NOTAS DE MATEMATICAS

N- 147

ALGUNAS PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS ESPACIOS DE BANACH

BY

JOSE R. MORALES

PREPRINT

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1994

ALGUNAS PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS ESPACIOS DE BANACH.

José R. Morales*
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Análisis Funcional
Mérida, Venezuela

Resumen

En esta nota daremos un breve resumen de algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach.

Iniciaremos este trabajo dando a conocer la notación que usaremos.
Por $(E, \|\cdot\|)$ denotamos un espacio de Banach, por $S_E = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ y $B_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ denotamos la esfera unitaria y la bola unitaria de E, respectivamente.

En el año de 1936, J. A. Clarkson [1] introdujo la noción de espacio Uniformemente Convexo en la forma siguiente,

Definición 1 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice Uniformemente Convexo,((UR), Uniformemente Rotundo), si para cada ε, $0 < \varepsilon \leq 2$, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que las condiciones*

$$x, y \in S_E, \|x - y\| \geq \varepsilon \qquad \textit{implican} \qquad \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

*Este trabajo fue financiado por el Proyecto CDCHT - C - 551 - 92

Esta propiedad puede ser expresada en términos geométricos como sigue: el punto medio de una cuerda variable de la esfera unitaria del espacio no puede aproximarse a la superficie de la esfera a menos que la longitud de la cuerda tienda a cero.
Clarkson, además de dar la definición de espacio (UR) mostró que todo espacio (UR) satisface la propiedad de Radon - Nikodym, estableció las famosas desigualdades de Clarkson para probar que los espacios L^p y ℓ_p, $1 < p < \infty$, son (UR), observó que el espacio ℓ_1 satisface la propiedad de Radon - Nikodym.
Los espacios de Banach Uniformemente Convexo han sido ampliamente estudiados y por tanto existe una gran cantidad de caracterizaciones de los espacios (UR), ver [4], [8], [20]. Así,tenemos que los espacios (UR) pueden ser caracterizados en términos secuenciales:

> *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio (UR) si y sólo si, para todas las sucesiones (x_n), $(y_n) \subset S_E$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n+y_n\| = 2$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

Otra forma de caracterizar los espacios (UR) es usando el módulo de Convexidad Uniforme Definido por M. M. Day [2] en 1944.

Este módulo de convexidad surge al considerar en la definición de espacio (UR) el mejor δ para cada $\varepsilon > 0$ dado.

Definición 2 *Se define el módulo de Convexidad Uniforme de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ a la función, $\delta_E : [0,2] \to [0,1]$ dada por*

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} \ : \ x, y \in S_E, \ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Con ésta definición tenemos que,

> *un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es (UR) si y sólo si, $\delta_E(E) > 0$, para todo $0 < \varepsilon \leq 2$.*

La siguiente noción, los espacios de Banach estrictamente convexos y su referencia más antigua se encuentra en el trabajo de Clarkson [1], quién mostró que todo espacio de Banach Separable admite una norma equivalente estrictamente convexa y que ésta propiedad no implica la propiedad de Radon -

Nikodym; aún cuando V. I. Istratesco [8], señala que los espacios estrictamente Convexos fuerón definidos independientemente por Clarkson y M. G. Krein.

Ahora, pasamos a definir los espacios estrictamente Convexos.

Definición 3 *Un espacio de Banach* $(E, \|\cdot\|)$ *se dice que es estrictamente Convexo ((R), Rotundo), si para todo,* $x, y \in S_E$ *y* $\|x + y\| = 2$ *entonces* $x = y$.

En forma geométrica, ésta definición nos dice que la esfera unitaria del espacio no tiene segmentos lineales.
Los espacios estrictamente Convexos los podemos caracterizar usando el módulo de Convexidad Uniforme como sigue,

$$\text{Un espacio de Banach } (E, \|\cdot\|) \text{ es } (R), \text{ si y sólo si } \delta_E(2) = 1.$$

La relación existente entre los espacios (UR) y los espacios (R) esta dada por

$$(UR) \Longrightarrow (R).$$

A continuación pasamos a dar algunos ejemplos, de espacios de Banach que satisfacen las dos propiedades definidas anteriormente.

Ejemplo 1:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclidiana, es un espacio (UR) y por tanto tambien es (R).
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, donde $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ no es (R) y así tampoco es (UR).

Ejemplo 2:

Los espacios $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$ definidos por,

$$\ell_p = \left\{ (x_n) / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad y \quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Se tiene que para $1 < p < \infty$ $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach (UR) y por ende (R). Si $p = 1$, entonces $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach que no es Estrictamente Convexo, pero como $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach separable usando el teorema 9 del trabajo de Clarkson [1] se tiene que existe una norma equivalente $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_1$ tal que $(\ell_1, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach Estritacmente Convexo. Finalmente, si $p = \infty$, entonces $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach que no es (R).

El siguiente ejemplo nos muestra que existen espacios de Banach (R) que no son (UR). Con este fin debemos recordar que Milman y Petit, en forma independiente mostrarón que si E es (UR) entonces E es un espacio reflexivo, ver [4].

Ejemplo 3:

Existe un espacio de Banach Estrictamente Convexo que no es Uniformemente Convexo.
Con éste fin consideremos el ejemplo construido por J. Lindenstrauss - L. Tzafriri [9].

Sea $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$, donde

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}\{|f(t)|\},$$

y consideremos la norma $\|\cdot\|$ sobre $C_{[0,1]}$ definida por

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_2, \quad f \in C_{[0,1]},$$

donde

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

Entonces, $\|\cdot\|$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ en $C_{[0,1]}$. No es difícil probar que $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ es un espacio Estrictamente Convexo pero no es (UR), puesto que $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ no es un espacio reflexivo , asi

$$(R) \not\Longrightarrow (UR).$$

Ahora, vamos a dar algunas generalizaciones de los espacios (UR).

En 1955, aparecen dos generalizaciones de los espacios (UR), una de ellas es de carácter local, los espacios Localmente Uniformemente Convexos introducidos por A.R. Lovaglia [10], y la otra generalización es de carácter uniforme, los espacios kR definidos por K. Fan - I. Glicksbery [6].

Definición 4 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice Localmente Uniformemente Convexo, si dados $x \in S_E$ y $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que para todo*

$$y \in S_E \text{ y } \|x - y\| \geq \varepsilon \qquad \textit{entonces} \qquad \|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta(\varepsilon, x).$$

Geométricamente, esta noción difiere de los espacios (UR) en que se requiere que uno de los puntos finales de la cuerda variable permanezca fijo. Es claro que

$$(UR) \Longrightarrow (LUR) \Longrightarrow (R).$$

Los espacios (LUR) pueden ser caracterizados en términos secuenciales:

> *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice que es (LUR), si y sólo si para todo $x \in S_E$ y $(x_n) \subset S_E$ tales que*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2 \qquad \textit{entonces} \qquad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Los espacios (LUR) también pueden ser caracterizados usando el módulo de convexidad local dado por,

Definición 5 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $x \in S_E$. El módulo de convexidad local en x de E es la función $\delta_E(\varepsilon, x) : [0, 2] \to [0, 1]$ dada por*

$$\delta_E(\varepsilon, x) = \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : y \in S_E, \|x - y\| \geq \varepsilon\}.$$

Ahora tenemos que,

> *un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es (LUR) si y sólo si $\delta_E(\varepsilon, x) > 0$ para todo $x \in S_E$ y $0 < \varepsilon \leq 2$.*

Ahora pasamos a dar algunos ejemplos.

Ejemplo 4:

Existe un espacio de Banach (R) que no es (LUR).
Consideremos el ejemplo dado por A. R. Lovaglia [10]. Sea nuevamente el espacio $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$. Sea (t_n) una sucesión densa en $[0,1]$ que no incluye el cero.
Se define una norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ en $C_{[0,1]}$ por,

$$|||f||| = \left[\|f\|_\infty^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} |f(t_n)|^2\right]^{1/2} \text{ para toda } f \in C_{[0,1]}.$$

Clarkson [1] mostró que $(C_{[0,1]}, |||\cdot|||)$ es un espacio (R) y Lovaglia probó que tal espacio no es (LUR). Así, tenemos que

$$(R) \not\Longrightarrow (LUR).$$

Definición 6 *Sea $k \geq 2$ un entero. Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice que es kR (Fully Convexo) si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k$$

entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy en E.

Esta definición extiende la noción introducida en 1939 por V. L. Smulyan, los espacios $2R$.

Más tarde, en 1991 Bor - Luh Lin - Wenyao Zhany [11] generalizarón la definición anterior e introdujerón los espacios ωR como sigue,

Definición 7 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio ωR si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

entonces (x_n) es convergente en E.

El siguiente resultado nos muestra la relación existente entre las distintas propiedades geométricas de los espacios de Banach:

$$
\begin{array}{c}
(UR) \Rightarrow 2R \Rightarrow \ldots \Rightarrow kR \Rightarrow (k+1)R \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega R \Rightarrow \text{reflexividad} \\
\hphantom{(UR) \Rightarrow 2R \Rightarrow \ldots \Rightarrow kR \Rightarrow (k+1)R \Rightarrow \ldots \Rightarrow} \Downarrow \hphantom{\Rightarrow \text{reflexividad}} \\
\hphantom{(UR) \Rightarrow 2R \Rightarrow \ldots \Rightarrow kR \Rightarrow (k+1)R \Rightarrow \ldots \Rightarrow} (R) \hphantom{\Rightarrow \text{reflexividad}}
\end{array}
$$

Ejemplo 8:
Existe un espacio de Banach (R) que no es ωR.
Con este fin usaremos el ejemplo 3.
Recordemos que $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ es un espacio Estrictamente Convexo donde $\|\cdot\|$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, pero no es reflexivo y por lo tanto $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ no es un espacio (ωR). Así,

$$(R) \not\Longrightarrow (\omega R).$$

Ejemplo 9:
Existe un espacio de Banach (ωR) que no es (UR).
Consideremos el ejemplo dado por T. Polak - B. Sins [16], que es una modificación a un ejemplo de M. A. Smith [18].
Sea $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, para un $x = (x^1, x^2, \ldots,) \in \ell_2$ sea $Px = (0, x^2, x^3, \ldots)$ y se define en ℓ_2 la siguiente norma,

$$\|x\|_F = |x'| + \|Px\|_2$$

que satisface,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_F \leq 2\|x\|_2$$

y por ende $\|x\|_F$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2.

Ahora, sea $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ una aplicación lineal continua definida por

$$Tx = \left(0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

Para cada $x \in \ell_2$ se define la siguiente norma,

$$\|x\|_A = \left(\|x\|_F^2 + \|Tx\|_2^2\right)^{1/2}$$

que es equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2.

No es dificil mostrar que el espacio $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ no es (UR), pero en [19] se mostró que $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ es un espacio $(2R)$ y por tanto es un espacio (ωR). Así, tenemos que

$$(\omega R) \not\Longrightarrow (UR).$$

En 1988, Nan - Chao Xun y Wan - Jian - Hun [14] localizan los espacios kR e introducen los espacios LkR pero Bur - Luhlin y W. Zhang [11] generalizan esta noción y definen los espacios $(L\omega R)$.

Definición 8 *Sea $k \geq 1$ un entero. Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice que es un espacio LkR si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k + 1$$

entonces $x_n \to x$.

Observese que si $k = 1$, entonces E es un espacio $L1R$ si y sólo si para cada $x \in S_E$ y toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Por lo tanto tenemos que

$$L1R \text{ coincide con } LUR.$$

Definición 9 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio $L\omega R$ si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ y todo $x \in S_E$ tales que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k + 1 \ \textit{para todo } k \in \mathbb{N}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Ahora tenemos la siguiente relación

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
LUR \Leftrightarrow & L1R & \Rightarrow & L2R & \Rightarrow \cdots \Rightarrow & LkR & \Rightarrow & L(k+1)R & \Rightarrow \cdots \Rightarrow & L\omega R & \searrow & \\
& \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \mathbb{R} \\
& UR & \Rightarrow & 2R & \Rightarrow \cdots \Rightarrow & kR & \Rightarrow & (k+1)R & \Rightarrow \cdots \Rightarrow & \omega R & \nearrow &
\end{array}$$

Ejemplo 10:
Existe un espacio de Banach $(L\omega R)$ que no es (LUR). En el ejemplo 9, vimos que $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ es un espacio (ωR) y por tanto $L\omega R$, pero no es difícil mostrar que $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ es un espacio no LUR, por tanto

$$(L\omega R) \not\Longrightarrow LUR$$

Ejemplo 11:
Existe un espacio de Banach $L\omega R$ que no es ωR.

Consideremos el ejemplo dado por M. A. Smith [18]. Sea $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$. Para $x = (x^j) \in \ell_2$, se define la siguiente norma,

$$\|x\| = \max\left\{\sup_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \left(|x^i| + |x^j|\right),\ \|x\|_2\right\}$$

la cual satisface la siguiente condición

$$\|x\|_2 \leq \|x\| \leq 2\|x\|_2$$

por tanto $\|\cdot\|$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2.
Para $k \geq 1$ entero, sea $R_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k e_k$, donde $\{e_k\}$ denota la base usual de ℓ_2.
Ahora, definimos en ℓ_2 la siguiente norma,

$$|||x|||_M = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|R_k x\|y$$

$|||\cdot|||$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2.
Finalmente, para $x = (x^j)$ en ℓ_2 se define la siguiente norma $\|\cdot\|_M$ equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2,

$$\|x\|_M = \left(|||x|||^2 + J^2(x)\right)^{1/2}$$

donde

$$J^2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x^j|^2.$$

Smith [18] mostró que el espacio $(\ell_2, \|\cdot\|_M)$ es un espacio (LUR) y por tanto $(\ell_2, \|\cdot\|_M)$ es un espacio $L\omega R$, por otra parte Smith probó que el espacio

$(\ell_2, \|\cdot\|_M)$ no es $(2R)$ y en forma similar se puede mostrar que no es un espacio (ωR), por tanto,

$$(L\omega R) \not\Longrightarrow (\omega R).$$

En el año de 1967, L. P. Vlasov [22] introduce los espacios $(CLUR)$ que evidentemente generalizan los espacios (LUR), pero en el año 1975, B. B. Panda - O. P. Kapoor [15] de manera independiente definen y estudian los espacios que poseen la propiedad (M) y estas dos propiedades son coincidentes.

Definición 10 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice que posee la propiedad (M) (ó $CLUR$) si para todo $x \in S_E$ y $(x_n) \subset B_E$ tales que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$ entonces (x_n) es compacto en B_E.*

En [15] se observa que

$$(LUR) \Longleftrightarrow (R) + \text{Propiedad } (M).$$

El autor en [12] generaliza la propiedad (M) e introduce los espacios de Banach que tienen la propiedad $(k - M)$.

Definición 11 *Sea $k \geq 1$ un entero. Decimos que el espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ satisfave la propiedad $(k - M)$ si para todo $x \in S_E$ y $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k + 1$$

entonces (x_n) es compacto en B_E.

Observese, que si $k = 1$ entonces un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ posee la propiedad $(1 - M)$, si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$, entonces (x_n) es compacto en B_E. Por tanto,

$$\text{Propiedad } (M) \Longleftrightarrow \text{Propiedad } (1 - M),$$

y además,

$$\text{Para } k \geq 1,\ LkR \Longleftrightarrow (R) + \text{Propiedad } (k - M).$$

Recientemente, el autor en [13] generaliza la propiedad $(k-M)$ e introduce la propiedad (ωM)

Definición 12 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice que satisface la propiedad (ωM) si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1, \quad \textit{para todo } k \in I\!N$$

entonces (x_n) es compacto en B_E.

$$\begin{array}{rl} \text{Propiedad } (M) \Leftrightarrow & \text{Propiedad } (1-M) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{Propiedad } (k-M) \\ & \hfill \Downarrow \\ & \text{Propiedad } (\omega M) \Leftarrow \ldots \Leftarrow \text{Propiedad } ((k+1)M) \end{array}$$

Además,

$$L\omega R \Longleftrightarrow (R) + \text{ Propiedad } (\omega M).$$

Nota final:

Este trabajo fué preparado durante mi estadía en el área de Postgrado - Universidad de Carabobo - Con el fin de dictar una charla sobre algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach, a profesores y estudiantes de la licenciatura en educación mención matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, (FACE) de la Universidad de Carabobo.
Muchas gracias a todas aquellas personas que de una u otra forma colaborarón por hacer plancenteroa mi estudio en la U.C.

Referencias

[1] J. A. Clarkson,
Uniformly Convex Spaces. Trans. Amer. Math Soc. 40, (1936), 396 - 414.

[2] M. M. Day,
Uniform Convexity in factor and Conjugate Space. Ann. of Math. (2), 45, (1944), 375 - 385.

[3] M. M. Day,
Strict Convexity and Smoothness of normed spaces. Trans. Amer. math. Soc. 78, (1955), 516 - 528.

[4] J. Diestel,
Geometry of Banach Spaces, selected topics. Lprecture Notes in Math - 485 - springer verlay.

[5] J. Diestel,
Sequences and Series in Banach Spaces - Graduate Texts in Math. - Springer verlag.

[6] K. Fan - I. Glicksberg,
Fully Convex normed linear spaces. Proc. Nat. A Cad. SC. USA, 41, (1955), 947 - 953.

[7] T. Figiel,
On moduli of Convexity and Smoothness. Studia Math. 56, (1976), 121 - 155.

[8] V. I. Istratescu,
Strict Convexity and Complex Strict Convexity. Marcel C.

[9] J. Lindenstrauss. - L. Tzafriti,
Clasical Banach Spaces II. Springer Verlay.

[10] A. R. Lovaglia,
Locally Uniformly Convex Banach Spaces. Trans. AMS, 78, (1955), 255 - 238.

[11] Bor - Luh Lin - Wenyao Zhany,
Some Geometric Properties related to Uniform Convexity of Banach Spaces. Functions Spaces Lecture Notes in Pure and appl. Math. Marcel Dekker, 136, (1991) 281 -294.

[12] J. R. Morales,
Sobre los espacios LkR, notas de Matemáticas - ULA - 105.

[13] J. R. Morales,
Una nota sobre los Espacios $L\omega R$. Por aparecer.

[14] Nan - Chao Xun - Wan - Jian Hua,
On the $Lk - UR$ and LkR spaces Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 104, (1988), 521 - 526.

[15] B. B. Panda - O. P. Kapoor,
A generalization of Local Unifon Convexity of the norm. J. Math Ann - Appl. 52, (1975), 300 - 308.

[16] T. Polak - B. Sins,
A banach Soaces Whichis fully, 2 - rotund but no locally Uniforn Rotund, Canad Mat Bull. 26, (1983), 118 - 120.

[17] J. Rainwater,
Local Uniform Convexity of DAy's Norm on $c_o(M)$. Proc AMS, 22, (1969), 335 - 339.

[18] M. A. Smith,
Some examples concerning Rotundity in Banach Spaces. Math Ann, 233, (1978), 155 - 161.

[19] M.A. Smith,
A reflexive Banach Spaces that is LUR and not $2R$, Can. Math, Bull. 21, (1978), 628 - 636.

[20] A. Ullán,
Modulos de Convexidad y Lisura en espacios Normados. Matematicas - Universidad de Extremaclura - España.

[21] L. P. Vlasov,
Chebyshev Sets and approximately Convex Sets, Mathzam. 2, (1967), 191 - 200.

[22] L. P. Vlasov,
Aproximative Properties of Sets in normed linear spaces. Russian Math. Surveys.