NOTAS DE MATEMATICA

Nº 144

UNA NOTA SOBRE LOS ESPACIOS $L_\omega R$

POR

JOSE R. MORALES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1994

Una nota sobre los espacios LωR.

José R. Morales*
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida, Venezuela

Resumen

En esta nota probaremos que si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach estrictamente convexo y LNUC entonces E es un espacio LωR.

1 Notación

Para un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$, por S_E(respectivamente, B_E) denotamos la esfera unitaria (respectivamente, bola unitaria) de E. Si $A \subset E$ entonces $co(A)$. denota la cápsula convexa de A y si (x_n) es una sucesión en E entonces

$$Sep(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\| \mid n \neq m\}$$

denota la separación de (x_n).

*Este trabajo fue financiado por el Proyecto CDCHT - C - 551 - 92

2

En 1936, J. A. Clarkson [1] introdujo los espacios *Uniformemente Convexos*, (UR), y en 1955, aparecierón dos generalizaciones de los espacios (UR). Una fue introducida por A. R. Lovaglia [4] : los espacios *Localmente Uniformemente Convexos*, (LUR), y la otra por K. Fan-I. Glicksberg [2] (generalizando la noción de espacio $2R$ dada por Smulyan): los espacios *Fully k-Convexos* o más comúnmente conocidos como los espacios kR.

En 1988, Nan Chao-Xun y Wang Jian Hua [11] localizan los espacios kR y definen los espacios localmente *Fully k-Convexos*, $(L - kR)$, como sigue

> *Sea $k \geq 1$ un entero. Decimos que un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es un* **espacio** *$L - kR$ si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ y para todo $x \in S_E$ tal que,*
>
> $$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n1} + \cdots + x_{nk}\| = k + 1$$
>
> *entonces $x_n \to x$.*

Si $k = 1$, entonces tenemos que los espacios $L - kR$ coinciden con los espacios LUR.
Los espacios $L - kR$ fueron generalizados por Bor-Luh Lin y Wenyao Zhang, [6], al introducir los espacios $L\omega R$ en la forma siguiente.

Definición 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dice que E es un* **espacio** *$L\omega R$ si para toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ y todo $x \in S_E$ tales que $\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n1} + \cdots + x_{nk}\| = k + 1$, para todo $k \in I\!N$ entonces $x_n \to x$.*

En 1967, L. P. Vlasov [10] introdujo los espacios $(CLUR)$, pero B. B. Panda y O. P. Kapoor [9] denotaron tales espacios como aquellos que poseen la propiedad (M) y en esta forma los hemos estudiado.
El autor en [7] generaliza la propiedad (M) al introducir los espacios que poseen la propiedad $(k - M)$ en la siguiente forma:

Sea $k \geq 1$ un entero. Se dice que el espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ satisface la **propiedad** $(k - M)$ *si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n1} + \cdots + x_{nk}\| = k + 1$$

entonces (x_n) es compacto en B_E

Si $k = 1$, entonces la propiedad $(k - M)$ coincide con la propiedad (M). Ahora, siguiendo [6] introducimos la propiedad (ωM) como sigue.

Definición 2.2 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dice que E posee la* **propiedad** ωM *si para cualquier $x \in S_E$ y toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n1} + \cdots + x_{nk}\| = k + 1, \text{ para todo } k \in I\!N$$

entonces (x_n) es compacto en B_E.

En 1980, R. Huff, [3] introduce los espacios de Banach cercanamente uniformemente convexos:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio **cercanamente uniformemente convexo**, (NUC) *si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ con $Sep(x_n) > \varepsilon$ entonces $co(\{x_n\} \cap (1 - \delta))B_E \neq \emptyset$.*

Bur - Luh Lin y Wang Zhang [6] localizan los espacios NUC e introducen los espacios localmente cercanamente uniformemente convexos, $(LNUC)$.

Definición 2.3 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ se dice* **localmente cercanamente uniformemente convexo**, $(LNUC)$, *si para todo $x \in S_E$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que para toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ con $Sep(x_n) > \varepsilon$ entonces*

$$co(\{x_n\} \cap (1 - \delta))B_E \neq \emptyset.$$

Evidentemente, $(NUC) \Rightarrow (LNUC)$.

Recordemos que un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es **estritamente convexo**, (R), si para todo $x, y \in S_E$ y $\|x+y\| = 2$ entonces $x = y$.
Los siguientes hechos son ampliamente conocidos.
Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces

1. $LUR \Leftrightarrow L-1R \Rightarrow \ldots \Rightarrow L-kR \Rightarrow L-(k+1)R \Rightarrow \ldots \Rightarrow L\omega R$.

2. Propiedad(M) $\Leftrightarrow$ Propiedad$(L-M)$ $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ Propiedad$(k-M)$ $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ Propiedad(ωM).

3. $LUR \Leftrightarrow (R)+$ Propiedad(M).

4. $L\omega R \Leftrightarrow (R)+$ Propiedad(ωM).

Las pruebas de este resultado pueden ser vistas en [5] y [8].

3 Resultado Principal.

Ahora presentaremos nuestro principal resultado.

Teorema 4 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si E es $(LNUC)$ entonces E satisface la propiedad (ωM).*

Prueba: Sean $x \in S_E$ y $(x_n) \subset B_E$ tales que $\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + x_{n1} + \cdots + x_{nk}\| = k+1$, para todo $k \in I\!N$, $(*)$.
Supóngamos que existe una subsucesión (x_j) de (x_n) que no posee subsuceción de Cauchy. Entonces, existe una subsucesión (x_m) de (x_j) tal que $\mathrm{Sep}(x_m) \geq \varepsilon$, y como E es un espacio $(LNUC)$ entonces existe un $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que

$$co(\{x, x_m\}) \cap (1-\delta))B_E \neq \emptyset,$$

y de aca fácilmente se obtiene que

$$\frac{1}{k+1}\|x + x_{m_1} + \cdots + x_{m_k}\| \leq 1 - \delta,$$

para cualquier $m_1, \ldots, m_k \in I\!N$ arbitrarios, lo cual es imposible por $(*)$. Así, toda subsucesión de (x_n) posee una subsucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual nos muestra que E satisface la propiedad (ωM). $\square$

El siguiente corolario resuelve en forma positiva la conjetura planteada en [6]

Corolario 5 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si E es espacio estrictamente convexo y $(LNUC)$ entonces E es $(L\omega R)$.*

Prueba: $(R) + (LNUC) \Rightarrow (R)+$ Propiedad$(\omega M) \Leftrightarrow L\omega R$.

Corolario 6 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si E es estritamente convexo y $(LNUC)$ entonces E posee la propiedad (G).*

Prueba: Para la definición de la propiedad (G) ver [8] y en el mismo artículo mostraremos que

$$L - kR \Rightarrow \text{ propiedad } (G).$$

Por tanto,

$$(R) + (LNUC) \Rightarrow L\omega R \Rightarrow \text{ propiedad } (G).$$

Agradecimientos:

Doy mis mas expresivas gracias al Institute of Mathematics, Slovak Academy of Sciences, Bratislava por su colaboración prestada durante mi visita al Instituto y al Profesor I. Dobrakov por su amabilidad y gentilezas para con el autor.

Referencias

[1] Clarkson, J. A. Uniformly Convex Spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40, (1936), 396 - 414.

[2] Fan, K. and Glicksberg, I. Fully Convex Hormed Linear Spaces, Proc. of the Nat. Acad. of SC. USA, 41, (1955), 947 - 953.

[3] Huff, R. Banach Spaces Which are Nearly Uniformly Convex, Rocky Mountain J. Math. 10, (1980), 743 - 749.

[4] Lovaglia, A. R. Locally Uniformly Convex Banach Spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 78. (1955), 225 - 238.

[5] Bor - Luh, L. Topics in Banach Space Theory , Lecture Notes in Math - National Tsing Hua. University - China - 1989.

[6] Bor - Luh, L. and Wenyao, Z. Some Geometric Properties related to Uniform Convexity of Banach Spaces . Functions Spaces, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Marcel Dekker, 136, (1991), 281 - 294.

[7] Morales, José R. Sobre los espacios $L - kR$, Notas de Matemáticas - ULA - # 105.

[8] Morales, José R. La Propiedad $(k - M)$ en Espacios de Banach, Notas de Matemáticas -ULA - # 118.

[9] Panda, B. B. and Kapoor, O. P. A generalization of Local Uniform Convexity of the norm, J. Math. Ann. Appl. 52 (1975), 300 - 308.

[10] Vlasov, L. P. Approximative Properties of Sets in Normed Linear Spaces - Russian Math. Surveys.

[11] Chao - Xun, N. and Jian - Hua, W. On the $Lk - UR$ and $L - kR$ spaces, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1988), 104, 521 - 526.