179

NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 100

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE ASOCIADO A LA ECUACION $x'' = f(t,x,x')$.

POR

ANTONIO TINEO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA

1989

0. INTRODUCCION. Una gran cantidad de artículos que estudian existencia de soluciones para problemas de frontera asociadas a la ecuación $x'' = f(t,x,x')$ imponen restricciones de crecimiento en f respecto a su ultima variable. (Condiciones de Bernstein-Nagumo). Ver [1], [2], [3], [4] etc. Sin embargo en [2] se hace notar que este tipo de condiciones no es totalmente natural; de hecho los autores de [2] muestran que el problema $x'' = q(x')$, $x(0) = x(1) = 0$ posee una solución si q tiene dos ceros de signo opuesto. Este resultado fué mejorado de diversas maneras en [5] y [7].

Nuestro propósito en este artículo es probar algunos teoremas de existencia para el problema de Sturm-Liouville asociado a la ecuación

$$x'' = f(t,x,x') \tag{0.1}$$

donde $f: [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota, en todo lo que sigue, una función continua. Nuestros resultados incluyen las hechos esenciales de [5], [7] y se consideran además condiciones de frontera no lineales.

1. PRELIMINARES. En lo que sigue C° denota el espacio de las funciones continuas $u: [0.1] \to \mathbb{R}$ provisto de la norma $\|u\|_o = \sup\{|u(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$. Dado un entero $n \geq 1$ denotamos por C^n

al espacio de las funciones $u: [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase c^n; provisto de la norma $\|u\|_n = \max\{\|u\|_o, \|u'\|_o, \ldots, \|u^{(n)}\|_o\}$.

Fijaremos también números reales a_o, b_o, a_1, b_1 tales que

$$a_i, b_i \geq 0, \quad a_i + b_i > 0 \quad (i=0,1), \quad a_o + a_1 > 0 \tag{1.1}$$

y denotamos por E el subespacio de C^2 formado por aquellas u que satisfacen las ecuaciones:

$$a_o\, u(0) - b_o\, u'(0) = 0, \quad a_1\, u(1) + b_1\, u'(1) = 0 \tag{1.2}$$

Es claro que E es un subespacio cerrado de C^2 de codimensión dos; además si $u \in C^1$ satisface las relaciones (1.2) entonces

$$u(0)\ u'(0) \geq 0 \geq u(1)\ u'(1) \tag{1.3}$$

Por otra parte si $u \in C^1$ satisface (1.2) y u es afin ($u''=0$) entonces $u = 0$. De aquí se sigue facilmente que la aplicación $E \to C^o$, $x \to x''$ es un isomorfismo.

1.1. PROPOSICION. Sea $u \in C^2$ satisfaciendo (1.3) y sea $t_o \in [0,1]$ tal que $\|u\|_o = |u(t_o)|$ entonces $u'(t_o) = 0$ y $u(t_o)\ u''(t_o) \leq 0$.

DEMOSTRACION. El resultado es obvio si $u = 0$. Asumamos ahora que $u \neq 0$ y notamos que u^2 alcanza su máximo absoluto en t_o; en consecuencia nuestro resultado es trivial si $0 < t_o < 1$. Supongamos ahora que $t_o = 0$ entonces $(u^2)'(0) \leq 0$ lo que junto con (1.3) implica $u'(0) = 0$. De aquí $(u^2)''(0) \leq 0$ y en consecuencia $u(0)\, u''(0) \leq 0$. El caso $t_o = 1$ es tratado de forma similar y esto da fin a la demostración.

Dados números reales $r_o, r_1 > 0$ definimos $M(r_o, r_1) = (r_o + r_1)^{-1} r_o r_1 [a_o^{-1} b_o + a_1^{-1} b_1 + 1]$ si $a_o > 0$ y $a_1 > 0$; $M(r_o, r_1) = r_o [a_o^{-1} b_o + 1]$ si $a_1 = 0$; $M(r_o, r_1) = r_1 [a_1^{-1} b_1 + 1]$ si $a_o = 0$. Nótese que $M(r_o, r_1)$ es creciente de sus dos variables.

1.2. PROPOSICION. Sea $u \in E$ tal que $-r_1 \leq u'(t) \leq r_o$ $(0 \leq t \leq 1)$; entonces $u(t) < M(r_o, r_1)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

DEMOSTRACION. Supongamos primero que $a_o > 0$, $a_1 > 0$, de (1.2) se sigue fácilmente que

$$u(t) \leq r_o [a_o^{-1} b_o + t] \quad ; \quad u(t) \leq r_1 [a_1^{-1} b_1 \; 1-t] \qquad (1.4)$$

pongamos ahora $v(t) = a_o^{-1} b_o + t - r_o^{-1} u(t)$; $w(t) = a_1^{-1} b_1 + 1 - t - r_1^{-1} u(t)$; de (1.4) se sigue que $v, v', w, w' \geq 0$; además $v(t) + w(t) = r_o^{-1} r_1^{-1} (r_o + r_1) [M(r_o, r_1) - u(t)]$ y como

$v + w \geq 0$ concluimos que $u(t) \leq M(r_o, r_1)$; $0 \leq t \leq 1$. Supongamos ahora que $u(t_o) = M(r_o, r_1)$ para algún $t_o \in [0,1]$ entonces $v(t_o) + w(t_o) = 0$ y de aquí $v(t_o) = w(t_o) = 0$. En consecuencia $v \equiv 0$ en $[0,t_o]$ y $w \equiv 0$ en $[t_o,1]$ porque $v,v',w,w' \geq 0$. Por otro lado; como $t_o \in [0,1]$ entonces $t_o \in \{0,1\}$ y de aquí u es afin. Esto dice que $u \equiv 0$ y contradice $u(t_o) = M(r_o,r_1)$. Así $u(t) < M(a,b)$; $0 \leq t \leq 1$.

Supongamos ahora que $a_1 = 0$ y que $u(t_o) = M(r_o,r_1)$ para algún $t_o \in [0,1]$; ya que $u(t) \leq r_o\ [a_o^{-1} b_o + t]$ concluimos que $t_o = 1$ y si v es como arriba entonces $v(1) = 0$. Pero $v,v' \geq 0$ y así $v \equiv 0$. De aquí u es una aplicación afin no trivial que satisface (1.2) y esta contradicción termina la prueba del caso $a_1 = 0$. El caso $a_o = 0$ es tratado de manera similar y esto termina la demostración.

1.3. TEOREMA. Sea U_o un abierto de E que contiene el origen y supongamos que para $0 < \lambda \leq 1$, el problema

$$x'' = \lambda f(t,x,x') \ ; \quad x \in E \qquad (1.5)_\lambda$$

no posee soluciones en la frontera ∂U_o de U_o. Si U_o es acotado en C^1 entonces el problema

$$x' = f(t,x,x'), \quad x \in E \qquad (1.6)$$

posee una solución en U_o.

DEMOSTRACION. Fijemos $r > 0$ tal que $\| u\|_1 \leq r$ para cada $u \in U_o$ y sea $R > 0$ tal que $|f(t,x,y)| < R$ si $|x|, |y| \leq r$. Definamos ahora $U = \{u \in U_o;\ \| u''\|_o < R\}$; es claro que U es un abierto acotado de E que contiene el origen tal que el problema $(1.5)_\lambda$ no posee soluciones en ∂U si $0 < \lambda \leq 1$.

Definamos ahora $L, N: E \to C^\circ$ mediante $L(x) = x''$, $N(x) = f(.,x(.),x'(.))$; entonces el problema $(1.5)_\lambda$ es equivalente a la ecuación $x = \lambda L^{-1}(N(x))$; y así $x \neq \lambda L^{-1}(N(x))$ si $0 < \lambda \leq 1$ y $x \in \partial U$. El resultado se sigue ahora del teorema de continuación de Poincaré (Axioma de Homotopía de la teoría de grado de Leray-Schauder).

2. LOS RESULTADOS PRINCIPALES. Haremos uso de dos resultados previos; el primero de las cuales se encuentra probado en [7].

2.1, PROPOSICION. (ver [7]) Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(t,x,0) < 0$ si $-\varepsilon \leq x \leq 0$ y sea $u \in C^2$ una solución de (0.1) que satisface (1.3). Si $u \geq -\varepsilon$ entonces $u > 0$ en (0.1).

NOTA. Sea $u \in C^2$ satisfaciendo (1.3) tal que $u > 0$ en (0.1) entonces $u'(1) \leq 0 \leq u'(0)$.

2.2. PROPOSICION. Sea $G: [0,R) \to (0,\infty)$ una función decreciente y continua a derecha; entonces el conjunto

$U: = \{u \in E: u(t) < 0, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad u'(t) < G(u(t))$ si $t \in u^{-1}([0,\infty))\}$ es abierto en E. Si además u está en la clausura cl(U) de U entonces $u'(t) \leq G(u(t))$ si $t \in u^{-1}(0,R))$.

DEMOSTRACION. Usando redacción al absurdo es fácil probar que U es abierto. Sea ahora $u \in cl(U)$ y sea (u_n) una sucesión de U convergente a u(en C^2) es fácil ver que si $0 < u(\tau) < R$ y G es continua en $u(\tau)$ entonces $u'(\tau) \leq G(u(\tau))$.

Supongamos ahora que existe $t_o \in [0,1]$ tal que $0 < u(t_o) < R$ y $u'(t_o) > G(u(t_o))$; ya que $u(t_o)u'(t_o) > 0 \geq u(1)\, u'(1)$ entonces $t_o < 1$ y como $u'(t_o) > G(u(t_o)) > 0$ existe δ: $0 < \delta < 1-t_o$ tal que $u'(t) > G(u(t_o))$ y $u(t_o) < u(t) < R$ si $t_o < t < t_o + \delta$. De aquí $u'(t) > G(u(t_o)) \geq G(u(t))$ si $t_o < t < t_o + \delta$ y en consecuencia $u(t)$ es punto de discontinuidad de G si $t_o < t < t_o + \delta$. Esto contradice el hecho que las discontinuidades de G son numerables y termina la demostración.

Estamos ahora en posición de probar los resultados más importantes de este trabajo.

2.3. TEOREMA. Supongamos que existen funciones decrecientes $g_o, g_1: [0,R) \to (0,\infty)$; $R > 0$; tales que

$$f(t,x,g(t)) \geq 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < R; \quad g \in \{g_o, -g_1\}. \tag{2.1}$$

Supongamos además que $f(t,0,0) \leq 0$ $(0 \leq t \leq 1)$ y que $f(t,R,0) \geq 0$ si $M(g_o(0), g_1(0)) > R$. Entonces el problema (1.6) posee una solución u tal que $0 \leq u \leq R$; $-g_1(0) \leq u' \leq g_o(0)$ y $-g_1(u(t)) \leq u'(t) \leq g_o(u(t))$ si $u(t) < R$.

DEMOSTRACION. Asumiremos previamente que las desigualdades impuestas a f son estrictas ($f(t,0,0) < 0$, $f(t,x,g(x)) > 0$ etc).

Escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $f(t,x,0) < 0$ si $-\varepsilon \leq x \leq 0$ y definamos $G_i(x) = \lim_{z \to x^+} g_i(z)$; $0 \leq x < R$;

$U = \{u \varepsilon E: -\varepsilon < u < R;\ -G_1(0) < u' < G_o(0);\ -G_1(u(t)) < u'(t)) < G_o(u(t))$ si $u(t) \geq 0\}$. Ya que G_i es decreciente y continua a derecha $(i = 0,1)$; entonces U es un abierto de E (ver proposición 2.2); además $0 \varepsilon U$ y U es acotado en C^1.

Sea $0 < \lambda \leq 1$ y sea $u \varepsilon cl(U)$ una solución de $(1.5)_\lambda$; de acuerdo al Teorema 1.3 bastará ver que $u \varepsilon U$. Ya que $-\varepsilon \leq u$ entonces la proposición 2.1 dice que $u > 0$ en $(0,1)$ y en particular $u > -\varepsilon$ y $u'(1) \leq 0 \leq u'(0)$.

AFIRMACION 1. $u < R$. Prueba. Ya que $G_1(0) \leq u' \leq G_o(0)$ entonces $u < M(G_o(0), G_1(0)) \leq M(g_o(0), g_1(0))$ (Note que $G_i \leq g_i$ $i = 0,1$) y si $R \geq M(g_o(0), g_1(0))$ no hay nada que probar. En caso contrario asumamos que $u(t_o) = R$ para algún $t_o \varepsilon [0,1]$; de la proposición 1.1 se tiene $u'(t_o) = 0 \geq u''(t_o)$ y de aquí $u''(t_o) = f(t_o,R,0) > 0$. Esta contradicción **prueba**

la afirmación 1.

De la proposición 2.2 sabemos que $-G_1(u(t)) \leq u'(t) \leq$ $\leq G_o(u(t))$ si $0 < u(t) < R$; pero como $-G_1(0) \leq u' \leq G_o(0)$ y G_o, G_1 son decrecientes entonces

$$- G_1(u(t)) \leq u'(t) \leq G_o(u(t)) \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \quad . \quad (2.2)$$

AFIRMACION 2. $-G_1(0) < u' < G_o(0)$. Prueba. Supongamos que $u'(t_o) = G_o(0) > 0$ para algún $t_o \in [0,1]$; ya que $G_o(0) \geq G(u(t_o))$ entonces (2.2) dice que $u'(t_o) = G_o(u(t_o))$ y de aquí $u''(t_o) > 0$. Ya que $u'(1) \leq 0$ entonces $t_o < 1$, y como $u''(t_o)$ y $u''(t_o) > 0$ resulta que u y u' son estrictamente crecientes a la derecha de t_o; de aquí la función $v: = u' - G_o \circ u$ es estrictamente a la derecha de t_o. Pero $v(t_o) = 0$ y así $v > 0$ en $(t_o, t_o + \delta)$ para algún $0 < \delta < 1 - t_o$. Esto contradice (2.2) y prueba la afirmación 2.

Razonando como en la afirmación 2 se concluye que las desigualdades de (2.2) son estrictas y de aquí $u \in U$. Por el teorema 1.3 el problema (1.6) posee una solución en U y por la proposición 2.1, $u > 0$ en $(0,1)$. Esto termina la prueba del primer caso.

Para probar el caso general sea A la clausura del conjunto $\{(x,g(x)): 0 \leq x \leq R, \ g \in \{-g_1, g_o\}\} \cup \{(R,0)\}$, entonces A

es cerrado y $(0,0) \notin A$; de aquí existe una función continua $\Delta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta(0,0) = -1$ y $\Delta \equiv 1$ en A. Definamos ahora $f_n(t,x,y) = f(t,x,y) + n^{-1}\Delta(x,y)$ para cada entero $n \geq 1$; entonces $f_n(t,0,0) < 0$; $f_n(t,x,g(x)) > 0$ etc y por el primer caso el problema

$$x'' = f_n(t,x,x') \ , \quad x \in E \tag{2.3}$$

posee una solución u_n tal que $0 \leq u_n < R$, $-G_1(u_n(t)) < u_n'(t) < G_o(u_n(t))$; $-G_1(0) < u_n' < G_o(0)$. En particular (u_n) es acotada en C^1 y de (2.3) se sigue (u_n) es acotada en C^2. Así, por el Teorema de Ascoli podemos suponer que existe $u \in C^1$ tal que $u_n \to u$ en C^1 pero de (2.3) se tiene que (u_n) converge a $f(.,u,u')$ en $C°$; de aquí resulta que u es una solución de (1.6) con las propiedades requeridas. Note que u está en la clausura del conjunto $\{v \in U: 0 \leq v < R; -G_1(0) < v' < G_o(0), -G_1(v(t)) < v'(t) < G_o(v(t))\}$

OBSERVACIONES (a) El teorema 2.3 fué considerado en [5] para el problema de Dirichlet $(b_o = b_1 = 0)$; donde se asumió además que g_o, g_1 fueran de clase C^1. Si $b_o = b_1 = 0$ puede probarse que el Teorema 2.3 permanece válido si en (2.1) se asume, $0 \leq x < R$ y

$$\int_0^x G_o(s)^{-1}\, ds \leq t \leq 1 + \int_0^x G_1(s)^{-1}\, ds$$

b) El teorema 2.3 fué probado en [7] cuando g_o, g_1 son funciones constantes.

c) Supongamos que existen r_o, $r_1 > 0$ y una función continua $h: [-r_1, r_o] \to [0,\infty)$ tal que $h(-r_1) = h(r_o) = 0$, $h > 0$ en (r_1, r_o), h es creciente en $(-r_1, r_o)$ y decreciente en $(0, r_o)$; $f(t,h(0),0) \geq 0$ si $h(0) < M(r_o, r_1)$; $f(t,h(y),y) \geq 0$ si $h^{-1}(h(y))$ posee exactamente dos elementos. Si $f(t,0,0) \leq 0$ entonces el problema (1.6) posee una solución. Prueba. Para $0 \leq x < h(0)$ definamos $g_o(x) = \inf h^{-1}(x) \cap [0, r_o]$, $g_1(x) = \sup h^{-1}(x) \cap [-r_1, 0]$. Observemos también que las hipótesis de monotomía en h implican que el conjunto $\{y: h(h^{-1}(y))$ tiene más de dos elementos$\}$ es numerable; de aquí el conjunto $\{y: hh^{-1}(y)$ tiene exactamente dos elementos$\}$ es denso en $[r_1, r_o]$ y así g_o, g_1 satisfacen las hipótesis del teorema 2.3. Esto termina la prueba. Esta nota cubre los aspectos más esenciales de [5] , §2. Compare también con [6]; teorema 2.5.

El caso en que $f(t,0,0) \geq 0$ puede ser estudiado a través del problema $[x'' = -f(t, -x, -x'), x \in E]$; pues si v es solución de este problema entonces $-v$ es solución de (1.6). En el caso en que $f(t,0,0)$ no tiene signo constante se tiene el siguiente resultado, cuya prueba esta básicamente contenida en el teorema 1.7 de [5] y el teorema 2.3.

2.4. TEOREMA. Supongamos que existen funciones continuas

g_o, g_1: $[-S,R] \to [0,\infty)$; $R,S > 0$; positivas en $(-S,R)$ y diferenciables en $x = 0$ tales que $f(t,x,g(x))x \geq 0$ si $-s \leq x \leq R$ y $g \in \{-g_1, g_o\}$; $f(t,R,0) \geq 0$ si $R < M(g_o(0), g_1(0))$; $f(t,-S,0) \leq 0$ si $S < M(g_o(0),g_1(0))$.

Si f es diferenciable en $(t,0,y)$; $0 \leq t \leq 1$, $g \in \{g_o(0), -g_1(0)\}$; entonces el problema (1.6) posee una solución u tal que $-S \leq u \leq R$ y $-g_1(u(t)) \leq u'(t) \leq g_o(u(t))$.

2.5. COROLARIO. Sean p: $[0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; q: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y supongamos que existen r_o, $r_1 > 0$ tales que $q(-r_1) = q(r_o) = 0$. Entonces el problema

$$x' = p(t,x,x')\, q(x'), \quad x \in E \tag{2.4}$$

posee una solución u tal que $-r_1 \leq u' \leq r_o$.

DEMOSTRACION. Pongamos $M = M(r_o,r_1)$ y sean g_o,g_1: $[-M,M] \to \mathbb{R}$ las funciones constantes $g_i(x) = r_i$ $(i = 0,1)$. Si q es diferenciable en $\{-r_1,r_o\}$ y p es diferenciable en $\{(t,0,r)\colon\ 0 \leq t \leq 1,\ r = -r_1, r_o\}$ entonces el resultado se sigue del teorema 2.4. Por otra parte es fácil ver que existen sucesiones de funciones continuas $\{q_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$; $\{p_n\colon [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\}$ y sucesiones de números reales positivos $\{r_{on}\}$, $\{r_{1n}\}$ tales que $q_n(r_{on}) = q_n(-r_{1n}) = 0$; $q_n \to q$ y $p_n \to p$ uniformemente en $\mathbb{R}$ y $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ respectivamente;

q_n es diferenciable en $[-r_{1n}, r_{on}]$ y p_n es diferenciable en $[0,1]x\ [-M,M]\ x\ [-r_1-1,\ r_o + 1]$. En particular el problema $[x'' = p_n(t,x,x')\ q_n(x'),\ \ x \varepsilon E]$ posee una solución u_n tal que $-r_{1n} \leq u'_n \leq r_{on}$ y el resultado se sigue como en el teorema 2.3 recordando que $\|u_n\|_o \leq M(r_{on}, r_{1n})$. Esto termina la demostración.

3. CONDICIONES DE FRONTERA NO LINEALES. En esta sección probamos dos teoremas de existencia de soluciones para problemas de la forma $[x'' = f(t,x,x');\ x \varepsilon M]$; donde M es una deformación homotópica apropiada de E. Nuestros resultados están basados en el siguiente teorema abstracto.

3.1. TEOREMA. Sea $S: [0,1]\ x\ C^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación compacta (completamente continua) tal que

(i) La aplicación $S_o: C^2 \to \mathbb{R}^2$; $S_o(x) = S(0,x)$; es lineal

(ii) Si $S_o(u) = 0$ y $u'' = 0$ entonces $u = 0$.

Supongamos que existe un abierto ecotado U de C^1 conteniendo el origen tal que el problema

$$x'' = \lambda f(t,x,x'),\quad S(\lambda,x) = 0 \qquad (3.1)_\lambda$$

no posee soluciones en ∂U si $0 < \lambda \leq 1$. Entonces el problema $(3.1)_1$ posee una solución en U.

DEMOSTRACION. Definamos $T: C^2 \to C^\circ \times \mathbb{R}^2$; $N: [0,1] \times C^2 \to C^\circ \times \mathbb{R}^2$ mediante $T(x) = (x'', S_o(x))$, $N(x) = (f(.,x,x'), S(0,x) - S(\lambda,x))$. Es claro que T es lineal continua inyectiva y que N es compacta.

Pongamos $A = \{u \in C^2 : u' = 0\}$ entonces A es un subespacio de C^2 de dimensión dos tal que $A \cap \mathrm{Ker}\, S_o = \{0\}$; de aquí se tiene que S_o es sobreyectiva y que $A \oplus \mathrm{Ker}\, S_o = C^2$; en particular $S_o(A) = \mathbb{R}^2$.

Dado $(p,r) \in C^\circ \times \mathbb{R}^2$ escojamos $u \in C^2$, $v \in A$ tales que $S_o(v) = r$ y $u'' = p$. Escribamos $u = a + w$ con $a \in A$ y $w \in \ker S_o$ entonces $w'' = p$ y $S_o(w) = 0$; así $T(v+w) = (p,r)$ lo cual prueba que T es sobre y por el teorema de la aplicación abierta T es un isomorfismo.

Por otra parte, el prohlema $(3.1)_\lambda$ es equivalente a la ecuación $x = T^{-1}(N(\lambda,x))$ y de aquí $x \neq T^{-1}(N(\lambda,x))$ si $x \in \partial U$ $0 \leq \lambda \leq 1$. Además $T^{-1}(N(0,x)) = 0$ y el resultado se sigue de las teoría de grado de Leray-Schauder. Esto termina la prueba.

En lo que sigue $\phi_o, \phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotan funciones continuas tales que

$$\phi_o(x)\, x \geq 0 \geq \phi_1(x)\, x \tag{3.2}$$

3.2. TEOREMA. Supongamos que $f(t,0,0) \leq 0$ y que existen números reales r_o, r_1, $R > 0$ tales que

$$f(t,x,r) \geq 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq R; \quad r = r_o, -r_1 \tag{3.3}$$

Pongamos

$$R_o = \frac{r_o\, r_1}{r_o + r_1}\left[1 + r_o^{-1} \max \phi([0,r_o]) + r_1^{-1} \max \phi_1([0\dot{r}_1,0])\right]$$

Si $f(t,R,0) \geq 0$ ó si $R \geq R_o$ entonces el problema

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(i) = \phi_i(x'(i)); \quad i = 0,1$$

posee una solución u; $0 \leq u \leq R$; $-r_1 \leq u' \leq r_o$.

DEMOSTRACION. Podemos asumir que las desigualdades para f son estrictas ($f(t,0,0) < 0$, $f(t,x,r) > 0$ etc). Fijemos ahora $\varepsilon > 0$ tal que $f(t,x,0) < 0$ si $-\varepsilon \leq x \leq 0$ y definamos $U = \{u \in E: -\varepsilon < x < R;\ -r_1 < u' < r_o\}$; $S: [0,1] \times C^2 \to \mathbb{R}^2$; $S(\lambda,x) = (x(0) - \lambda\phi_o(x'(0)),\ x(1) - \lambda\phi_1(x'(1)))$. Es claro que S satisface las hipótesis del teorema 3.1.

Sea ahora $u \in cl(U)$ una solución de $(3.1)_\lambda$ para algún $\lambda > 0$; ya que $S(\lambda,x) = 0$ entonces $u(0)u'(0) \geq 0 \geq u(1)u'(1)$ ver (3.2) y por la proposición 2.1, $u > 0$ en (0.1); en particular $u'(1) \leq 0 \leq u'(0)$. Por otro lado, razonando como en la proposición 1.2 concluimos que $u < R_o$ y sale aquí $u < R$ (ver teorema 3.3, afirmación 1). También es fácil ver que $-r_1 < u' < r_o$ y el resultado se sigue ahora del teorema 3.1.

3.3. TEOREMA. Supongamos que $f(t,0,0) \leq 0$ y que existen r_o, r_1, $R > 0$ satisfaciendo (3.3). Supongamos además que ϕ_o, ϕ_1 son de clase C^1 con $\alpha := \inf \phi_o^1([0,\infty)) > 0 \geq \phi_1'(0)$ y que $f(t,R,0) \geq 0$ si $R < r_o(1+\alpha^{-1})$ entonces el problema

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x'(i) = \phi_i(x(1)); \quad i=0,1$$

posee una solución $u \geq 0$; $-r_1 \leq u' \leq r_o$.

DEMOSTRACION. Procedamos como en el teorema anterior; pero definiendo en este caso $S: [0,1] \times C^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante; $S(0,x) = (x'(0) - \phi_o'(0)x(0),\ x'(1) - \phi_1'(0)x(1))$ y para $0 < \lambda \leq 1$;

$$S(\lambda,x) = (x'(0) - \lambda^{-1}\phi_o(\lambda\, x(0)),\quad x'(1) - \lambda^{-1}\phi_1(\lambda x(1)))$$

ya que $\phi_o(0) = \phi_1(0) = 0$ entonces

$$S(\lambda,x) = (x'(0) - \left(\int_0^1 \phi_o'(\lambda x(0)s)\,ds\right)x(0),$$

$$x'(1) - \left(\int_0^1 \phi_1'(\lambda x(1)s)\,ds)x(1)\right)$$

y de aquí es fácil verificar que S satisface las propiedades del teorema 3.1.

Sea $u \in cl(U)$ una solución de $(3.1)_\lambda$ para algún $0 < \lambda \leq 1$; entonces $\lambda\, u'(i)u(i) = \phi_i(\lambda u(i))u(i)$ y de aquí $u'(1)u(1) \leq 0 \leq u(0)\; u'(0)$, y razonando como antes tenemos $-\varepsilon < u$, $-r_1 < u' < r_o$. Por otra parte; de las relaciones

$$u'(0) = u(0) \int_0^1 \phi_o'(\lambda u(0)s)\,ds \geq \alpha\, u(0); \quad u' \leq r_o \tag{3.4}$$

concluimos que $u(t) \leq r_o(1 + \alpha^{-1})$. (Ver prueba de la proposición 1.2). El resto de la prueba es ahora trivial.

NOTA. Supongamos, en lugar de (3.3); que $f(t,x,r) > 0$ si $r \geq 0$, $r = r_o, -r_1$. Entonces el teorema 3.3 permanece válido si la hipótesis $\inf(\phi_o'([0,\infty)) > 0$ es substituida por las siguientes: (i) $\phi_o(x) > 0$ si $r > 0$; (ii) existe $K > 0$ tal que $\phi_o(x) > r_o$ si $x > K$ y (iii) $\phi_o'(0) > 0$.

PRUEBA. Pongamos $V = \{u \in C^1 : u \geq 0,\ -r_1 \leq u' \leq r_o$ y $\lambda u'(0) = \phi_o(\lambda u(0))$ para algún $\lambda;\ 0 < \lambda \leq 1$. Probaremos que el conjunto $\{u(0) : u \in V\}$ es acotado; para ello supongamos que existe una sucesión (u_n) en V tal que $u_n(0) \to +\infty$ y sea (λ_n) una sucesión de $(0,1)$ tal que $\lambda_n\, u_n'(0) = \phi_o(\lambda_n\, u_n(0))$. Ya que $\lambda_n\, u_n'(0) \leq r_o$ entonces $0 \leq \lambda_n\, u_n(0) \leq K$ y podemos asumir que $\lambda_n\, u_n(0) \to x_o$; para algún $x_o \geq 0$. Pero

$$0 \to \frac{u_n'(0)}{u_n(0)} = \int_0^1 \phi_o'(\lambda_n\, u_n(0)s)\,ds \to \int_0^1 \phi_o'(sx_o)\,ds$$

y de aquí $x_o > 0$ porque $\phi_o'(0) > 0$. En consecuencia $\lambda_n \to 0$ y así $\phi_o(\lambda_n\, u_n(0)) \to 0$. Es decir $\phi_o(x_o) = 0$ y esta contracción prueba la existencia de $R_o > 0$ tal que $u(0) < R_o$ para cada $u \in V$. De aquí $u < R_o + r_o$ y la prueba sigue facilmente definiendo

$$U = \{u \in E: -\varepsilon < u < R_o + r_o,\ \ -r_1 < u' < r_o\}\ .$$

B I B L I O G R A F I A

[1] A. Granas, R.B. Guenther and J.W. Lee. On a theorem of S. Bernstein. Pac. Jour. Math. (2), 73, (1977) 1-16.

[2] ———, Nonlinear boundary value problems for some classes of ordinary differential equations. Rocky Mount. Jour. Math. Vol. 10, number 1, (1980) 31-58.

[3] R. Gaines and J. Mawhin. Coincidence degree and Non-linear differential equations. Lectures Notas in Math. Vol. 56: Springer-Verlag 1977.

[4] M. Nagumo. Uber die differentialgieichang y"=f(t,y,y'). Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 19, 1937, 861-866.

[5] A. Rodríguez and A. Tineo. Existence theorems for the Dirichlet problem without growth restrictions. Jour. Math. Anal. and App. Vol 135, Nº 1, 1988.

[6] A. Tineo and Rivero J. On the existence of solutions for the boundary value problem x" = f(x,x'), x(0)=x(1)=0. Radovi-Matematicki, Vol. 3 (1987) 149-157.

[7] A. Tineo. The Sturm-Liouville problem for the equation x"=p(t,x)q(x'). Jour. Math. Anal. and App. Por aparecer.