NOTAS DE MATEMATICA

Nº 151

SOBRE LA CONTINUIDAD DE LA PROYECCION METRICA

POR

JOSE R. MORALES

PREPRINT

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1995

SOBRE LA CONTINUIDAD DE LA PROYECCIÓN MÉTRICA.

José R. Morales*
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Análisis Funcional
Mérida, Venezuela

Resumen

En esta nota mostraremos que la proyección métrica asociada a subespacios de Chebyshev en espacios de Banach que poseen la propiedad (ωM) es una aplicación continua.

1

Iniciaremos el desarrollo del presente artículo dando a conocer la notación que usaremos y recordando ciertas definiciones y propiedades.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Por $S_E(B_E)$ denotamos la esfera unitaria (bola unitaria) de E, respectivamente.
Sea F un subconjunto no - vacio de E. Para cualquier $x \in E$ definimos por

$$d(x, F) = \inf\{\|x-y\|/y \in F\}$$

*Este trabajo fue financiado por el Proyecto CDCHT - C - 551 - 92

la distancia de x a F.

Para cada $x \in E$, decimos que el punto $y_o \in F$ es un punto de mejor aproximación (punto cercano) a x desde F si,

$$d(x, F) = \|x - y_o\|.$$

Un subconjunto F de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice que es un Conjunto de Chebyshev si para cada $x \in E$ existe un único punto de mejor aproximación a x desde F.
Uno de los problemas en la teoria de los puntos cercanos es probar la Convexidad de un conjunto de Chebyshev en un espacio de Hilbert y caracterizar aquellos espacios de Banach en los cuales todo conjunto de Chebyshev es un Conjunto Convexo. Una de las formas de atacar tal problema es usando la proyección métrica sobre un espacio de Chebyshev.
Para cada subconjunto F de E y $x \in E$ definimos

$$P_F(x) = \{y \in F | d(x, F) = \|x - y\|\},$$

y constituye el conjunto de todos los puntos cercanos ó de mejor aproximación a x desde F. Es claro, que $P_F(x)$ es un subconjunto cerrado, acotado, puede ser vacío y $P_F(x)$ es Convexo si F lo es.
P_F, es una función multivaluada de E en F,

$$\begin{aligned} P_F : \quad E &\longrightarrow 2^F \\ x &\longmapsto P_F(x) \end{aligned}$$

P_F, es llamada la proyección métrica sobre F, cuando F es un conjunto de Chebyshev, entonces $P_F(x)$ es una función univaluada de E sobre F, algunas veces conocida como la aplicación Chebyshev, el operador de mejor aproximación ó la función proximidad.

El siguiente resultado nos muestra algunas de las propiedades que posee la P_F; para una prueba ver [3] y [4].

Lema 1.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $F \subseteq E$ un subespacio de Chebyshev. Entonces,*

1. *P_F, es una aplicación Idempotente y tiene gráfico cerrado.*

2. *Para todo $x \in E$, se tiene*

$$\|P_F(x)\| \leq \|x - P_F(x)\| + \|x\| \leq 2\|x\|.$$

3. *P_F, es homógenea, esto es, para cada $x \in E$ y $\lambda \in I\!R$*

$$P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x).$$

4. *P_F es aditiva módulo F, esto es,*

$$P_F(x+y) = P_F(x) + P_F(y) \ \ si\ x \in F \ \ ó\ y \in F,$$

   por lo tanto, en general P_F no es lineal.

5. *P_F, esta caracterizada por el siguiente hecho: Para cada $x \in E$,*

$$\|x - P_F(x)\| = d(x, F) = \|x + F\|.$$

Es importante señalar que existen proyecciones métricas que no son aplicaciones continuas. En este sentido tenemos que el primer ejemplo de una proyección métrica discontinua fué dado por J. Lindeustrauss, ver [4]. Otro ejemplo fue dado por R. Holmes y B. Kripke [12] quienes construyeron un espacio de Banach estrictamente Convexo, no reflexivo que posee un subespacio lineal de codimensión 2 cuya proyección métrica es discontinua.
Para otros ejemplos de proyecciones métricas discontinuas ver [1] y [4].
Por otra parte, tenemos que son ampliamente conocidas las condiciones bajo las cuales la proyección métrica es una aplicación continua. En este sentido es importante recordar el siguiente resultado,

Lema 1.2 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y F un subespacio de Chebyshev de E. Entonces, si:*

1. *F es localmente Compacto; ó*

2. *F es $dim(F) < \infty$; ó*

3. *E es Uniformemente Convexo; ó*

4. *E es un espacio reflexivo, estrictamente Convexo y posee la propiedad (H); ó*

5. *E es un espacio $L2-UR$; ó*

6. *E es un espacio $Lk-UR$.*

entonces, la aplicación P_F es continua.

Para la prueba de este resultado y sus respectivas definiciones ver [9], [10], y [11].

En [3] y [9] encontramos ciertos resultados que nos muestran que la continuidad de la proyección métrica puede ser usada para demostrar la convexidad de conjuntos de Chebyshev.

En la próxima sección generalizamos los resultados del lema [1.2] (4) y (5), los cuales fuerón dados por F. Sullivan [10] y Yu Xintai [11] respectivamente.

2 Resultado Principal.

Esta sección la comenzamos dando la definición de la propiedad ωM introducida por el autor en [8] que generaliza la propiedad $(k-M)$, ver [7].

Definición 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Decimos que E posee la propiedad (ωM) si para cada $x \in S_E$ y $(x_n) \subseteq B_E$ tales que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1, \quad \textit{para todo } k \in I\!N$$

entonces (x_n) es compacto en B_E.

Ahora, pasamos a dar nuestro principal resultado.

Teorema 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $F \subseteq E$ un subespacio de Chebyshev. Si E posee la propiedad ωM entonces la proyección métrica P_F es una aplicación continua.*

Prueba:
Sean $x \in E$ y $(x_n) \subset E$ tales que $x_n \to x$.

Caso 1:
Si $x \in F$ entonces $P_F(x) = x$ y por tanto se cumple que,

$$\|P_F(x) - P_F(x_n)\| = \|x - P_F(x_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|P_F(x_n) - x_n\|$$

$$\leq \|x - x_n\| + d(x_n, F) \leq 2\|x - x_n\| \to 0, \ n \to \infty,$$

así, $P_F(x_n) \to P_F(x)$,lo cual nos muestra que P_F es una aplicación continua.

Caso 2:
Si $x \notin F$ entonces $d(x, F) > 0$. Sean

$$\tilde{x}_n = \frac{x_n - P_F(x)}{\|x_n - P_F(x)\|} \ ; \quad \tilde{x}_n = \frac{x - P_F(x)}{\|x - P_F(x)\|}$$

entonces, $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$, y además se cumple que,

$$P_F(x_n) \to P_F(x) \Longleftrightarrow P_F(\tilde{x}_n) \to P_F(\tilde{x}) = 0;$$

Por tanto podemos asumir que $x \in S_E$, $P_F(x) = 0$, y así únicamente debemos mostrar que $P_F(x_n) \to 0$, pues en caso contrario, es decir, si $P_F(x_n) \to m \neq 0$ entonces tendríamos

$$\|x\| = \|x - P_F(x)\| \leq \|x - m\| \leq \lim_{n \to \infty} \|x_n - P_F(x_n)\|$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

así, $\|x\| = \|x - m\|$ y por la unicidad del punto cercano, $m = 0$.

Ahora, supóngamos que $P_F(x_n) \not\to 0$, entonces existe una subsucesión $\{P_F(x_{n_i})\}$ de $\{P_F(x_n)\}$, la cual sin pérdida de generalidad la podemos tomar como $\{P_F(x_n)\}$, tal que para algún $\varepsilon_o > 0$ se tiene

$$\|P_F(x_n) - P_F(x_m)\| > \varepsilon_o, \qquad (*).$$

Como,

$$\|x\| \leq \|x - P_F(x_n)\| \leq \|x_n - P_F(x_n)\| + \|x - x_n\| \leq \|x_n\| + \|x_n - x\|,$$

luego,

$$1 = \|x\| = \lim_{n \to \infty} \|x - P_F(x_n)\|$$

y de acá fácilmente se puede obtener

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \left\| x + \left(x - \sum_{i=1}^{k} P_F(x_{n_i}) \right) \right\| = k + 1, \ \forall k \in I\!N$$

y como E satisface la propiedad ωM entonces $\{x - P_F(x_n)\}$ es compacto en B_E, y por tanto tiene una subsucesión convergente lo cual contradice a $(*)$ y así tenemos que $P_F(x_n) \to 0$, y esto nos muestra que P_F, es una aplicación continua.

$\square$

El siguiente resultado nos muestra la generalización anteriormente anunciada.

Corolario 2.1 *sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $F \subset E$ un subespacio de Chebyshev. Entonces, si:*

1. *E es un espacio $LNUC$; ó*
2. *E es un espacio $L\omega UC$; ó*
3. *E es un espacio $L\omega R$*

entonces, P_F es una aplicación continua.

Prueba:
En [5] se muestra que $L\omega UR \Longrightarrow LNUC$ y en [6] mostramos que

$$LNUC \Longrightarrow Propiedad(\omega M).$$

Además, en [7] mostramos que $L - kR \Longrightarrow Propiedad(k - M)$, pero esta afirmación es cierta para todo $k \in I\!N$ por tanto se cumple que $L\omega R \Longrightarrow Propiedad(\omega M)$.
Así, tenemos que en cualquiera de los tres casos se cumple que la proyección métrica P_F es una aplicación continua.

$\square$

Agradecimientos;

Doy mis más expresivas gracias al Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Bratislava - Slovakia por su colaboración prestada durante mi estadia en el Instituto y en especial al Profesor I. Dobrakov por sus atenciones para con el autor.

Referencias

[1] A. L. Brown.
A Rotund reflexive space having a subspace of Codimension two with a discontinous metric Proyection. Mich. Math. J. 21, (1974), 145 - 151.

[2] S. Fitz Patrick.
Metric Proyections and the diffentiability of distance functions. Bull. Austral. Math. Soc 22, (1980), 291 - 312.

[3] J. R. Giles.
Convex analysis with application in differentiation of Convex functions. Pitman Research Notes in Mathematics 58, 1982.

[4] R. Holmes.
A Course on optimization and Best approximation. Lecture Notes in Math, 257, springer - verlag.

[5] Bor - Luh Lin - W. Zhang.
Some geometric Properties related to Uniform Convexity of Banach Spaces. Functions spaces, Lecture Notes in Pure and appl. Math. Marcel Decker. 136, (1991), 281 - 294.

[6] J. R. Morales.
La Propiedad $(k - M)$ en espacios de Banach. Notas de Matemáticas ULA - 118 - (1992).

[7] J. R. Morales.
Sobre los espacios $k - M$ Revista Colombiana de Matemáticas XXVI, (1992), 115 - 120.

[8] J. R. Morales.
Una nota sobre los espacios $L\omega R$. Por aparecer.

[9] T. D. Narang.
Convexity of Chebyshev Sets Nic. Arc. V. W. 3, XXV, (1977), 377 - 402.

[10] F. Sullivan.
A generalization of Uniformly rotund Banach spaces. Can. J. Math. 31, (1979), 628 - 636.

[11] Yu Xintai.
On $LkUR$ Spaces. Chin. Ann of Math. 6B(4), (1985), 465 - 469.

[12] R. Holmes - B. Kripke.
Smoothness of approximation, Michigan Math. J. 15, (1968), 225 - 248.