ANTONIO TINEO

"UN TEOREMA DE INVERTIBILIDAD LOCAL"

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 10

"UN TEOREMA DE INVERTIBILIDAD LOCAL"

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

1977

0) INTRODUCCION:

El objeto de estas notas es dar condiciones suficientes para que un homeomorfismo local $f:P \to Q$, entre dos espacios métricos, sea un homeomorfismo. Las hipótesis serán de tipo "Lipschitziano"; en ese sentido introducimos la noción de homotopías Lipschitz y levantamiento de homotopías lipschitz.

1) Notaciones: Sean X, Y espacios métricos; una aplicación $f:X \to Y$ se dice lipschitz si existe una constante $M \geq 0$ tal que $d(f(x_1), f(x_2)) \leq M\, d(x_1,x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$. La constante M es llamada una constante de Lipschitz para f y la menor de tales constantes (que siempre existe) es denotada por $||f||$.

2) Definición: Una aplicación continua $f:X \to Y$ (entre espacios métricos) se dirá localmente invertible Lipschitz; abreviado L.I.L.; si

a) f es un homeomorfismo local.

b) Existe una constante $m > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe $r(x) > 0$ verificándose que

$d(f(x_1), f(x_2)) \geq m\, d(x_1,x_2)$ para todo $x_1,x_2 \in B(x, r(x))$

donde $B(x,r) = \{x' \in X : d(x,x') < r\}$.

En todo lo que sigue P y Q denotarán espacios métricos y $f:P \to Q$ será una aplicación L.I.L. La letra $m > 0$ denotará una constante verificando b) de la definición 2).

3) Proposición: Sea $J \subseteq R$ un intervalo y sea $\alpha : J \to P$ continua tal que $\beta = f_\circ \alpha$ es lipschitz, entonces α es lipschitz y

$m\,||\alpha|| \leq ||\beta||$.

DEMOSTRACION: Sean s, $t \in J$ con $s < t$, ya que $\alpha([s,t])$ es compacto existe $r = r(s,t) > 0$ tal que para todo $p \in \alpha([s,t])$ se tiene $d(f(p_1), f(p_2)) \geq m\, d(p_1, p_2)$ si $p_1, p_2 \in B(p,r)$. - Por otra parte podemos tomar una partición $s_\circ = s \quad s_1 < \ldots < s_n = t$ del intervalo $[s,t]$ de modo que $d(\alpha(s_i), \alpha(s_{i-1})) < r$ si $1 \leq i \leq n$. De aquí:

$$d(\alpha(s),\alpha(t)) \leq \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(s_i),\alpha(s_{i-1})) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} d(\beta(s_i), \beta(s_{i-1})) \leq$$

$$\leq \frac{||\beta||}{m} \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) = \frac{||\beta||}{m} (t - s).$$

lo cual termina la demostración.

4) Proposición: (Primer teorema de Levantamiento). Sea $\beta : [0,1] \to Q$ una aplicación Lipschitz tal que $\beta(0) = f(p_\circ)$ para algún $p_\circ \in P$. Si P es completo entonces existe una única aplicación continua $\alpha : [0,1] \to P$ tal que $\alpha(0) = p_\circ$ y $f \circ \alpha = \beta$.

DEMOSTRACION: Unicidad. Consecuencia directa del hecho que f es un homeomorfismo local y la conexidad de $[0,1]$.

Existencia; Ya que f es un homeomorfismo local existe un intervalo $J \subseteq [0,1]$ conteniendo $t = 0$ y existe una aplicación continua $\alpha : J \to P$ tal que $\alpha(0) = p_\circ$ y $f(\alpha(t)) = \beta(t)$ para todo $t \in J$. De la proposición 3 y la completitud de P se sigue que α admite una (única) prolongación continua $\overline{\alpha} : \overline{J} \to P$ ($\overline{J}$ = clausura de J) y el resultado se sigue rápidamente aplicando el Lema de Zorn. Esto termina la demostración.

5) Definición: Diremos que un espacio métrico X es L-conexo si para todo $x_\circ, x_1 \in X$ existe $\alpha : [0,1] \to X$ lipschitz tal que $\alpha(0) = x_\circ$, $\alpha(1) = x_1$.

6) Corolario: Si P es completo y Q es L-conexo entonces f es sobreyectiva.

DEMOSTRACION: Trivial.

7) Notaciones: Sea K un espacio topológico compacto y sea X un espacio métrico, entonces C(K,X) denotará el espacio de las funciones continuas de K en X provisto de la métrica uniforme $(d(\alpha_1, \alpha_2) = \sup \{d(\alpha_1(x),\alpha_2(x)) : x \in K\}, \alpha_1,\alpha_2 \in C(K,X))$. $C(S^1,X)$ denotará el subespacio (cerrado) de $C([0,1], X)$ formado por aquellos elementos α tales que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Note que X se identifica de manera natural al subespacio de $C(S^1,X)$ formado por las aplicaciones constantes.

8) Proposición: Sea K un espacio topológico compacto y definamos $f_* : C(K,P) \to C(K,Q)$ por $f_*(\alpha) = f_\circ \alpha$. Entonces f_* es L.I.L.

DEMOSTRACION: Es fácil verificar que f_* es continua. Sea $\alpha_\circ \in C(K,P)$; ya que K es compacto existe $r = r(\alpha) > 0$ tal que para todo $x \in K$ $d(f(p_1), f(p_2)) \geq m\, d(p_1,p_2)$ si $p_1, p_2 \in B(\alpha_\circ(x), r)$. De aquí se sigue fácilmente que

$d(f_*(\alpha_1), f_*(\alpha_2)) \geq m\, d(\alpha_1, \alpha_2)$ si $\alpha_1, \alpha_2 \in B(\alpha_\circ, r)$ (1)

lo cual prueba la parte b) de la definición 2).

Por otro lado, f es homeomorfismo local y por tanto, para todo $x \in K$ existe $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $0 < \varepsilon(x) \leq r/2$ tal que f aplica homeomorficamente $U_x = B(\alpha_\circ(x), \varepsilon(x))$ sobre un abierto V_x de Q. Denotemos por $f_x : U_x \to V_x$ el homeomorfismo obtenido de f por restricción y escojamos $x_1, \ldots, x_n \in K$ de modo que $\{U_i' = B(\alpha_\circ(x_i), \varepsilon(x_i)/2) \quad 1 \leq i \leq n\}$ sea un cubrimiento de $\alpha_\circ(K)$. Pongamos $U_i = U_{x_i}$, $V_i = V_{x_i}$, $f_i = f_{x_i}$, $W_i = \alpha_\circ^{-1}(U_i')$, $1 \leq i \leq n$. (Claramente $\{W_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es un cubrimiento de K).

Definamos

$$U = \{\alpha \in C(K,P) \mid \alpha(\overline{W}_i) \subseteq U_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

$$V = \{\beta \in C(K,Q) \quad (\overline{W}_i) \subseteq V_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

entonces U, V son abiertos de $C(K,P)$ y $C(K,Q)$ respectivamente; $\alpha_\circ \in U$ y $f_*(\alpha_\circ) \in V$. Para terminar la demostración probaremos que f_* aplica U homeomorficamente sobre V.

Sea $\beta \in V$ y sea $x \in \overline{W}_i \cap \overline{W}_j$, entonces $\alpha_\circ(x) \in U_i \cap U_j$. Pongamos $p_1 = f_i^{-1}(\beta(x)) \in U_i$, $p_2 = f_j^{-1}(\beta(x)) \in U_j$, entonces -

$f(p_1) = f(p_2)$; $d(p_1, \alpha_\circ(x)) \leq d(p_1, \alpha_\circ(x_i)) + d(\alpha_\circ(x_i), \alpha_\circ(x)) <$ $< \varepsilon(x_i) + \varepsilon(x_i) \leq r$ y $d(p_2, \alpha_\circ(x)) < r$. De aquí $0 = d(f(p_1), f(p_2)) \geq m\, d(p_1, p_2)$, lo cual dice que $p_1 = p_2$. En consecuencia la aplicación $\alpha : K \to P$ definida por $\alpha(x) = f_i^{-1}(\beta(x))$ si $x \in \overline{W}_i$ está bien definida, es continua y satisface $f_*(\alpha) = \beta$. Además si $x \in \overline{W}_i$ entonces $\beta(x) \in V_i$ y por tanto $\alpha(x) \in U_i$, lo cual dice que $\alpha \in U$. Hemos probado entonces que $V \subseteq f_*(U)$; pero es trivial verificar que $f_*(U) \subseteq V$ de modo que f_* aplica U sobre V.

Finalmente si $\alpha \in U$ y $x \in \overline{W}_i$ entonces $d(\alpha(x), \alpha_\circ(x)) \leq$ $\leq d(\alpha(x), \alpha_\circ(x_i)) + d(\alpha_\circ(x_i), \alpha_\circ(x) < r$; lo cual dice que $U \subseteq B(\alpha_\circ, r)$ y el resultado se sigue fácilmente de (1). Esto termina la demostración.

9) <u>Definición</u>: Sea K un espacio topológico compacto. Diremos que $H : K \times [0,1] \to X$ (X espacio métrico) es una homotopía lipschitz si H es continua y existe una constante $M \geq 0$ tal que $d(H(x,t), H(x,s)) \leq M\, [\, t - s\,]$ para todo $x \in K$, para todo $s,t \in [0,1]$. Esto equivale a decir que la aplicación $[0,1] \to C(K,X)$, $t \to H(.,t)$ es lipschitz.

10) <u>Corolario:</u> (Segundo Teorema de Levantamiento). Sea K un espacio topológico compacto y $H : K \times [0,1] \to Q$ una homotopía lipschitz tal que $H(x,0) = f(\alpha(x))$ para alguna $\alpha \in C(K,P)$. Si P es completo entonces existe una única homotopía lipschitz

$G : K \times [0,1] \to P$ tal que $G(x,0) = \alpha(x)$ $(x \in K)$ y $f_\circ G = H$.

DEMOSTRACION: Consecuencia directa de 10), 9) y 4).

11) Teorema: Si P es arco-conexo completo y si $C(S^1,Q)$ es L-conexo entonces f es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION: Ya que f es homeomorfismo local bastará probar que f es biyectiva. Ahora, Q es L-conexo por ser $C(S^1,Q)$ L-conexo y en consecuencia f es sobreyectiva. Sean $p_\circ, p_1 \in P$ tales que $f(p_\circ) = f(p_1)$ y sea $\alpha : [0,1] \to P$ tal que $\alpha(0)=p_\circ$, $\alpha(1) = p_1$, definamos $\beta_\circ, \beta_1 : [0,1] \to Q$ por $\beta_\circ(t)=f(\alpha_\circ(t))$, $\beta_1(t) = f(p_1)$ para todo $t \in [0,1]$. Ya que $C(S^1,Q)$ es L-conexo existe una homotopía lipschitz $H : |0,i| \times |0,1| \to Q$ tal que $H(t,i) = \beta_i(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $i = 0,1$; $H(0,t) = H(1,t)$ $0 \leq t \leq 1$. Por 10) existe una homotopía lipschitz $G : [0,1] \times [0,1] \to P$ tal que $G(t,0) = \alpha_\circ(t)$, $0 \leq t \leq 1$ y $f_\circ G = H$. Ya que $H(t,1)$ es constante y f es homeomorfismo local se sigue que $G(t,1)$ es constante; en particular $G(0,1) = G(1,1)$. Pongamos

$$J = \{t \in |0,1| : G(0,t) = G(1,t)\}$$

entonces J es cerrado y no vacío. Además J es abierto en $[0,1]$ por ser f homeomorfismo local y por que $f\,G(0,t) = f\,G(1,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$; de aquí $J = [0,1]$ y en consecuencia $p_\circ = G(0,0) = G(1,0) = p_1$ lo cual termina la demostración.

12) Corolario: Sean F,G espacios de Banach y sea $f : E \to F$ una aplicación de clase C^K $(K \geq 1)$ tal que la diferencial

$Df|_p$ (de f en $p \in E$) es no singular para todo $p \in E$. Si - existe $m > 0$ tal que $\|(Df|_p)^{-1}\| \leq m$ para todo $p \in E$ entonces f es un difeomorfismo de clase C^K.

DEMOSTRACION: Consecuencia directa de 11); por que E es - arco-conexo completo y $C(S^1, F)$ es L-conexo.

13) NOTA: La definición 5) puede ser generalizada como sigue: - Se dice que X es L-conexo por trozos si para todo $x_o, x_1 \in X$ existe $\alpha : [0,1] \to X$ continua tal que: (i) $\alpha(0) = x_o$, $\alpha(1) = x_1$ (ii) Existe una partición $t_o = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que la restricción de α a $[t_{i-1}, t_i]$ es lipschitz $1 \leq i \leq n$. Entonces los resultados de 6) y 11) permanecen válidos.

B I B L I O G R A F I A

[1] DIEUDONNE J. "Foundations of Modern Analysis", Academic Press. 1960.

[2] KELLY J. "Topología General", Eudeba 1962.

[3] SPANIER E. "Algebraic Topology", McGraw-Hill, Book Company. 1966.

AT/codea