EDGARDO LUIS FERNANDEZ

"ALGEBRAS DE BANACH Y OPERADORES p-ABSOLUTAMENTE SUMABLES"

NOTAS DE MATEMATICA

N° 8

"ALGEBRAS DE BANACH Y OPERADORES p-ABSOLUTAMENTE SUMABLES"

POR

EDGARDO LUIS FERNANDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA
1977

I N D I C E

1. INTRODUCCION.

El objeto de este seminario, es dar a conocer ciertas relaciones entre algebras de Banach y los operadores p-absolutamente sumables.

Se sigue, en lo fundamental, la exposición de A. Tonge: "Sur les algebres de Banach et les operateùrs p-sommants", Seminaire Maurey Schwartz 1975-1976, exposé XIII [1].

Con el objeto de hacer accesible este trabajo, se completa la exposición con numerosos detalles, que no se tenían a mano previamente.

La bibliografía utilizada, se cita al final del trabajo.

Agradezco a Eunice Nava por el impecable trabajo de dactilografiado y la paciencia para descifrar fórmulas incomprensibles.

2. PRELIMINARES

Si B es una algebra de Banach, $\forall$ x,y ε B se tiene $||x|| \; ||y|| \geq ||xy||$ y la unidad e tiene norma 1.

Un homomorfismo entre dos algebras de Banach es una aplicación lineal, multiplicativa y continua.

Con U° indicamos la esfera unitaria, con la topología débil, de un espacio de Banach y con P(U°) indicamos las - probabilidades de Radon sobre U°.

Si X es un espacio compacto separado, con C(X) indicamos el espacio de las funciones continuas sobre X a valores complejos, con la norma uniforme.A C(X) lo consideramos como algebra para la multiplicación puntual.

DEFINICION 1 . Decimos que la algebra de Banach B es una algebra uniforme, si es una subalgebra de C(X), X compacto.
Nota: No se supone que B tenga unidad.

Si H es un espacio de Hilbert complejo, consideramos L(H), el espacio de las aplicaciones lineales continuas de H en si mismo, con la norma habitual, como algebra de Banach.La multiplicación es la composición de operadores.

DEFINICION 2. Sea B una algebra de Banach. Se dice que B es una algebra de operadores, si ella es isomorfa a una sub-algebra cerrada de L(H), donde H es un Hilbert.
Nota: No se supone que B tenga una involución.

El resultado más importante, se debe a Varopoulos, [12]

<u>TEOREMA 1</u>. Sea B un espacio de tipo $\mathcal{L}_\infty$ (en el sentido de [4]), munido de una estructura de algebra de Banach. Entonces B es una algebra de operadores.

Tonge [1], da una condición suficiente para que una al gebra de Banach sea un algebra de operadores, lo que permite dar una demostración simple del teorema 1.

Sea $\phi \in B'$ (dual del algebra de Banach B). Definimos la aplicación $\tilde{\phi} : B \to B'$ por:

$$< \tilde{\phi} (x), y > \ = \ < \phi , yx >, \qquad \forall\ x,y \in B.$$

En estas condiciones, la aplicación $\tilde{\phi}$ es lineal, continua y de norma $\leq || \phi ||$.

<u>DEFINICION 3</u> . Sea $1 \leq p < \infty$. Se dice que B es una alge - bra p-absolutamente sumable, si existe una constante $K \geq 1$ tal que, para toda $\phi \in B'$, la aplicación $\tilde{\phi} : B \to B'$ es p-absolutamente sumable y $\pi_p (\tilde{\phi}) \leq K || \phi ||$.
Se dice que B es estrictamente p-absolutamente sumable si $\pi_p (\tilde{\phi}) \leq || \phi ||$.

<u>Nota</u>: π_p (.) indica la norma p-absolutamente sumable.

Esto nos permite enunciar los teoremas siguientes:

<u>TEOREMA 2 [13]</u> . Toda algebra 2-absolutamente sumable es una algebra de operadores.

<u>TEOREMA 3 [13]</u> . Sea $1 \leq p < \infty$. Toda algebra estricta mente p-absolutamente sumable y unitaria es una algebra u- niforme (y por lo tanto conmutativa).

Una vez probado el teorema 2, la demostración del teorema 1 se simplifica notablemente.

<u>Demostración del teorema 1</u> . Como el dual de una algebra de Banach de tipo $\mathcal{L}_\infty$ es un espacio de tipo $\mathcal{L}_1$ [14], y [4, pag. 289] toda aplicación lineal continua de un espacio de tipo $\mathcal{L}_\infty$ en un espacio de tipo $\mathcal{L}_1$ es 2-absolutamente sumable, se tiene que B es una algebra 2-absolutamente sumable.

De acuerdo con un teorema de Pietsch [2],B es una algebra 2-absolutamente sumable si existe un $K \geqslant 1$ tal que, para toda $\phi \in B'$, $\tilde{\phi}$ se factoriza según el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "u"'] & B' \\ C \arrow[r, "v"'] & H \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

donde C es un espacio C(X), H = Hilbert y u, v, w aplicaciones lineales continuas, tales que $||u||\ ||v||\ ||w|| \leqslant K\ ||\phi||$ (ver pag. 19).

<u>Observación</u>. Cabe preguntarse, que ocurre cuando existe un $K \geqslant 1$ tal que para todo $\phi \in B'$, $\tilde{\phi}$ se factoriza según el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\tilde{\phi}"] \arrow[dr, "u"'] & & B' \\ & H \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

donde H es de Hilbert, u y v aplicaciones lineales conti - nuas tales que $\|u\|\ \|v\| \leqslant K\ \|\phi\|$.

<u>DEFINICION 4</u> . $\tilde{\phi}$ se dice hilbertiana, si se factoriza según el diagrama anterior. Además $\|\tilde{\phi}\|_H = \inf\{\|u\|\ \|v\|\}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles factorizaciones de este tipo.

<u>DEFINICION 5</u> . El algebra de Banach B se dice hilbertiana, si existe un $K \geqslant 1$ tal que para todo $\phi \in B'$ se tiene

$$\|\tilde{\phi}\|_H \leqslant K\ \|\phi\| .$$

Veremos más adelante el:

<u>TEOREMA 4 [15]</u>. Toda algebra de operadores es una algebra hilbertiana.

<u>Ejemplos</u>. 1) Toda algebra uniforme es una algebra 2-absolutamente sumable.

2) $L^2(T)$ $(2 \leqslant p \leqslant \infty)$, munido de la convolución es una algebra 2-absolutamente sumable. En efecto, si $2 \leqslant p \leqslant \infty$, toda $\tilde{\phi}$ se puede factorizar según el diagrama

$$L^p(T) \longrightarrow C(T) \longrightarrow L^{p'}(T) .$$

<u>Nota</u>: Aunque la definición de algebra p-absolutamente sumable puede parecer rara, hay que observar que, si se considera la multiplicación sobre una algebra de Banach B como una aplicación lineal $T: B \otimes B \longrightarrow B$, estas algebras son precisamente aquellas para las cuales T es continua cuando sobre $B \otimes B$ se dan ciertas normas tensoriales, por ejemplo

las de Shapar [22] , y S. Chevet [21] . Más detalles se encuentran en [13].

3. APLICACIONES p-ABSOLUTAMENTE SUMABLES . [2]

DEFINICION 1 . Sean E y F dos espacios normados. Una aplicación lineal $T: E \longrightarrow F$ se dice p-absolutamente sumable ($1 \leq p < \infty$), si existe un número $C > 0$, tal que para toda familia finita $x_1, \ldots, x_k$ de elementos de E se tiene

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^p \right\}^{1/p} \leq C \sup_{||a|| \leq 1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |< x_i, a >|^p \right\} .$$

Nota: Llamamos norma p-absolutamente sumable $\pi_p(T)$ al ínfimo de estos C.

LEMA 1 . El espacio Π_p (E,F) de todos los operadores p-absolutamente sumables de E en F es un espacio lineal normado (con la norma π_p).

Demostración . Veamos la desigualdad triangular. Sean S y T dos operadores p-absolutamente sumables. Entonces:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} ||(S+T)x_i||^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{k} (||Sx_i||+||Tx_i||)^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq [\pi_p(S)+\pi_p(T)] \sup_{||a||\leq 1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |< x_i, a >|^p \right\}^{1/p} .$$

Por lo tanto, la suma S+T es p-absolutamente sumable y vale

$$\pi_p(S+T) \leq \pi_p(S) + \pi_p(T) .$$

Nota: El nombre de p-absolutamente sumable proviene de que T es p-absolutamente sumable si y solo si, la serie $\Sigma T x_i$ converge absolutamente cuando la serie $\Sigma\, x_i$ es incondicionalmente convergente.

LEMA 2 . Todo operador $T \in \Pi_p\,(E,F)$ es acotado, y $\|T\| \leq \pi_p(T)$

Demostración . Inmediata.

LEMA 3 . Sea E un espacio normado y F de Banach, Entonces $\Pi_p\,(E,F)$ es un espacio de Banach.

Demostración . Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\Pi_p(E,F)$.

Como

$$\| T_n - T_m \| \leq \pi_p\,(T_n - T_m),$$

se sigue que $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L(E,F) (que sabemos que es de Banach). Por lo tanto, existe un operador T lineal y acotado tal que

$$\lim_n \| T_n - T \| = 0 .$$

Tomemos, para un $\varepsilon > 0$ dado un n_o tal que

$$\pi_p(T_n - T_m) < \varepsilon \quad , n, m \geq n_o .$$

Entonces:

$$\{ \sum_{i=1}^{k} \| T_n x_i - T_m x_i \|^p \}^{1/p} \leq \varepsilon \sup_{\|a\| \leq 1} \{ \sum_{i=1}^{k} |< x_i, a >|^p \}^{1/p}$$

para $n, m \geq n_o$. Haciendo tender $n \to \infty$, se tiene:

$$\{ \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i - T_m x_i\|^p \}^{1/p} \leq \varepsilon \sup_{\|a\| \leq 1} \{ \sum_{i=1}^{k} |<x_i, a>|^p \}^{1/p} , \quad m \geq n_o .$$

Por lo tanto,

$$\pi_p(T - T_m) \leqslant \varepsilon \qquad , \text{ para } m \geqslant n_o .$$

Es decir, T en $\Pi_p(E,F)$ es límite de la sucesión de Cauchy $\{T_n\}$.

Sean ahora E, F y G tres espacios normados. Se tiene el

<u>LEMA 4</u> . a) Si $T \in L(E,F)$, $S \in \Pi_p(F,G)$, entonces $ST \in \Pi_p(E,G)$ y además $\pi_p(ST) \leqslant \pi_p(S) . \|T\|$

b) Si $T \in \Pi_p(E,F)$, $S \in L(F,G)$, entonces $ST \in \Pi_p(E,G)$ y además $\pi_p(ST) \leqslant \|S\| \, \pi_p(T)$.

<u>Demostración</u>:

a) $$\{\sum_{i=1}^{k} \|STx_i\|^p\}^{1/p} \leqslant \|S\| \sup_{\|b\| \leqslant 1} \{\sum_{i=1}^{k} |<Tx_i , b>|^p\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \pi_p(S) \sup_{\|b\| \leqslant 1} \{\sum_{i=1}^{k} |<Tx_i , b>|^p\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \pi_p(S) \|T\| \sup_{\|b\| \leqslant 1} \{\sum_{i=1}^{k} |<x_i , \|T\|^{-1} T' b>|^p\}^{1/p} \leq$$

$$\leqslant \pi_p(S) \|T\| \sup_{\|a\| \leqslant 1} \{\sum_{i=1}^{k} |<x_i , a>|^p\}^{1/p} .$$

Luego, $ST \in \Pi_p(E,G)$ y $\pi_p(ST) \leqslant \pi_p(S) . \|T\|$.

Análogamente, b) resulta de:

$$\{\sum_{i=1}^{k} ||STx_i||^p\}^{1/p} \leq ||S||\{\sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^p\}^{1/p} \leq ||S||\pi_p(T) \sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i,a\rangle|^p\}^{1/p}.$$

<u>LEMA 5</u> . Para p y q, $1 \leq p < q < +\infty$, se tiene

$$\Pi_p(E,F) \subset \Pi_q(E,F), \text{ y } \pi_p \geq \pi_q .$$

<u>Demostración</u>. Sea $T \in \Pi_p(E,F)$. Para $x_1,\ldots,x_k \in E$ y números $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ cualesquiera se tiene:

$$\{\sum_{i=1}^{k} ||\lambda_i Tx_i||^p\}^{1/p} \leq \pi_p(T) \sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle \lambda_i x_i , a\rangle|^p\}^{1/p} .$$

Sea r un número tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Usando la desigualdad de Hölder:

$$\sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle\lambda_i x_i,a\rangle|^p\}^{1/p} \leq \{\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^r\}^{1/r} \sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i,a\rangle|^q\}^{1/q}.$$

Haciendo $\lambda_i = ||Tx_i||^{q/r}$, se tiene

$$\{\sum_{i=1}^{k} ||\lambda_i Tx_i||^p\}^{1/p} = \{\sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^q\}^{1/p}$$

y
$$\{\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^r\}^{1/r} = \{\sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^q\}^{1/r} .$$

Finalmente: $\{\sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^q\}^{1/q} \leq \pi_p(T) \sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^q\}^{1/q}$.

Por lo tanto, T es q-absolutamente sumable, y $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.

LEMA 6. La aplicación idéntica de C $[0,1]$ en $L_p(0,1)$ p-absolutamente sumable.

Demostración. En C $[0,1]$ definimos una forma lineal acotada δ_t por:

$$< x, \delta_t > = x(t), \quad ||\delta_t|| = 1 .$$

Se tiene:

$$\sum_{i=1}^{k} ||x_i||_{L_p}^p = \sum_{i=1}^{k} \int_0^1 |x_i(t)|^p \, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} |x_i(t)|^p \, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} |< x_i, \delta_t >|^p \, dt \leq \sup_{||a|| \leq 1} \sum_{i=1}^{k} |< x_i, a >|^p .$$

LEMA 7. La aplicación idéntica de C $[0,1]$ en $L_q(0,1)$ es, para cualquier p, $1 \leq p < q$, p-absolutamente sumable.

Demostración . Sea la sucesión ε_i de números positivos, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = 1$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{p/q} = +\infty$. Pongamos:

$$\sigma_o = 0 , \ldots\ldots , \sigma_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots$$

Podemos definir sobre C $[0,1]$ funciones x_i por la fórmula

$$x_i(t) = \begin{cases} 1-\varepsilon_i^{-1} \, |2t - \sigma_i - \sigma_{i-1}| & t \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i] \\ 0 & t \notin [\sigma_{i-1}, \sigma_i] . \end{cases}$$

Tomemos una forma lineal $a \in C[0,1]'$, $||a|| \leq 1$ y números λ_i de tal forma que $|\lambda_i| = 1$, $\lambda_i < x_i , a > = |< x_i, a >|$.

Entonces:

$$\{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p\}^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i , a\rangle| \leq \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, a\rangle \leq$$

$$\leq || \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i ||_C = 1$$

De aquí

$$\sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i , a\rangle|^p\}^{1/p} \leq 1.$$

Además,

$$||x_i||_{L_p} = (\delta_i/q + 1)^{1/q} .$$

Si fuera la transformación idéntica de $C\,[0,1]$ en $L_q(0,1)$ p-absolutamente sumable, es decir:

$$\{\sum_{i=1}^{k} ||x_i||^p_{L_q} \}^{1/p} \leq \rho \sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i , a\rangle|^p\}^{1/p} ,$$

Tendríamos, haciendo tender $k \to \infty$,que $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{p/q} < +\infty$,

lo que es falso.

Luego, vale para todo p, con $1 \leq p < q$.

<u>LEMA 8</u> . La aplicación idéntica $I: \ell^2 \to c_0$ no es 2-absoluta mente sumable.

<u>Demostración</u> . Si lo fuera tendríamos:

$$\{\sum_{i=1}^{k} ||Ix_i||^2_{c_0} \}^{1/2} \leq C . \sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^2 \}^{1/2}.$$

Tomemos la sucesión $\{x_i\}$, tal que $x_i = (0,0,\ldots,1_i,0\ldots\ldots)$.
Usando la desigualdad de Bessel, tenemos:

$$k^{1/2} = \{\sum_{i=1}^{k} ||Ix_i||^2_{c_o}\}^{1/2} \leq C \sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{i=1} |\langle x_i, a\rangle|^2\}^{1/2} \leq$$

$$\leq C \qquad \text{para } k = 1,2,\ldots.,$$

lo que es falso.

LEMA 9 . La aplicación idéntica I: $\ell^{\text{II}} \to m$, no es 2-absoluta - mente sumable.

Demostración . Análoga a la anterior.

LEMA 10 . La aplicación idéntica I: $\ell^1 \to \ell^2$ es absolutamente sumable y $\pi_2(I) = 1$.

Demostración . Consideremos en el intervalo $[0,1]$ las funcio- nes de Rademacher $r_p(t)$ definida por:

$$r_p(t) = \begin{cases} +1 & k2^{-p} < t < (k+1)2^{-p},\ k=0,2,\ldots,2^p-2 \\ 0 & t = k\ 2^{-p} \\ -1 & k2^{-p} < t < (k+1)2^{-p},\ k=1,3,\ldots,2^p-1. \end{cases}$$

Forman una familia ortogonal, ya que

$$\int_0^1 r_p(t)\ r_q(t)\ dt = \delta_{pq} \ .$$

En efecto, si p=q, el producto $r_p(t)r_q(t) = 1$ excepto en un número finito de puntos. Supongamos $p \neq q$.

La función $r_p(t) = (-1)^k$ en el intervalo $\Delta_p^k = (k2^{-p}, (k+1)2^{-p})$.

Entonces:

$$\int_0^1 r_p(t)\ r_q(t)\ dt = \sum_{k=0}^{2^p-1} (-1)^k \int_{\Delta_p^k} r_q(t)\ dt = 0 .$$

De la misma forma se prueba que la integral

$$\int_0^1 r_p(t)\ r_q(t)\ r_s(t)\ r_u(t)\ dt$$

vale uno o cero, de acuerdo con que los p,q,s,u sean iguales dos a dos, o no lo sean.

Mediante la fórmula:

$$\langle x,a(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\ \rho_n(t),\ x = [\xi_n] \in \ell^1$$

definimos sobre ℓ^1 una forma lineal continua $a(t)$, con $\|a(t)\| \leq 1$.

Usando la desigualdad de Bessel, tenemos:

$$\|Ix\|^2_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi\ |^2 = \int_0^1 |\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n\ \rho_n\ (t)|^2\ dt = \int_0^1 |\langle x,a(t)\rangle|^2\ dt .$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \|Ix_i\|^2_{\ell^2} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i,\ a(t)\rangle|^2\ dt \leq$$

$$\leq \sup_{\|a\| \leq 1} \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i,\ a\rangle|^2 .$$

Por lo tanto, I es 2-absolutamente sumable , y

$$1 < \|I\| \leq \pi_2\ (I) \leq 1,$$

de donde $\pi_2(I) = 1$

4. CARACTERIZACION DE LAS APLICACIONES p-ABSOLUTAMENTE SUMABLES.

TEOREMA 5 . [2]. Sean E y F dos espacios normados y $0<p<+\infty$. La aplicación lineal T de E en F es p-absolutamente sumable si y solo si existe sobre U° una probabilidad de Radon μ y un número $C>0$ tales que:

$$\forall\, x \in E, \quad \|Tx\| \leqslant C \left\{ \int_{U^\circ} |\langle x,a\rangle|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

Demostración. a) Supongamos que $T \in \Pi_p(E,F)$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p \leqslant C^p \sup_{\|a\| \leqslant 1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p \right\}.$$

Pongamos, para toda función ϕ del espacio de las funciones contínuas $C_R(U^\circ)$, U° con la topología débil,

$$s(\phi) = \inf_{x_1,\dots,x_k \in E} \left[\sup_{\|a\| \leqslant 1} \left(\phi(a) + C^p \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i,a\rangle|^p \right) \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p \right]$$

Esta es una funcional positiva, subaditiva y homogénea sobre el espacio de Banach $C_R(U^\circ)$. En efecto,

1) $\forall\, \lambda > 0$, $s(\lambda\phi) = \lambda s(\phi)$.

2) Veamos que es subaditiva. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_1,\dots,x_k \in E$ tales que para una función $\phi_1 \in C_R(U^\circ)$:

$$s(\phi_1) \geqslant \sup_{\|a\| \leqslant 1} \left(\phi_1(a) + C^p \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i,a\rangle|^p \right) - \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p - \varepsilon .$$

Se tiene:

$$s(\phi_1 + \phi_2)$$

$$\leq \inf_{x_1,\ldots,x_k \in E} \left[\sup_{||a||\leq 1} (\phi_1(a) + \phi_2(a) + C^p \sum_{i=1}^{k} |< x_i, a >|^p) - \sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^p \right] \leq$$

$$\leq s(\phi_1) - \varepsilon + \inf_{x_1,\ldots,k \in E} \left[\sup_{||a||\leq 1} (\phi_2(a) + C^p \sum_{i=1}^{k} |< x_i, a >|^p - \sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^p \right] \leq$$

$$\leq s(\phi_1) + s(\phi_2) - \varepsilon \, .$$

Luego:

$$s(\phi_1 + \phi_2) \leq s(\phi_1) + s(\phi_2) \, .$$

3) Es claro que es positiva.

Además se tiene:

$$\inf_{||a|| \leq 1} \phi(a) \leq s(\phi) \leq \sup_{||a|| \leq 1} \phi(a) \, .$$

El teorema de Hahn-Banach nos asegura la existencia de una funcional lineal μ sobre $C_R(U°)$ tal que

$$< \phi , \mu > \leq s(\phi) \qquad \phi \in C_R(U°).$$

Para cada función ϕ no negativa, se tiene:

$$<- \phi, \mu > \leq s(- \phi) \leq 0,$$

lo que prueba que la funcional lineal μ es positiva y continua.

Por otra parte:

$$< 1, \mu > \leq s(1) = 1$$

$$<-1, \mu > \leq s(-1) = -1.$$

Por lo tanto

$$< 1, \mu > = 1 .$$

Definimos ahora la función ϕ_x , por $\phi_x(a) = < x,a >$.

Entonces, $|\phi_x|^p \in C_R(U°)$ y se tiene

$$s(- C^p |\phi_x|^p) \leq \sup_{||a|| \leq 1} (-C^p |\phi_x(a)|^p + C^p |<x,a>|^p) - ||Tx||^p,$$

o sea

$$||Tx||^p \leq < C^p |\phi_x|^p , \mu > .$$

O lo que es lo mismo,

$$||Tx|| \leq C\{\int_{U°} | <x,a >|^p \, d\mu\}^{1/p} ,$$

ya que $\mu \in P(U°)$.

b) Recíprocamente, si la desigualdad es válida, indiquemos con $\gamma_p(T)$ al menor C que la verifica. Tenemos

$\forall$ k, $\forall$ $x_1,\ldots,x_k \in E$, $\forall$ $a \in U°$

$$\sum_{i=1}^{k} | <x_i, a> |^p \leq \sup_{||a|| \leq 1} \sum_{i=1}^{k} | < x_i, a > |^p.$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} ||Tx_i||^p \leq C^p \int_{U°} (\sum_{i=1}^{k} |< x_i,a >|^p) \, d\mu \leq$$

$$\leq C^p \sup_{||a|| \leq 1} (\sum_{i=1}^{k} |<x_i,a>|^p) ,$$

ó

$$\{ \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p \}^{1/p} \leq C \sup_{\|a\| \leq 1} \{ \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p \}^{1/p} .$$

T es entonces p-absolutamente sumable y $\pi_p(T) \leq \gamma_p(T)$.

Finalmente, $\pi_p(T) = \gamma_p(T)$.

5. FACTORIZACION DE LAS TRANSFORMACIONES p-ABSOLUTAMENTE SUMABLES.

Sea μ una medida de Radon, $\mu(K) = 1$, K compacto Hausdorff, e indiquemos con la I la aplicación idéntica de C(K) en $L_p(K,\mu)$ que a cada función continua $\phi \in C(K)$ le hace corresponder la clase $\hat{\phi} \in L_p(K,\mu)$.

LEMA 11 . La aplicación $I: C(K) \to L_p(K,\mu)$ es p-absolutamente sumable y $\pi_p(I) = 1$.

Demostración . Este lema es una generalización inmediata del lema 6, de página 11.

Con B(S) indicamos el espacio de todas las funciones acotadas y definidas sobre S con la norma

$$\|y\| = \sup_{s\in S} |y(s)| .$$

Es un espacio de Banach. Se tiene el siguiente teorema de factorización.

TEOREMA 6 . Un operador lineal T de un espacio normado E en el espacio de Banach B(S) es p-absolutamente sumable si y solo si se lo puede factorizar de la siguiente forma:

$$E \xrightarrow{P} C(K) \xrightarrow{I} L_p(K,\mu) \xrightarrow{Q} B(S)$$

donde P y Q son operadores lineales acotados con $\|P\| = 1$, y $\|Q\| = \pi_p(T)$.

Demostración . Condición necesaria. Como espacio de Hausdorff compacto K tomamos la esfera unitaria de E' con la topología débil.

Usando el teorema 5, tenemos sobre K una medida de Radon μ, tal que

$$||Tx||_B \leq \pi_p(T) \left\{ \int_{U^\circ} |\langle x,a\rangle|^p \, d\mu \right\}^{1/p} .$$

Definimos $P: E \to C(K)$ de forma tal que, a cada $x \in E$ le hacemos corresponder la función continua ϕ_x tal que $\phi_x(a)=\langle x,a\rangle$.

Además tenemos la transformación lineal acotada $Q_\circ$ del subespacio $IP(E)$ de $L_p(K,\mu)$ en $B(S)$, $Q_\circ(\hat{\phi}_x) = Tx$, $x \in E$.

Ahora,

$$||Q_\circ(\hat{\phi}_x)||_B = ||Tx||_B \leq \pi_p(T) \left\{ \int_{U^\circ} |\langle x,a\rangle|^p \right\}^{1/p} =$$

$$= \pi_p(T) \, . \, ||\hat{\phi}_x||_{L_p} .$$

Luego $||Q_\circ|| < \pi_p(T)$. Como podemos extender $Q_\circ$ con preservación de la norma a una transformación Q lineal y acotada de $L_p(K, \mu)$ en $B(S)$, tenemos la descomposición de T. Para Q tenemos:

$$\pi_p(T) \leq ||Q|| \, \pi_p(T) \, ||P|| \leq ||Q|| \leq \pi_p(T),$$

de donde:

$$||Q|| = \pi_p(T).$$

Condición suficiente. Es claro que, si T puede factorizarse como $T = Q\ I\ P$, siendo I p-absolutamente sumable (lema 11), resulta que T es p-absolutamente sumable, aplicando el lema 4.

Como todo espacio normado F puede sumergirse en un espacio de Banach $B(S)$, se tiene el

<u>TEOREMA 7</u>. Una transformación lineal de T de un espacio norma

do E en un espacio normado F es p-absolutamente sumable si y solo si, para todo espacio normado G:

$$\begin{array}{ccccc} E & & \xrightarrow{\quad T \quad} & & F \\ \downarrow{\scriptstyle P} & & & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ C(K) & \xrightarrow{I} & L_p(K,\mu) & \xrightarrow{Q} & G \end{array}$$

donde J es la transformación idéntica de F en G.

En el caso particular de p = 2, se tiene:

<u>LEMA 12</u> . Una transformación lineal T de un espacio normado E en un espacio de Banach F es 2-absolutamente sumable si y solo si se factoriza según el siguiente diagrama

$$E \xrightarrow{P} C(K) \xrightarrow{I} L_2(K,\mu) \xrightarrow{Q} F$$

<u>Demostración</u> . Siendo $L_2(K,\mu)$ un Hilbert, usando el Teorema 6, podemos extender Q_o preservando la norma a una transformación Q de $L_2(K, \mu)$ en F.

6. OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT. [16].

Veremos ahora que, en el caso de espacios de Hilbert, la clase de los operadores de Hilbert-Schmidt coincide con la clase de los operadores p-absolutamente sumables ($1 \leq p < +\infty$).

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Un operador lineal $T: H_1 \to H_2$ se dice Hilbert-Schmidt si $\sum_{i \in I} ||Te_i||^2 < +\infty$, para alguna (o lo que es equivalente, para toda base ortonormal $(e_i)_{i \in I}$ en H_1 [17],

Indicamos con $\mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$ la clase de todos los operadores de H-S de H_1 en H_2, y con $\Pi_p(H_1, H_2)$ la de todos los operadores p -absolutamente sumables de H_1 en H_2.

LEMA 13 . Todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

Demostración . Sea $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$ y consideremos la sucesión (f_n), $f_n \to f$ (debilmente). Es decir, $(f_n, g) \to (f,g)$ para toda $g \in H_1$. Veremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que, para todo $n > n_0$

$$||Tf_n - Tf|| < \varepsilon .$$

Tenemos, para alguna constante K, $||f_n|| \leq K$, para todo n y también $||f|| \leq K$.

Sea $\{\phi_j\}$ una base en H_1; como $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$, entonces, podemos encontrar una conjunto J finito de índices, tal que:

$$\sum_{j \notin J} ||T\phi_j||^2 < \varepsilon^2/16K^2 .$$

Por otra parte, $f_n - f = \sum_j (f_n - f , \phi_j) \phi_i$ y

$$Tf_n - Tf = \sum_j (f_n - f,\phi_j)T \phi_j.$$

Por lo tanto, para todo natural

$$||Tf_n - Tf||^2 = ||\sum_{j\varepsilon J} (f_n - f, \phi_j)T \phi_j + \sum_{j\not\varepsilon J} (f_n -f, \phi_j)T \phi_j||^2 \leq$$

$$\leq 2||\sum_{j\varepsilon J} (f_n - f, \phi_j)T \phi_j||^2 + 2||\sum_{j\not\varepsilon J} (f_n - f, \phi_j)T \phi_j||^2 .$$

Para el segundo sumando: $2||\sum_{j\not\varepsilon J} (f_n - f, \phi_j)T \phi_j||^2 \leq$

$$\leq 2(\sum_{j\not\varepsilon J} |(f_n - f, \phi_j)| \; ||T\phi_j||^2 \leq 2 \sum_{j\not\varepsilon J} |(f_n-f,\phi_j)|^2. \sum_{j\not\varepsilon J} ||T \phi_j||^2 \leq$$

$$\leq 2||f_n - f||^2 \sum_{j\not\varepsilon J} ||T \phi_j||^2 \leq 2(2k)^2 \frac{\varepsilon^2}{16k^2} = \varepsilon^2/2 .$$

Para el primer sumando, como $f_n \xrightarrow{d} f$, se tiene:

$$\lim (f_n - f, \phi_j) = 0 \text{ , para todo j.}$$

Entonces, la expresión

$$2 ||\sum_{j\varepsilon J} (f_n - f, \phi_j) T \phi_j||^2$$

puede hacerse $< \varepsilon^2/2$, para un n suficientemente grande, digamos $n > n_\circ$. (Hay solo un número finito de términos). Por lo tanto, para $n > n_\circ$

$$||Tf_n - Tf||^2 < \varepsilon^2 ,$$

y T transforma toda sucesión debilmente convergente de vectores en una sucesión que converge en norma

$(f_n \xrightarrow{d} f \Rightarrow ||Tf_n - Tf|| \to 0)$, luego T es compacto.

<u>LEMA 14</u>. Si $T \varepsilon \Pi_p(H_1,H_2)$, entonces T es compacto.

<u>Demostración</u> . Sea (e_n) una sucesión ortonormal en H_1. Veamos que $\lim_n Te_n = 0$.

Supongamos que ello no sea cierto. Entonces, existe un $C > 0$, y una sucesión ortonormal $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $||Te_n|| > C$, $n = 1,2,\ldots.$

Por lo tanto:

$$(1) \qquad \{\sum_{i=1}^{N} ||Te_n||^p\}^{1/p} \geq N^{1/p}C, \qquad N = 1,2,\ldots.$$

Como $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es ortonormal, se tiene:

$$(2) \qquad \{\sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, a\rangle|^2\}^{1/2} \leq ||a|| \quad \text{para} \quad a \in H_1 .$$

Para $p > 2$, se tiene entonces:

$$(3) \qquad \sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{n=1}^{N} |\langle e_n,a\rangle|^p\}^{1/p} \leq \sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, a\rangle|^2\}^{1/2} \leq 1.$$

Para $1 \leq p < 2$, usando la desigualdad de Hölder:

$$(4) \qquad \sup_{||a||\leq 1} (\sum_{n=1}^{N} |\langle e_n,a\rangle|^p)^{1/p} \leq N^{1/p-1/2} \sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n,a\rangle|^2\}^{1/2} \leq$$

$$\leq N^{1/p - 1/2} .$$

Pero $T \in \Pi_p(H_1, H_2)$ implica que, existe una constante positiva ρ tal que, para una sucesión arbitraria (x_n) de H_1, se tiene:

$$(5) \qquad \{\sum_{n=1}^{\infty} ||Tx_n||^p\}^{1/p} \leq \rho \sup_{||a||\leq 1} \{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n,a\rangle|^p\}^{1/p} .$$

Por lo tanto, (1), (3) y (4) contradicen (5).

Para ver que T es compacto, es suficiente probar que si $T: H_1 \to H_2$ es un operador no compacto, entonces $\underline{\lim}_n \|Te_n\| > 0$ para alguna sucesión ortonormal $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset H_1$.

Definimos la sucesión (e_n) inductivamente.

Si T no es compacto, no es límite (en la norma habitual)de una sucesión de operadores de rango finito. Por lo tanto, existe un $C > 0$, tal que $|||T - P||| > C$, para cada operador lineal $P: H_1 \to H_2$ de rango finito.

En particular, $|||T||| > C$. Existe entonces un $e_1 \in H_1$, $||e_1|| = 1$, tal que $\|Te_1\| > C$.

Supongamos ya determinados, para algún $m \geq 1$, elementos $e_1, \ldots, e_m$ de forma tal que $\|Te_i\| > C$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots,m$.

Con Q indicamos la proyección ortogonal de H_1 sobre el subespacio E_m, generado por $\{e_1,\ldots,e_m\}$. Sea $P = TQ$. P tiene entonces rango finitodimensional . Por lo tanto, $|||T - P|||>C$. Elegimos $e \in H_1$, $\|e\| = 1$ tal que $\|(T - P)e\| > C$. Se tiene que $Te \neq Pe$. Por lo tanto:

$$e - Qe \neq 0.$$

Hagamos:

$$e_{m+1} = ||(e - Qe)||^{-1} (e - Qe).$$

Entonces, $||e_{m+1}||= 1$ y

$$Te_{m+1} = \|(e - Qe)\|^{-1} (T - P)e .$$

Siendo $||e|| = 1$ y Q una proyección ortogonal ,
$||e - Qe|| \leq ||e|| = 1$.

De aquí resulta

$$||Te_{m+1}|| \geq ||(T - P)\ e|| > c.$$

Finalmente, como $Qe_{m+1} = 0$, el vector e_{m+1} es ortogonal con cada uno de los elementos en el rango de Q. En particular $< e_{m+1} , e_i > = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$. Hemos construido así, la sucesión ortonormal buscada.

LEMA 15. Si $T: H_1 \to H_2$ es compacto, entonces existe una base ortonormal (f_n) en H_1 tal que $Tf_n = \lambda_n g_n$, donde (g_n) es una sucesión ortonormal en H_2, los λ_n son no negativos y $\lim_n \lambda_n = 0$.

Demostración. Ver [19] , pag. 14 y siguientes.

7. DESIGUALDAD DE KHINCHIN. [3].

Consideremos nuevamente el sistema de Rademacher (pag. 13)

Para números complejos o reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, pongamos:

$$\alpha = \sum_{p=1}^{k} |\lambda_p|^2 = \int_0^1 \Big| \sum_{p=1}^{k} \lambda_p r_p(t) \Big|^2 dt .$$

Entonces, se tiene:

$$\int_0^1 \Big| \sum_1^k \lambda_p r_p(t) \Big|^4 dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \sum_{u=1}^{k} \lambda_p \lambda_q \bar{\lambda}_s \bar{\lambda}_u \int_0^1 r_p(t) r_q(t) r_s(t) r_u(t) dt.$$

De aquí resulta la desigualdad:

$$\int_0^1 \Big| \sum_{p=1}^{k} \lambda_p r_p(t) \Big|^4 dt \leq 3\alpha^2 .$$

Usando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $3/2$ y 3, se tiene

$$\alpha = \int_0^1 \Big| \sum_{p=1}^{k} \lambda_p r_p(t) \Big|^{2/3} \Big| \sum_{p=1}^{k} \lambda_p r_p(t) \Big|^{4/3} dt \leq$$

$$\leq \Big\{ \int_0^1 \Big| \sum_{p=1}^{k} \lambda_p r_p(t) \Big| dt \Big\}^{2/3} (3\alpha^2)^{4/3}.$$

De aquí resulta, la desigualdad de Khinchin:

$$\Big\{ \sum_{p=1}^{k} |\lambda_p|^2 \Big\}^{1/2} \leq \sqrt{3} \int_0^1 \Big| \sum_{p=1}^{k} \lambda_p r_p(t) \Big| dt.$$

8. <u>TEOREMA 8.</u> $\mathfrak{S}_2(H_1,H_2) = \Pi_p(H_1,H_2)$, para $1 \leq p < +\infty$.

<u>Demostración</u> . a) $\Pi_p(H_1,H_2) \subset \mathfrak{S}_2(H_1,H_2)$.

Sea $T \in \Pi_p(H_1, H_2)$. Entonces, T es compacto (lema 14, pag. 23). Sean (f_n), (g_n) y (λ_n), tales que $Tf_n = \lambda_n g_n$ (con las hipótesis del lema 15). Con $\{r_n(t)\}$ indicamos las funciones de Rademacher (pag. 13).

Fijemos un entero positivo N y pongamos, para $k = 0,1,2,\ldots,2^N - 1$:

$$x_k = \sum_{n=1}^{N} r_n^k f_n \quad ,$$

donde $r_n^k = r_n((2k+1)2^{-(N+1)})(k=0,1,\ldots,2^N-1; \quad n = 1,2,\ldots,N)$.

Se tiene:

$$||Tx_k|| = \|\sum_{n=1}^{N} r_n^k Tf_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} r_n^k \lambda_n g_n\| = (\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2)^{1/2},$$

Por lo tanto:

$$\{\sum_{k=0}^{2^N-1} ||Tx_k||^p\}^{1/p} = 2^{N/p} \{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2\}^{1/2} .$$

Pongamos:

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} < a,f_i > f_i \ .$$

De aquí se tiene:

$$|<x_k,a>|^p = |\sum_{n=1}^{N} r_n^k < \overline{a,f_n} > |^p = 2^n \int_{k2^{-N}}^{(k+1)2^{-N}} |\sum_{n=1}^{N} r_n(t) <\overline{a,f_n}>|^2 dt$$

Sumando:

$$| \sum_{k=0}^{2^N-1} |\langle x_n, a\rangle|^p\}^{1/p} = \{2^N \sum_{k=0}^{2^N-1} \int_{k2^{-N}}^{(k+1)2^{-N}} | \sum_{n=1}^{N} r_n(t) < \overline{a, f_n} >|^p \, dt\}^{1/p} =$$

$$= 2^{N/p} \{ \int_0^1 | \sum_{n=1}^{N} r_n(t) < \overline{a, f_n} >|^p \, dt\}^{1/p} .$$

Usando ahora la desigualdad de Khinchin:

$$\{ \sum_{k=0}^{2^N-1} |\langle x_k, a\rangle|^p\}^{1/p} \leq 2^{N/p} \; B_p \{ \sum_{n=1}^{N} |\langle a, f_n\rangle|^2\}^{1/2} \leq 2^{N/p} B_p \, ||a||,$$

donde B_p es una constante dependiendo sólo de p. Tenemos entonces

$$\{ \sum_{k=0}^{2^N-1} ||Tx_k||^p\}^{1/p} = 2^{N/p} \{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \}^{1/2} \leq C \sup_{||a|| \leq 1} \{ \sum_{k=1}^{2^N-1} |\langle x_k, a\rangle|^p\}^{1/p} \leq$$

$$\leq C.\, B_p \, 2^{N/p} .$$

Por lo tanto:

$$\{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \}^{1/2} \leq CB_p , \qquad N = 1,2,\ldots.$$

Como $||Tf_n|| = \lambda_n$, $n = 1,2,\ldots..$, esta desigualdad se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Tf_n||^2 \leq (C\, B_p)^2 < +\infty .$$

Esto muestra que $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$.

b) $\underline{\mathfrak{S}_2(H_1, H_2) \subset \Pi_p(H_1, H_2)}$.

Sean (f_n), (g_n) y (λ_n) como antes. Si $T \in \mathfrak{S}_2(H_1,H_2)$, entonces

$$A = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^2 \}^{1/2} < +\infty \quad .$$

Sea ahora $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en H_1. Hagamos:

$$b(t) = A^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \lambda_n f_n ,$$

donde $r_n(t)$ es la n-función de Rademacher. Entonces(usando la desigualdad de Khinchin) :

$$\sup_{\|a\| \leq 1} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle x_m, a\rangle| \geq A^{-1} \sup_{\|a\| \leq 1} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle x_m, b(t) \rangle| \geq$$

$$\geq A^{-1} \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \lambda_n(t) \langle x_m, f_n \rangle | \, dt =$$

$$= A^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 | \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \lambda_n \langle x_m, f_n \rangle | \, dt \geq$$

$$\geq (\sqrt{3}\, A)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle x_m, f_n \rangle|^2 \}^{1/2} =$$

$$= (\sqrt{3}\, A)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \|Tx_m\| \; .$$

De aquí se sigue que $\mathfrak{S}_2(H_1,H_2) \subset \Pi_1(H_1,H_2)$.

Sea ahora $p > 1$ y $q = p(p-1)^{-1}$.

Vale entonces que:

$$\{ \sum_{m=1}^{\infty} | c_m|^p \}^{1/p} = \sup_{\sum_{m=1}^{\infty} |t_m|^q = 1} \sum_{m=1}^{\infty} | t_m c_m| \; .$$

Tenemos:

$$\{\sum_{m=1}^{\infty} ||Tx_m||^p\}^{1/p} = \sup_{\sum_{m=1}^{\infty}|t_m|^q = 1} \sum_{m=1}^{\infty} ||T\, t_m x_m|| \leq$$

$$\leq \sqrt{3}\; A \sup_{\sum_{m=1}^{\infty}|t_m|^q = 1}\; \sup_{||a|| \leq 1} \sum_{m=1}^{\infty} |<t_m x_m, a>| =$$

$$= \sqrt{3}\; A \sup_{||a|| \leq 1}\; \sup_{\sum_{m=1}^{\infty}|t_m|^q=1} \sum_{m=1}^{\infty} |t_m <x_m, a>| =$$

$$= \sqrt{3}\; A \sup_{||a|| \leq 1} \{\sum_{m=1}^{\infty} |< x_m , a >|^p\}^{1/p}.$$

Por lo tanto, $T \in \Pi_p(H_1,H_2)$, $p > 1$.

9. ESPACIOS $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_\infty$ [4].

Sean X e Y dos espacios de Banach. Con L(X,Y) indicamos el espacio de todos los operadores (lineales y acotados) de X en Y con la norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| .$$

La distancia entre dos espacios de Banach X e Y, d(X,Y) se define como el ínfimo $\|T\|\,\|T^{-1}\|$, donde este ínfimo se toma sobre todos los T invertibles en L(X,Y). (Si no existe un T invertible, es decir, si X e Y no son isomorfos, d(X,Y) se toma igual a inifinito). d(X,Y) no es una métrica, pero es más conveniente para el manejo que log d, que si lo es.

Si X es subespacio de un espacio de Banach Y, decimos que X es (o está) complementado en Y si existe una proyección lineal acotada de Y sobre X.

Un espacio de Banach X se dice un espacio de Tipo $\mathcal{P}$ o espacio $\mathcal{P}$, si está complementado en todo espacio de Banach Y que lo contiene como subespacio.

Un espacio de Banach X se dice un espacio de tipo $\mathcal{P}_\lambda$ o espacio $\mathcal{P}_\lambda$, $1 \leq \lambda < \infty$, si para todo $Y \supset X$ existe una proyección de norma $\leq \lambda$, de Y sobre X.

Con $L_p(K, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, se indica el espacio de las funciones medibles definidas sobre algún espacio de medida de (K, Σ, μ), para las cuales (si $p < \infty$):

$$\int_K |f(x)|^p d\mu\ (x) < \infty \quad ,$$

y de norma:

$$||f|| = \left(\int_K |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} .$$

Si $p = \infty$, el espacio está formado por todas aquellas funciones medibles f para las cuales $||f|| = \sup.\ \text{esc.}\ |f(x)| < \infty$. También se lo indica con $L_p(\mu)$, si no hay lugar a confusión.

Casos especiales .

Con $\ell_p(\Gamma)$, indicamos el espacio de todas las funciones reales definidas sobre un conjunto abstracto Γ,para el cual

$$||f|| = \begin{cases} \left(\sum_\gamma |f(\gamma)|^p \right)^{1/p} < \infty & \text{si } p < \infty . \\ \sup_\gamma |f(x)| < \infty & \text{si } p = \infty . \end{cases}$$

Si Γ es infinito numerable, lo indicamos $\ell_p(\Gamma) = \ell_p$ y si es finito, digamos n elementos, $\ell_p(\Gamma) = \ell_p^n$.

El subespacio de $\ell_\infty(\Gamma)$ formado por todas aquellas funciones f para las cuales $\{ \gamma ; |f(\gamma)| > \varepsilon \}$ es finito para todo $\varepsilon > 0$, se indica con $c_o(\Gamma)$ ó c_o si Γ es infinito numerable.

Se puede considerar una clase más amplia de espacio de Banach que la de los $L_p(\mu)$ y que se da en la siguiente

DEFINICION 1 . Un espacio de Banach X se dice un espacio de tipo $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ o espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \lambda < \infty$, si pa ra todo subespacio finito dimensional $B \subset X$ existe un subespacio finito dimensional $E \subset X$ conteniendo B tal que $d(E, \ell_p^n) \leq \lambda$, (donde $n = \dim E$).

Un espacio de Banach X se dice un espacio de tipo $\mathcal{L}_p$ o espacio $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$ si es un espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para algún $\lambda \geq 1$.

Usando subespacio que son generados por funciones características de conjuntos, en la descomposición de un espacio de medida en un número finito de subconjuntos, se prueba que todo espacio $L_p(\mu)$ es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para todo $\lambda > 1$.

Usando particiones de la unidad, se puede probar que todo espacio C(K) - (espacio de las funciones continuas sobre un espacio de Hausdorff compacto) - es un espacio $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ para todo $\lambda > 1$.

Más generalmente, todo espacio de Banach cuyo dual es isomé trico a un espacio $L_1(\mu)$ es un espacio $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ para todo $\lambda > 1$.

Todo espacio $\mathcal{L}_p$ es isomorfo a un subespacio de un $L_p(\mu)$, para una cierta medida μ. En particular, como todo subespacio de un espacio de Hilbert es un espacio de Hilbert, la clase de los espacios $\mathcal{L}_2$ coincide con la clase de los espacios isomorfos a un espacio de Hilbert.

Hay ejemplos de espacios L_p que no son isomorfos a $L_p(\mu)$, para $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. Para $p = \infty$ es claro que no todo espacio L_∞ es isomorfo a un espacio $L_\infty(\mu)$. Basta observar que no hay espacios $L_\infty(\mu)$ de dimensión infinita separables (Ver [18]).

LEMA 16. Sea X un espacio de tipo $\mathcal{L}_1$ y H un espacio de Hilbert. Entonces $T \in L(X,H)$ es 1-absolutamente sumable.

Demostración . De acuerdo con la definición, sea λ tal que X es un espacio de tipo $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ y sea $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} |x^* (x_i)| \leq ||x^*|| \quad , \text{ para toda } x^* \in X^* .$$

Existe entonces un subespacio de dimensión finita $E \subset X$ conteniendo $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ y un operador $S: \ell_1^m \to E$ ($m = \dim E$), con $||S|| = 1$ y $||S^{-1}|| \leq \lambda$.

Pongamos: $y_i = S^{-1}x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Sea $a_{i,j}$ la j-ma coordenada de y_i respecto a la base usual $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ de ℓ_1^m

(es decir,

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} e_j \qquad i=1,2,\ldots,n).$$

Sean t_i, s_j ($i=1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,m$), números reales de valor absoluto ≤ 1 y sea $y^* \in \ell_\infty^m = (\ell_1^m)^*$, cuya j-ma coordenada sea s_j. Entonces:

$$|\sum_{i,j} a_{i,j} t_i s_j| \leq \sum_i |t_i| \, |\sum_j a_{i,j} s_j| \leq \sum_i |\sum_j a_{i,j}s_j| =$$

$$= \sum_i |y^*(y_i)| = \sum_i | y^*(S^{-1}x_i) | =$$

$$\sum_i |(S^{-1})^* y^*(x_i)| \leq ||(S^{-1})^* y^*|| \leq \lambda.$$

Pongamos ahora:

$$u_i = Tx_i = TSy_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\, TSe_j \quad , \; i=1,2,\ldots,n.$$

Entonces, se tiene:

$$\sum_i ||u_i|| = \sum_i || \sum_j a_{i,j}\; T\,S\,e_j ||.$$

Usando el corolario 1, [4 ,pag 278] , se tiene:

$$\sum_{i=1} ||Tx_i|| \leq K_G\, \lambda \sup_j ||TSe_j|| \leq K_G\, \lambda\, ||TS|| \leq K_G\, \lambda ||T||.$$

Por lo tanto, $\pi_1(T) \leq K_G\; \lambda\; ||\,T|| < \infty$.

<u>LEMA 17</u> . Sea X un espacio de tipo $\mathcal{L}_\infty$ y sea Y un espacio de tipo $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p \leq 2$. Entonces, todo $T \in L(X,Y)$ es 2-absolutamente sumable.

<u>Demostración</u> . Sean λ y ρ tales que X es un espacio $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ e Y un espacio de tipo $\mathcal{L}_{p,\rho}$. Sea $\{x_i\}_{i=1}^{N} \subset X$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |x^*(x_i)|^2 \leq ||x^*||^2 \quad , \quad \text{para todo } x^* \in X^* .$$

Por nuestra hipótesis sobre X, existe un entero m y un operador invertible S de ℓ_∞^m en X tal que $S\,\ell_\infty^m \supset \{x_i\}_{i=1}^{N}$, $||S|| = 1$, $||S^{-1}|| \leq \lambda$.

Hacemos $z_i = S^{-1}x_i \in \ell_\infty^m (i = 1,2,\ldots,N)$. Por la hipótesis sobre Y, existe un subespacio de dimensión finita E de Y tal que $TS\,\ell_\infty^m \subset E$, y un operador invertible $U:E \to \ell_p^h$ (h= dim E), con $||U|| = 1$ y $||U^{-1}|| \leq \rho$.

Por lo tanto, tenemos un operador

$$T_o = U\,T\,S : \ell_\infty^m \to \ell_p^h ,$$

y elementos $\{z_i\}_{i=1}^n \subset \ell_\infty^m$ tal que para todo $z^* \in \ell_1^m$, se tiene:

$$(1)\ \sum_i (z^*(z_i))^2 = \sum_i (z^*(S^{-1}x_i))^2 = \sum_i ((S^{-1})^* \ z^*(x_i))^2 \leq$$
$$\leq \|(S^{-1})^* \ z^*\|^2 \leq \lambda^2 \ \|z^*\|^2 .$$

Tenemos que probar que $\sum_i \|T_o \ z_i\|^2$ está acotada por una constante dependiente únicamente de λ y $\|T_o\|$.

Sea $\{e_j\}_{j=1}^m$ y $\{f_k\}_{k=1}^h$ bases en ℓ_∞^m y ℓ_p^h. Sea $a_{i,j}$ definida por

$$T_o\, e_j = \sum_{k=1}^h a_{j,k}\, f_k \qquad j = 1,2,\ldots,m.$$

Para todo $u^* = (\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_h) \in (\ell_p^h)^*$, con $\|u^*\| = 1$, y todo $\{t_j\}_{j=1}^m$, $\{s_k\}_{k=1}^h$ reales de valor absoluto menor o igual a 1, se tiene:

$$(2)\ \left|\sum_{j,k} a_{jk}\, \alpha_k t_j s_k\right| = \left|u_s^*\left(\sum_j T_o t_j e_j\right)\right| \leq \|u_s^*\|\,\|T_o\|\,\left\|\sum_j t_j e_j\right\| < \|T_o\|,$$

donde u_s^* indica el vector $(s_1\, \alpha_1, s_2\, \alpha_2,\ldots,s_n\, \alpha_h)$ en $(\ell_p^h)^*$

Sea $z_{i,j}$ la j-ma coordenada de z_i, es decir

$$z_i = \sum_{j=1}^m z_{i,j}\, e_j .$$

De (1) resulta que

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}^2 \leq \lambda^2 \qquad j= 1,2,\dots,m,$$

(tomar $z^* = j$ - vector unitario en ℓ_1^m , en (1)).

Tenemos que usar ahora, el resultado siguiente [4, pag.280]:

"Sea $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots}$ una matriz real infinita y M una constante positiva tal que:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} t_i s_j \right| \leq M, \text{ para } |t_i| \leq 1, \ |s_j| \leq 1, \ i,j,N= 1,2,\dots.$$

Entonces, para una matriz real arbitraria $\{x_{k,i}\}$ tal que para algún $C > 0$ vale:

$$\left(\sum_k x_{k,i}^2 \right)^{1/2} < C,$$

se tienen las siguientes desigualdades:

a) <u>Desigualdad general de Littlewood</u> :

$$\sum_j \left(\sum_k \left(\sum_i x_{k,i} a_{i,j} \right)^2 \right)^{1/2} \leq K_G \, C \, M,$$

b) <u>Desigualdad general de Orlicz</u> :

$$\left(\sum_k \left(\sum_j \left| \sum_i x_{k,i} a_{i,j} \right| \right)^2 \right)^{1/2} \leq K_G \, C \, M,$$

donde K_G es la constante universal de Grothendieck: $K_G \operatorname{senh} \pi/2 =$

$= (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})/ 2$,

Teniendo en cuenta (2) y (3), y usando la desigualdad (a):

$$\sum_k \alpha_k \left(\sum_i \left(\sum_j z_{i,j} a_{j,k} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \lambda \ K_G \ \|T_o\| .$$

Como esto vale, siempre que $\Sigma\alpha_k^q = 1((1/p+ 1/q) = 1)$ si $p > 1$ y siempre que $|\max\ \alpha_k| = 1$, si $p = 1$, se tiene, usando el teorema de Landau:

$$(4) \qquad \Big(\sum_k \Big(\sum_i \Big(\sum_j z_{i,j}\, a_{j,k} \Big)^2 \Big)^{p/2} \Big)^{1/p} \leq \lambda\, K_G\, ||T_o|| .$$

Hagamos ahora:

$$b_{k,i} = \Big|\sum_j z_{i,j}\, a_{j,k}\Big|^p .$$

Usando la desigualdad triangular, en $\ell_{2/p}$ (recordar $p \leq 2$), es decir,

$$\Big(\sum_i \Big(\sum_k b_{k,i} \Big)^{2/p} \Big)^{p/2} \leq \sum_k \Big(\sum_i (b_{k,i})^{2/p} \Big)^{p/2} ,$$

obtenemos, de (4):

$$(5) \qquad \Big(\sum_i \Big(\sum_k \Big|\sum_j z_{i,j}\, a_{j,k}\Big|^p \Big)^{2/p} \Big)^{1/2} \leq \lambda\, K_G\, ||T_o|| .$$

Ahora:

$$T_o z_i = \sum_j z_{i,j}\, Te_j = \sum_k \Big(\sum_j z_{i,j}\, a_{j,k} \Big) f_k .$$

Por lo tanto:

$$||T_o z_i|| = \Big(\sum_k \Big|\sum_j z_{i,j}\, a_{j,k}\Big|^p \Big)^{1/p} .$$

Podemos entonces, escribir la desigualdad (5) en la forma:

$$\sum_i ||T_o z_i||^2 \leq \lambda^2\, K_G^2\, ||T_o||^2 \leq \lambda^2\, K_G^2\, ||T||^2 .$$

Por lo tanto:

$$\sum_i ||Tx_i||^2 = \sum_i ||U^{-1} T_o z_i||^2 \leq \rho^2\, \lambda^2\, K_G^2\, ||T||^2 .$$

o lo que es lo mismo:

$$\pi_2(T) \leq \rho\lambda\, K_G\, ||T|| < \infty ,$$

y T es 2-absolutamente sumable.

10. OPERADORES HILBERTIANOS [4] .

Sean X e Y dos espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Diremos que T puede ser factorizado a través de una espacio de Banach Z si existen operadores lineales acotados $T_o: X \to Z$ y $T_1: Z \to Y$ $T = T_1 T_o$. Un operador T se dice hilbertiano si puede factorizarse a través de un espacio de Hilbert H.

LEMA 18 . Sea X un espacio de tipo $\mathcal{L}_\infty$ e Y un espacio de tipo $\mathcal{L}_1$.

Entonces, todo $T \in L(X,Y)$ es hibertiano.

Demostración . Del lema 17, se tiene que todo $T \in L(X,Y)$ es 2-absolutamente sumable. Usando el teorema de factorización, se tiene que T es hilbertiano.

LEMA 19. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Las siguientes implicaciones son equivalentes:

a) T es hilbertiano;

b) T^* es hilbertiano;

c) Existe un espacio de Banach Z y un operador hilbertiano $S: Z \to Y$ tal que $SZ \supset TX$;

d) Existe un espacio de Banach Z y un operador hilbertiano $S: X \to Z$ tal que $||Tx|| \leq ||Sx||$, para $x \in X$.

Demostración. a) => b). Es inmediata, ya que el dual de un Hilbert es un Hilbert.

b) => a). Si vale b), T^{**} es hilbertiano, y por lo tanto T, que es la restricción de T^{**} a X, es hilbertiano.

<u>a) => c)</u> . Siendo T hilbertiano, es inmediato del diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T_o"'] & & Y \\ & H \arrow[ur, "T_1"'] & \end{tikzcd}$$

<u>a) => d)</u> : Usar nuevamente el diagrama.

<u>c) => a)</u> : De la definición de hilbertiano, podemos suponer $Z = H$, Hilbert. Considerando el complemento ortogonal del núcleo de S, podemos suponer que S es 1:1. Definimos $S_o : X \to Z$, poniendo $S_o x = S^{-1}Tx$, $x \in X$. S_o está bien definido y es lineal. Es también acotado, ya que si $||x_n - x|| \to 0$ y $||S_o x_n - h|| \to 0$, entonces $||Tx_n - Tx|| \to 0$ y $||Tx_n - Sh|| = ||SS_o x_n - Sh|| \to 0$, y por lo tanto $Tx = Sh$ ó $h = S_o x$ (teorema del gráfico cerrado). Luego $T = SS_o$ es un operador hilbertiano.

<u>d) => a)</u> : Sea $Z = H$. Para todo $h \in SX$ definimos $S_1 h = Tx$, donde x es cualquier elemento en $S^{-1}h$. Como el núcleo de T contiene al de S, S_1 está bien definido y es lineal. Para todo $x \in X$, $||Tx|| = ||S_1 Sx|| \leq ||Sx||$ y de aquí, $||S_1 h|| \leq ||h||$. Extendemos S_1 a un operador lineal y acotado $\tilde{S}_1$ de $H \to Y$. Como $T = \tilde{S}_1 S$, la implicación está demostrada.

<u>LEMA 20</u> . Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) T es hilbertiano ;

2) Existe una constante C tal que para toda matriz real fini

ta

$\{a_{i,j}\}_{\,i,j=1,2,\dots,N}$, y elementos $\{x_i\}_{i=1}^{N} \subset X$,

$\{y_i\}_{i=1,}^{N} \subset Y^*$,

$$\Big|\sum_{i,j} a_{i,j}\, y_j^*(Tx_i)\Big| \;\le\; CM \sup_i \|x_i\| \;\sup_j \|y_j^*\| ,$$

donde $M = \sup\limits_{\substack{|s_i|\le 1\\ |t_j|\le 1}} \Big|\sum\limits_{i,j} a_{i,j}\, s_i\, t_j\Big|$.

<u>**Demostración**</u> . <u>1) => 2)</u> . Supongamos que $T = T_1T_o$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T_o"'] & & Y \\ & H \arrow[ur, "T_1"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces,

$$\sum_{i,j} a_{i,j}\, y_j^*(Tx_i) = \sum_{i,j} a_{i,j}\, (T_o x_i,\; T_1^*\, y_j^*) .$$

Ahora hay que usar el teorema 2.1([4], pág. 279) que dice: "Sea $\{a_{i,j}\}_{\,i,j=1,2,\dots,N}$ una matriz real y M un número positivo tal que:

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\, t_i\, s_j\Big| \le M$$

para todo real $\{t_i\}_{i=1}^{N}$, $\{s_j\}_{j=1}^{N}$, satisfaciendo $|t_i|\le 1$, $|s_j|\le 1$. Entonces, para vectores arbitrarios $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, $\{y_j\}_{j=1}^{N}$ en un espacio H real

$$\Big|\sum_{i=j} a_{i,j}\, (x_{i,j})\Big| \le K_G\, M \sup_i \|x_i\| \;\sup_j \|y_j\| ,$$

donde K_G es la constante universal de Grothendieck.

2) => 1) . Supongamos que 2) se verifique y sea $U: \ell_1(\Gamma) \overset{op}{\to} X$. Usando el lema 16, $TU: \ell_1(\Gamma) \to Y$ es absolutamente sumable y por lo tanto hilbertiano. Tomando U la aplicación cociente, se sigue de la implicación c) => a) del lema 19 que T es hilbertiano.

11. TEOREMA 2*. Toda algebra 2-absolutamente sumable es una algebra de operadores.

Demostración . Sea R una algebra 2-absolutamente sumable, con las notaciones de páginas 2-4. Tenemos $\pi_2(\phi) \leq K||\phi||$, $\forall \phi \varepsilon R'$. Suponemos además R unitaria.

1) Veamos que existe un Hilbert y un homomorfismo $T:R \to L(H)$ de norma $\leq$ K.

Sabemos que, si $\phi \varepsilon B_{R'}$, (bola unitaria de R', con la topología débil), para todo conjunto finito $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\} \subset R$, tenemos:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{k} ||\tilde{\phi}(x_i)||^2 \leq K^2 \sup_{\psi \varepsilon B_{R'}} \sum_{i=1}^{k} |<\psi, x_i>|^2 .$$

Sea μ una probabilidad de Radon sobre $B_{R'}$. Podemos escribir la desigualdad anterior así:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{k} \int_{B_{R'}} ||\tilde{\phi}(x_i)||^2 d\mu(\phi) \leq K^2 \sup_{\psi\varepsilon B_{R'}} \sum_{i=1} |<\psi, x_i>|^2 .$$

Sea ahora F la aplicación lineal $F:R \to L^2(B_{R'}, \mu; R')$ definida por:

---

* Esta demostración se debe a Maurey y utiliza el teorema del punto fijo de Tychonov, Kakutani y Ky Fan [8] , pág. 270: Sea Γ una aplicación multívoca de un compacto convexo X es si mismo, a valores compactos convexos no vacíos, cuyo gráfico $\{(x,t): x \varepsilon X, t \varepsilon \Gamma(x)\}$ es cerrado en X x X. Entonces, existe un $x_o \varepsilon X$ tal que $x_o \varepsilon \Gamma(x_o)$.

$$F(x): B_{R'} \to R' \; ; \quad \phi \to \tilde{\phi}(x) \; .$$

Podemos escribir ahora, la desigualdad (1) como:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{k} ||F(x_i)||^2 \leq K^2 \sup_{\psi \in B_{R'}} \sum_{i=1}^{k} |<\psi, x_i>|^2 \; .$$

Por lo tanto, F es un operador 2-absolutamente sumable y $\pi_2(F) \leq K$.

Teniendo en cuenta el teorema de caracterización de Pietsch, existe una familia $\Gamma(\mu) \subset P(B_{R'})$ tal que, cualesquiera que sean $x \in R$, y $\nu \in \Gamma(\mu)$,

$$\int_{B_{R'}} ||\tilde{\phi}(x)||^2 \, d\mu(\phi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi, x>|^2 \, d\nu(\phi).$$

La aplicación multívoca $\Gamma: P(B_{R'}) \to P(B_{R'})$, $\mu \to \Gamma(\mu)$, satisface la hipótesis del teorema de T-K-KF ; por lo tanto, existe una $\omega \in P(B_{R'})$, tal que

$$\forall x \in R, \quad \int_{B_{R'}} ||\tilde{\phi}(x)||^2 \, d\omega(\phi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi, x>|^2 \, d\omega(\phi).$$

De aquí resulta: $\forall x \in R, \forall y \in B_R$,

$$(4) \quad \int_{B_{R'}} |<\phi, yx>|^2 \, d\omega(\phi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi, x>|^2 \, d\omega(\phi).$$

Cuando $x \in R$, indicamos con $f_x \in C(B_{R'})$ la función $f_x(\psi) = <\psi, x>$.

Sea H la clausura en $L^2(\omega)$ de $\{f_x ; x \in R\}$. H es un espacio de Hilbert.

Definamos $T: R \to L(H)$ por:

$$T(z) f_x = f_{zx} \quad .$$

Entonces, T es un homomorfismo y, de la desigualdad anterior, $||T|| \leq K$.

2) Veamos ahora que, a cada $y \in R$ se le puede asociar un espacio de Hilbert H_y y un homomorfismo $T_y: R \to L(H_y)$ cuya norma es $\leq K\sqrt{2}$, y tal que

$$||T_y(y)|| \geq ||y|| / \sqrt{2} .$$

Fijemos $y \in R$. Existe una $\eta \in B_{R'}$ tal que $< \eta , y > = ||y||$. Sea $P_y = \frac{1}{2} \delta_\eta + \frac{1}{2} P(B_{R'}) \subseteq P(B_{R'})$. P_y es compacto y convexo. Usando las notaciones anteriores, si $\lambda = \frac{1}{2}\delta_\eta + \frac{1}{2}\mu$, y si $\nu \varepsilon \Gamma(\lambda)$, se tiene

$$\forall x \in R, \int_{B_{R'}} ||\tilde{\phi}(x)||^2 \, d\lambda(\phi) \leq K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi,x>|^2 \, d\nu(\phi) \leq$$

$$\leq 2K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi,x>|^2 \, d(\tfrac{1}{2}\delta_\eta + \tfrac{1}{2}\nu)(\phi).$$

Definamos $$\Gamma'(\lambda) = \frac{1}{2}\delta_\eta + \frac{1}{2}\Gamma(\lambda).$$

Γ' es una aplicación multívoca de P_y en si mismo, satisfaciendo las hipótesis del teorema de T-K-KF. Existe, por lo tanto, $\omega_y \in P_y$ tal que:

$$\forall x \in R, \int_{B_{R'}} ||\tilde{\Phi}(x)||^2 \, d\omega_y(\phi) \leq 2K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi,x>|^2 d\omega_y(\phi) .$$

De aquí, $\forall x \in R$, $\forall z \in B_R$,

$$\int_{B_{R'}} |<\phi,zx>|^2 \, d\omega_y(\phi) \leq 2K^2 \int_{B_{R'}} |<\phi,x>|^2 \, d\omega_y(\phi),$$

y además:

$$\int_{B_{R'}} |<\phi,y>|^2 \ d\,\omega_y(\phi) \geq \frac{1}{2} \ ||y||^2 .$$

Si con H_y indicamos la clausura de $\{f_x: x \in R\}$ en $L^2(\omega_y)$ y si $T_y: R \to L(H_y)$ está definido por

$$T_y(z) f_x = f_{zx} ,$$

se tiene:

$$||T_y|| \leq \sqrt{2} \ K,$$

y además

$$||T_y(y)|| \geq ||T_y(y)|| \ ||f_e|| \geq ||T_y(y) f_e|| = ||f_y|| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} ||y||.$$

c) Definimos ahora $H = \bigoplus_{y \in R} H_y$ y $T: R \to L(H)$ por

$$T(x) \ ((h_y)_{y \in R}) = (T_y(x) h_y)_{y \in R'} .$$

T es entonces un homomorfismo y además:

$$\forall \ x \in R, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ ||x|| \leq ||T(x)|| \leq \sqrt{2} \ K \ ||x|| .$$

12. TEOREMA . Toda algebra de operadores es una algebra hilbertiana.

Demostración . Sea R subalgebra cerrada de $L(H)$ y $h,k \in B_H$.

Indicamos con $h \otimes k$ el elemento de $B_{R'}$ definido por:

$$< h \otimes k, x > = <xh, k> \quad , \forall x \in R.$$

Tenemos que demostrar que

$$||h \otimes k||_H \leq K ||h \otimes k|| \quad ,$$

ya que $L(H) = (H \otimes H)'$. Fijamos $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subset B_R, \{y_1,\ldots,y_n\} \subset B_R.$

Tenemos:

$$| a_{ij} < (h \otimes k)x_i, y_j >| = | \Sigma \; a_{ij} < y_j x_i h,k >| =$$

$$= | \Sigma \; a_{ij} < x_i h, {}^t y_j k>| \leq$$

$$\leq 2\text{sen h} \; (\pi/2) \sup_{\substack{|s_i| \leq 1 \\ |t_j| \leq 1}} |\Sigma \; a_{ij} s_i t_j |.$$

(${}^t y_j$ es la transpuesta de y_j). Por lo tanto, R es una algebra hilbertiana, usando el lema 20.

13. TEOREMA 3 . Toda algebra estrictamente p-absolutamente sumable ($1 \leq p < \infty$) y unitaria, es una algebra uniforme.

Demostración . Vamos a probar que, todo punto extremal de la esfera unidad del dual es (a menos de un múltiplo de módulo 1) un elemento del espectro del algebra [20] .

Sea R la algebra p-absolutamente sumable, y $\phi \in B_{R'}$. Sabemos que $\pi_p(\tilde{\phi}) \leq ||\phi||$, y teniendo en cuenta el teorema de Pietsch (pág. 15) , existe $\mu \in P(B_{R'})$ tal que:

$$||\tilde{\phi}(x)|| < \pi_p(\tilde{\phi}) \quad \{ \int_{B_{R'}} |<\psi,x>|^p \, d\mu(\psi) \}^{1/p} \quad , \forall \quad x \in R.$$

Esta desigualdad se puede expresar, según el siguiente diagrama conmutativo: si $x \in R$, indicamos con $f_x \in C(B_{R'})$ la función:

$$f_x(\psi) = <\psi, x> .$$

Sea $\Lambda_p = \overline{\{f_x : x \in R\}}$ (en $L^p(\mu)$) y sea $I : R \to \Lambda_p$ la aplicación $x \to f_x$. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\tilde{\phi}"] \arrow[dr, "I"'] & & R' \\ & \Lambda_p \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

donde Φ es una aplicación lineal de norma $\leq \pi_p(\tilde{\phi})$.

Para todo $x,y \in R$, se tiene:

$$<\phi, xy> = <\tilde{\phi}(y), x> = <\Phi I(y), x> = <I(y), {}^t\Phi(x)>$$

donde ${}^t\Phi : R'' \to (\Lambda_p)'$ es la traspuesta de Φ .

Como $(\Lambda_p)'$ es un cociente de $L^{p'}(\mu)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$, se puede encontrar un representante $B_x \in L^{p'}(\mu)$ de ${}^t\Phi(x)$ tal que :

$$||B_x||_{L^{p'}} = ||{}^t\Phi(x)||_{(\Lambda_p)'} \leq \pi_p(\tilde{\phi})\ ||x|| \ .$$

Por lo tanto,

$$< \phi , xy > = \int_{B_{R'}} <\psi ,y > B_x(\psi)\ d\mu(\psi),$$

y si e es la unidad de R,

$$<\phi,y> = \int_{B_{R'}} <\psi,y > B_e(\psi)\ d\mu(\psi) \ .$$

donde

$$\phi = \int_{B_{R'}} \psi\ B_e(\psi)\ d\mu(\psi) \ .$$

Supongamos ahora que ϕ es un punto extremal de $B_{R'}$ y que $B_{R'} = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son dos conjuntos μ-medibles, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Pongamos:

$$\phi_i = \int_{S_i} \psi\ B_e(\psi)\ d\mu(\psi) \qquad (i=1,2).$$

Se tiene:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \text{y} \quad ||\phi_i||_{R'} \leq \int_{S_i} |B_e(\psi)|\ d\mu(\psi) \ .$$

En efecto, $||\phi_i|| = \mu(S_i)$ ya que:

$$1 = ||\phi|| \leq ||\phi_1|| + ||\phi_2|| \leq ||B_e||_{L^1(\mu)} \leq ||B_e||_{L^{p'}(\mu)} \leq ||e|| = 1 .$$

De aquí: $1 = ||B_e||_{L^1} = ||B_e||_{L^{p'}}$, y de esto resulta que $|B_e(\psi)| = 1$ p.p - μ . (tener en cuenta que $p' > 1$).

Luego:

$$||\phi_i|| = \int_{S_i} |B_e(\psi)| \, d\mu(\psi) = \mu(S_i) .$$

De la hipótesis que ϕ es un punto extremal de $B_{R'}$, se sigue

$$\int_{S_i} \phi \, d\mu(\psi) = \int_{S_i} \psi \, B_e(\psi) \, d\mu(\psi) .$$

de donde:

$$\phi = \psi \, B_e(\psi) \qquad \text{p.p-}\mu .$$

Entonces:

$$<\phi,e> = <\phi,xy> = <\phi,e> \int_{B_{R'}} <\psi,y> B_x(\psi) \, d\mu(\psi) =$$

$$= \int_{B_{R'}} <\psi,e> B_e(\psi) <\psi,y> B_x(\psi) \, d\mu(\psi) =$$

$$= \int_{B_{R'}} <\psi,e><\phi,y> B_x(\psi) \, d\mu(\psi) = <\phi,x><\phi,y>.$$

De la misma forma: $|<\phi,xy>| = |<\phi,x>| \, |<\phi,y>|$,

y de aquí: $$|<\phi,x^n>| = |<\phi, x>|^n .$$

Esto implica que $||x||^n = ||x^n||$, de donde el radio espectral

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} = ||x|| \quad .$$

De acuerdo con un resultado de Charpentier [9] , R es conmutativo y siendo la transformada de Gelfand una isometría, R debe ser una algebra uniforme.

B I B L I O G R A F I A

[1] TONGE, A.: Sur les algebres de Banach et les opêrateurs p-sommants. Seminaire Maurey-Schwartz, 1975-1976, exposé N° XIII.

[2] PIETSCH, A.: Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Raumen. Studia Math. 28(1967), p. 333-353.

[3] -----------: Nukleare lokalkonvexe Raume, Berlín, 1965.

[4] LINDENSTRAUSS, J., PEŁCZYNSKI, A.: Absolutely summing operators in $_p$ - spaces and their applications. Studia Math. 29(1968), p. 275-326.

[5] PTAK, V.: On a theorem of Mazur and Orlicz. Studia Math. 15 (1956), p. 365-366.

[6] MAZUR, S.: ORLICZ, W.: Sur les espaces mêtriques linêaires (II), Studia Math. 13 (1953), p. 137-179.

[7] SIKORSKI, R.: On a theorem of Mazur and Orlicz. Studia Math. 13(1953), p. 180-182.

[8] BERGE, C.: Espaces topologiques. Dunod. 1966.

[9] CHARPENTIER, PH.: Q-algebres et produits tensoriels topologiques. These, Orsay (1973).

[10] DAVIE, A. M.: Quotient algebras of uniform algebras. Journal London Math. Soc. 7(1973), p. 31-40 .

[11] VAROPOULOS,N. TH.: On an inequality of von Neumann and an application of the theory of tensor products to operator theory. Journal of Functional Analysis, 16 (1974), 83-100.

[12] VAROPOULOS, N. TH.: A theorem on operator algebras. Math. Scandinavica, 37 (1975), p. 137-182 .

[13] TONGE, A.: Banach algebras and absolutely summing operators, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (por aparecer).

[14] LINDENSTRAUSS, J., ROSENTHAL, R. P.: The $\mathcal{L}_p$-spaces. Israel Journal of Math. 7 (1969), 325-349.

[15] BONSALL, F. F., DUNCAN, J.: Complete normed algebras. Springer, 1973.

[16] PEŁCZYNSKI, A.: A charecterization of Hilbert-Schmidt operators. Studia Math. 28 (1967), p. 335-360.

[17] GOHBERG, I. C., KREIN, M. G.: Introduction of the theory of linear nonselfadjoint operators. Vol. 18: Translations of AMS Monographs. 1969 ,

[18] LINDENSTRAUSS, J.: Extension of compact operators. Memoirs AMS 48 (1964).

[19] SCHATTEN, R.: Norm ideal of completely contnuous. Springer. 1960.

[20] KAIJSER, S.: Some remarks on injective Banach algebras. Uppsala University, Dept. Math. Report N° 10 (1975).

[21] CHEVET, S.: Sur certains products tensoriels topologiques d'espaces de Banach. Z. Wahr. Verw. Geb. 11 (1969).

[22] SAPHAR, P.: Products tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linâires. Studic Math. 38(1970), 71 - 100 .