) *podemos suponer que* T *es suprayectivo; luego* T *induce un isomorfismo de* $\ell_1/N(T)$ *sobre* X.

Otra consecuencia del Teorema 4 es el siguiente resultado, cuya demostración en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es una aplicación directa de la estabilidad del índice ante perturbaciones, mientras que en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es mucho más elaborada y fue probado en [6] para espacios H.I. y en [11] para espacios Q.I.

Recordemos que, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, solamente hay un álgebra de división: $\mathbb{C}$, mientras que en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tenemos tres ejemplos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (los cuaterniones) como álgebras reales.

Teorema 7 *[6, 11] Sea* X *un espacio de Banach .*

Si X *es H.I.,* $\mathcal{L}(X)/\mathcal{SS}(X)$ *es un álgebra de división.*

Si X *es Q.I.,* $\mathcal{L}(X)/\mathcal{SC}(X)$ *es un álgebra de división.*

Veremos que existen ejemplos para todos los casos posibles.

Respecto del tamaño de la clase de los espacios H.I. dentro de la de todos los espacios de Banach, el siguiente resultado indica que es grande.

Teorema 8 *[4] Para cada espacio de Banach separable X que no contiene copias de ℓ_1, existe un espacio H.I. separable Z tal que X es isomorfo a un cociente de Z.*

Nótese que es fácil ver que los espacios que contienen a ℓ_1 no pueden obtenerse como cocientes de espacios H.I.

5 Ejemplos de espacios exóticos

Presentaremos a continuación diversos ejemplos de espacios H.I. y Q.I., así como otros con propiedades similares.

5.1 El espacio X_{GM} de Gowers y Maurey

Como dijimos en la introducción, Gowers y Maurey obtuvieron el primer ejemplo X_{GM} de espacio de Banach H.I.

Teorema 9 *[14] Existe un espacio de Banach de dimensión infinita con las siguientes propiedades.*

(a) X_{GM} *es H.I., reflexivo y tiene base; luego es separable.*

(b) El espacio dual ${X_{GM}}^*$ *es Q.I.*

(c) En el caso real, $\mathcal{L}(X_{GM})/\mathcal{SS}(X_{GM}) \equiv \mathcal{L}(X^*_{GM})/\mathcal{SC}(X^*_{GM}) \equiv \mathbb{R}$.

(d) En el caso complejo, $\mathcal{L}(X_{GM})/\mathcal{SS}(X_{GM}) \equiv \mathcal{L}(X^*_{GM})/\mathcal{SC}(X^*_{GM}) \equiv \mathbb{C}$.

Observación 10 *Ferenczi probó en [7] que el espacio X_{GM} es H.I. y Q.I.; de hecho, todo subespacio de un cociente de X_{GM} es indescomponible. Por tanto, como X_{GM}, es reflexivo, lo mismo sucede con el espacio dual X^*_{GM}.*

5.2 Los espacios H.I. de Ferenczi

Vistos el espacio de Gowers y Maurey X_{GM} y su dual, para ver que todos los casos del Teorema 7 son posibles, queda mostrar ejemplos de espacios de Banach H.I. y Q.I. reales para los que las álgebras cocientes por los operadores $\mathcal{SS}$ y $\mathcal{SC}$, respectivamente, sean isomorfas a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. Los que veremos a continuación fueron construidos por Ferenczi [8], usando una idea de Maurey.

Teorema 11 *[8] Existe un espacio de Banach reflexivo, separable, H.I. real $X_{\mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}})/\mathcal{SS}(X_{\mathbb{C}})$ es isomorfo a $\mathbb{C}$ como álgebra real.*

De hecho, existe un operador $U \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}})$ verificando $U^2 = -I$, de modo que para cada $T \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}})$ existen $a, b \in \mathbb{R}$ y $K \in \mathcal{SS}(X_{\mathbb{C}})$ verificando

$$T = aI + bU + K.$$

Además, $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}^*)/\mathcal{SC}(X_{\mathbb{C}}^*)$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Teorema 12 *[8] Existe un espacio de Banach reflexivo, separable, H.I. real $X_{\mathbb{H}}$ tal que $\mathcal{L}(X_{\mathbb{H}})/\mathcal{SS}(X_{\mathbb{H}})$ es isomorfo a $\mathbb{H}$ como álgebra real.*

De hecho, existen operadores $U, V, W \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{H}})$ verificando $U^2 = V^2 = W^2 = -I$, $UV = W$, $VW = U$ y $WU = V$, de modo que para cada $T \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{H}})$ existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $K \in \mathcal{SS}(X_{\mathbb{H}})$ verificando

$$T = aI + bU + cV + dW + K.$$

Además, $\mathcal{L}(X_{\mathbb{H}}^*)/\mathcal{SC}(X_{\mathbb{H}}^*)$ es isomorfo a $\mathbb{H}$.

5.3 El espacio “shift” de Gowers y Maurey

Denotamos $\mathbb{D}$ y $\mathbb{T}$ al disco unidad y a la circunferencia unidad en el plano complejo $\mathbb{C}$. Es bien sabido que

$$\ell_1(\mathbb{Z}) := \{(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty\},$$

con la norma $\|(a_n)\|_1 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$, y el producto de convolución

$$(a_n) * (b_n) := \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{n-i} \right),$$

es un álgebra de Banach.

En [15] Gowers y Maurey desarrollaron un procedimiento de construcción de espacios exóticos. Entre ellos, el siguiente.

Teorema 13 *[15] Existe un espacio de Banach complejo X_s con base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que verifica las siguientes propiedades:*

(a) El espacio X_s es indescomponible.

(b) *Denotando por U y V a los operadores de traslación a derecha e izquierda (respecto de la base (e_n)) en X_s,*

$$\sigma(U) = \sigma(V) = \mathbb{D} \quad y \quad \sigma_e(U) = \sigma_e(V) = \mathbb{T}.$$

(c) *Para cada operador $T \in \mathcal{L}(X_s)$, existe una sucesión $(a_n) \in \ell_1(\mathbb{Z})$ tal que*

$$T - \sum_{n=0}^{\infty} a_n U^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} V^n \in \mathcal{SS}(X_s).$$

(d) *Denotando $\Psi_T(\lambda) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n$, se verifica $\sigma_e(T) = \Psi_T(\mathbb{T})$.*

(e) *$\mathcal{L}(X_s)/\mathcal{SS}(X_s)$ se identifica con el álgebra $\ell_1(\mathbb{Z})$.*

Nótese que si $T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} V^n$ es estrictamente singular, $\sigma_e(T) = \Psi_T(\mathbb{T}) = \{0\}$. Luego $T = 0$.

(f) *Cada par de operadores $A, B \in \mathcal{L}(X_s)$ commuta modulo los operadores estrictamente singulares; es decir, $AB - BA \in \mathcal{SS}(X_s)$.*

(g) *Todos los subespacios complementados de dimensión infinita de X_s son isomorfos a X_d; es decir, X_d es un ejemplo de espacio primo.*

5.4 El espacio "doble shift" de Gowers y Maurey

La construcción es similar a la de X_s pero se consigue que las potencias de los operadores desplazamiento U^n y V^n definan operadores continuos solamente en el caso en que n es par.

Teorema 14 *[15] Existe un espacio de Banach complejo X_{ds} con base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que verifica las siguientes propiedades:*

(a) *X_{ds} es isomorfo a sus subespacios cerrados de codimensión par, pero no es isomorfo a sus hiperplanos.*

(b) *Todos los operadores de Fredholm en X_{ds} tienen índice par. Y para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe $T \in \Phi(X_{ds})$ con $\mathrm{ind(T) = 2n}$.*

(c) *Cada uno de los espacios X_{ds} y $X_{ds} \oplus \mathbb{C}$ es isomorfo a un subespacio complementado del otro, pero no son isomorfos entre si.*

Nótese que $X_{ds} \simeq X_{ds} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

5.5 El espacio con base incondicional de Gowers

Una *base incondicional* en un espacio de Banach X es una sucesión básica incondicional que genera un subespacio denso en X.

Es fácil comprobar que si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional normalizada (es decir, con $\|e_n\| = 1$ para todo n), cada sucesión $(a_n) \in \ell_\infty$, el espacio de las sucesiones acotadas de escalares, induce un operador acotado, definido por $Te_n := a_n e_n$; $n \in \mathbb{N}$. Y que este operador T es compacto si y solamente si $(a_n) \in c_0$, el subespacio de las sucesiones que convergen a 0.

Teorema 15 *[12] Existe un espacio de Banach X_d con base incondicional normalizada (e_n) que satisface las propiedades siguientes:*

(a) Cada operador $T \in \mathcal{L}(X_d)$ es suma de un operador diagonal respecto de (e_n) y un operador estrictamente singular.

(b) $\mathcal{L}(X_d)/\mathcal{SS}(X_d)$ se identifica con ℓ_∞/c_0.

(c) X_d no es isomorfo a sus hiperplanos.

(d) X_d no es indescomponible (por tener base incondicional).

5.6 El espacio $C(K)$ de Koszmider

La construcción de los espacios anteriores de Gowers y Maurey es muy intrincada, y los ejemplos que obtienen son muy distintos a los espacios de Banach clásicos de sucesiones y funciones. Por ello fue una sorpresa la construcción de Koszmider [18] de un espacio $C(K)$ que compartía algunas de las propiedades de los espacios exóticos. Nótese que los espacios $C(K)$ de dimensión infinita contienen subespacios isomorfos a c_0, por lo que no pueden ser H.I.

Teorema 16 *[18] Existe un compacto conexo K tal que el espacio $C(K)$ de las funciones continuas en K (con valores reales) es isométrico a un subespacio de ℓ_∞ y verifica las siguientes propiedades:*

(a) $C(K)$ es indecomponible y no es isomorfo a ninguno de sus subespacios ni cociente propios.

(b) Todo operador semi-Fredholm $T \in \mathcal{L}(C(K))$ tiene índice cero.

(c) Para cada operador $T \in \mathcal{L}(C(K))$ existe una función $\phi \in C(K)$ y un operador $K \in \mathcal{SS}(C(K))$ de modo que $T = M_\phi + K$.

M_ϕ es el operador multiplicación definido por $M_\phi(f) := \phi f$.

(d) El algebra cociente $\mathcal{L}(C(K))/\mathcal{SS}(C(K))$ se identifica con $C(K)$.

Como K es conexo, si $M_\phi \in \mathcal{SS}$, $\sigma(M_\phi) = \phi(K) = \{0\}$, luego $M_\phi = 0$.

En su construcción del compacto K, Koszmider utilizó la hipótesis del continuo, pero más tarde Plebanek [21] probó que no era necesario utilizarla para construir un compacto con las propiedades requeridas.

5.7 Los ejemplos de Argyros y colaboradores

En los últimos años, Argyros y sus colaboradores han desarrollado métodos para construir espacios exóticos con propiedades muy variadas. Destacamos dos de ellos. El primero muestra que ser H.I. y ser Q.I. es muy distinto.

Teorema 17 *[3] Existe un espacio de Banach separable, reflexivo y H.I X_{af} que tiene un cociente isomorfo a ℓ_2.*

El espacio dual X_{af}^* es Q.I y tiene un subespacio isomorfo a ℓ_2.

La construcción del Teorem 17 puede hacerse con ℓ_p, $1 < p < \infty$, en lugar de ℓ_2.

Recordemos que en el Teorema 8 vimos que todo espacio de Banach separable sin subespacios isomorfos a ℓ_1 puede obtenerse como cociente de un espacio H.I. separable.

Teorema 18 *[4] Existe un espacio de Banach con base X_{at} que verifica las siguientes propiedades:*

(a) X_{at}, su dual X_{at}^* y su segundo dual X_{at}^{**} son espacios H.I.

(b) X_{at} y X_{at}^* son separables, pero X_{at}^{**} no es separable.

(c) El cociente X_{at}^{**}/X_{at} es isomorfo a $c_0(\Gamma)$, donde Γ es un conjunto no numerable.

(d) El tercer dual X_{at}^{***} es isomorfo a $X_{at}^* \oplus \ell_1(\Gamma)$.

(e) $\mathcal{L}(X_{at}) = \{\lambda I + S \,:\, \lambda \in \mathbb{R},\, S \in \mathcal{SS}(X_{at})\}$.

(f) $\mathcal{L}(X_{at}^*) = \{T^* + K \,:\, T \in \mathcal{L}(X_{at}),\, K \in \mathcal{K}(X_{at}^*)\}$.

(g) $\mathcal{L}(X_{at}^{**}) = \{\lambda I + S \,:\, \lambda \in \mathbb{R},\, R(S) separable\}$.

En [3], [4] y otros artículos de Argyros y sus colaboradores podemos encontrar muchos otros ejemplos de espacios exóticos.

6 El problema de las clases de perturbación

El problema de las clases de perturbación de los operadores semi-Fredholm fue planteado hacia 1950, y fue resuelto negativamente en [9] utilizando espacios de Banach de tipo H.I. y de tipo Q.I.

Recordemos que la *clase de perturbación* $P\mathcal{C}$ de una clase de operadores $\mathcal{C}$ se define del siguiente modo: si $\mathcal{C}(X,Y)$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{L}(X,Y)$,

$$P\mathcal{C}(X,Y) := \{K \in L(X,Y) : K+T \in \mathcal{C}(X,Y), \text{ para todo } T \in \mathcal{C}(X,Y)\}.$$

Nótese que, en el caso $X=Y$, $\Phi(X)$, $\Phi_+(X)$ y $\Phi_-(X)$ son siempre no vacías.

Proposición 19 *[19] Las clases de perturbación $P\Phi(X)$, $P\Phi_+(X)$ y $P\Phi_-(X)$ son ideales biláteros cerrados de $\mathcal{L}(X)$.*

El siguiente resultado describe relaciones de inclusión entre las clases de perturbación y algunos ideales de operadores.

Proposición 20 *Sean X e Y espacios de Banach. Si las clases de perturbación están definidas, se verifican las siguientes relaciones:*

(a) $\mathcal{I}n(X,Y) = P\Phi(X,Y)$ *[17].*

(b) $P\Phi_+(X,Y) \cup P\Phi_-(X,Y) \subset P\Phi(X,Y)$ *(estabilidad del índice).*

(c) $\mathcal{SS}(X,Y) \subset P\Phi_+(X,Y)$ *[16].*

(d) $\mathcal{SC}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y)$ *[23].*

Veamos algunos ejemplos naturales de operadores que muestran que las inclusiones entre las clases $\mathcal{K}$, $\mathcal{SS} \cap \mathcal{SC}$, $\mathcal{SS}$, $\mathcal{SC}$ y $\mathcal{I}n$ son propias.

Consideremos las inclusiones naturales

$$L_\infty[0,1] \xrightarrow{J_2} L_2[0,1] \xrightarrow{J_1} L_1[0,1].$$

Teniendo en cuenta que $L_\infty[0,1]$ y $L_1[0,1]$ tienen la propiedad de Dunford-Pettis, que $J_2 = J_1^*$ y que las funciones de Rademacher generan un subespacio isomorfo a ℓ_2 en $L_p[0,1]$ para $1 \leq p <$

∞, no es difícil probar que

$$J_1J_2 \in (\mathcal{SS} \cap \mathcal{SC}) \setminus \mathcal{K},\ J_2 \in (\mathcal{SS} \setminus \mathcal{SC}),\ J_1 \in (\mathcal{SC} \setminus \mathcal{SS}) \ \text{ y } \ J_1, J_2 \in \mathcal{I}n.$$

Las igualdades $\mathcal{SS}(X,Y) = P\Phi_+(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y) = P\Phi_-(X,Y)$ son válidas para muchos pares de espacios X, Y. Véase la introducción de [9]. Finalmente se probó que no son válidas en general, utilizando espacios exóticos.

Teorema 21 *[9] Existe un espacio de Banach reflexivo X tal que $\mathcal{SS}(X) \neq P\Phi_+(X)$ y $\mathcal{SC}(X^*) \neq P\Phi_-(X^*)$.*

El espacio X del resultado anterior se obtiene como producto de espacios H.I.

Problema 2 *No se sabe si existen espacios de Banach X de dimensión infinita para los que $\dim \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X) < \infty$.*

La definición de operador inesencial no es intrínseca: para comprobar si $T \in \mathcal{I}n(X,Y)$, debemos considerar las propiedades de todos los productos ST de T con operadores $S \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tratando de obtener una caracterización intrinseca, Tarafdar introdujo en [22] los operadores improyectivos.

Definición 22 *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se dice* improyectivo, *$T \in \mathcal{I}mp(X,Y)$, si no existe ningún subespacio de dimensión infinita M de X tal que la restricción TJ_M es un isomorfismo y $T(M)$ es complementado en Y.*

No es difícil comprobar que $\mathcal{I}n(X,Y) \subset \mathcal{I}mp(X,Y)$.

La igualdad $\mathcal{I}n(X,Y) = \mathcal{I}mp(X,Y)$ se verifica para muchos pares de espacios (véase [1]). Sin embargo, la inclusión es propia, en general.

Teorema 23 *[2] En el espacio shift X_s de Gowers y Maurey existen operadores improyectivos que no son inesenciales.*

References

[1] P. Aiena and M. González, *On inessential and improjective operators,* Studia Math. 131 (1998), 271-287.

[2] P. Aiena and M. González, *Examples of improjective operators,* Math. Z. 233 (2000), 471-479.

[3] S.A. Argyros and V. Felouzis, *Interpolating hereditarily indecomposable Banach spaces*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 243-294.

[4] S.A. Argyros and A. Tolias, *Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces,* Mem. Amer. Math. Soc. 170 (2004), no. 806, vi+114 pp.

[5] S. Caradus, W. Pfaffenberger and B. Yood, *Calkin algebras and algebras of operators in Banach spaces,* M. Dekker Lecture Notes in Pure & Appl. Math. 9, New York 1974.

[6] V. Ferenczi, *Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces,* Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 338-344.

[7] V. Ferenczi, *Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces.* Canad. J. Math. 51 (1999), 566-584.

[8] V. Ferenczi, *Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach spaces.* Advances in Math. 213 (2007), 462-488.

[9] M. González, *The perturbation classes problem in Fredholm theory,* J. Funct. Anal. 200 (2003), 65-70.

[10] M. González, *Banach spaces with small Calkin algebras,* in "Perspectives in Operator Theory". W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Mbekhta, Y. Tomilov and J. Zemánek, eds., Banach Center Publ. 75 (2007), 159-170.

[11] M. González and J.M. Herrera, *Operators on quotient indecomposable spaces,* Publ. Math. Debrecen 59 (2001), 271-288.

[12] W.T. Gowers, *A solution to Banach's hyperplane problem,* Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 523-530.

[13] W.T. Gowers, *An infinite Ramsey theorem and some Banach space dichotomies,* Ann. of Math. 156 (2002), 797-833.

[14] W.T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem,* J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851-874.

[15] W.T. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators,* Math. Ann. 307 (1997), 543-568.

[16] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators,* J. d'Analyse Math. 6 (1958), 261-322.

[17] D. Kleinecke, *Almost finite, compact and inessential operators,* Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 863-868.

[18] P. Koszmider, *Banach spaces of continuous functions with few operators,* Math. Ann. 330 (2004), 151-183.

[19] A. Lebow and M. Schechter, *Semigroups of operators and measures of noncompactness,* J. Funct. Anal. 7 (1971), 1-26.

[20] B. Maurey, *Banach spaces with few operators.* In Handbook of the geometry of Banach spaces, pp. 1247-1297. North Holland 2003.

[21] G. Plebanek, *A construction of a Banach space $C(K)$ with few operators.* Topology Appl. 143 (2004), 217-239.

[22] E. Tarafdar, *Improjective operators and ideals in a category of Banach spaces,* J. Austral. Math. Soc. 14 (1972), 274-292.

[23] J.I. Vladimirskii, *Strictly cosingular operators,* Soviet Math. Doklady 8 (1967), 739-740.

[24] L. Weis, *Perturbation classes of semi-Fredholm operators.,* Math. Z. 178 (1981), 429-442.

MANUEL GONZÁLEZ
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Cantabria,
Santander E-39071, España
e-mail: gonzalem@unican.es