UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

PERMANENCIA DE LAS PROPIEDADES LOCALES DE RADON-NIKODIM Y DE KREIN-MILMAN A TRAVES DE OPERADORES TAUBERIANOS

POR

WILMAN BRITO

R E F E R E N C E S

1) V. Aurich, Bounded analytic sets in Banach spaces, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 36, 4(1986) 229-243.

2) J.B. Conway, Function of one complex variable, second printing, Springer-Verlag, New York (1975).

3) J. Diestel - J.J. Uhl Jr, Vector Measures, Math. surveys, Rhode Island. Amer.Math. Soc. (1977).

4) N. Dunford - J.T. Schwartz, Linear operator, part I, Interscience, New York (1958).

5) E. Hille - R.S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, Third printing, Amer. Math. Soc., Rhode Island (1974).

6) R.E. Huff - P.D. Morris, Geometric characterizations of the Radon-Nikodym property in Banach spaces, Stu. Math, 56, (1976) 157-164.

INTRODUCCION.

El objetivo principal de este trabajo es el de utilizar la noción de operador Tauberiano, tal y como se encuentra en [KW], para derivar algunos resultados relacionados con la geometría de los espacios de Banach; específicamente probaremos, entre otras cosas, que tanto la propiedad de Radon-Nikodym así como la propiedad de Krein-Milman son preservados por inyecciones Tauberianas. Un operador entre espacios de Banach $T: X \to Y$ se dice Tauberiano si las relaciones $x^{**} \in X^{**}$ y $T^{**}x^{**} \in Y$ implican $x^{**} \in X$, donde $T^{**}:X^{**} \to Y^{**}$ es el segundo adjunto de T y tanto X como Y son considerados como subespacios de X^{**} y Y^{**} respectivamente. Una de las primeras caracterizaciones de los operadores Tauberianos fue obtenida por Garling y Wilansky [GW] asumiendo que el rango de T es cerrado. Concretamente ellos probaron que si T es de rango cerrado, entonces T es Tauberiano si y sólo si $N(T)$, el núcleo de T, es reflexivo. Una noción de operadores más fuerte que la de Tauberiano y previamente estudiada, es la de operador Semi-Fredholm (Véase [W]): Un operador $T: X \to Y$ es Semi-Fredholm si $R(T)$, el rango de T, es cerrado y $N(T)$ es de dimensión finita. Kalton y Wilansky ([KW]) muestran, entre otras cosas, que si X no contiene subespacios reflexivos de dimensión infinita (por ejemplo ℓ_1), entonces T es Tauberiano si y sólo si T es Semi-Fredholm. En el mismo artículo, Kalton y Wilansky caracterizan los operadores Semi-Fredholm como aquellos que transforman subconjuntos cerrados y acotados de X en subconjuntos cerrados y acotados en Y. Posteriormente, Neidinger y Rosenthal obtienen resultados similares para operadores Tauberianos; específicamente ellos prueban que T es Tauberiano si y sólo si T transforma subconjuntos acotados y débilmente cerrados de X en subconjuntos acotados y débilmente cerrados en Y; en particular, esto se cumple para subconjuntos convexos, cerrados y acotados de X.

Indicamos ahora la organización de este trabajo. La Sección 1 es de notaciones. En la Sección 2 se revisan las relaciones entre el rango y el espacio nulo de un operador, así como también la definición de operador débilmente compacto. La tercera Sección es la más importante. Allí se definen los operadores Tauberianos y se comparan con los débilmente compactos. Distintas caracterizaciones de estos operadores (los Tauberianos) se dan a conocer, así como se presenta una prueba (Teorema 3.4) de un resultado anunciado, pero no probado, por Kalton y Wilansky (KW). Utilizando una de las caracterizaciones dadas por Neidinger y Rosenthal derivamos nuestro resultado principal, el Teorema 3.18, el cual establece que los operadores Tauberianos inyectivos preservan tanto la propiedad de Radon-Nikodym como la propiedad de Krein-Milman. Otros resultados obtenidos son 3.2, 3.5, 3.7, 3.10, 3.11, 3.17 y 3.19. De particular interés son 3.2 y 3.7.

1. NOTACIONES. Sean X y Y espacios de Banach con duales X^* y Y^* respectivamente. La bola unitaria cerrada de X será denotada por B_X. En todo lo que sigue $T: X \to Y$ denotará un operador (=transformación lineal acotada) distinto del operador cero. Dado el operador T, N(T) y R(T) significarán el **NUCLEO Y EL RANGO** de T, respectivamente. Recordemos que si T es un operador, su segundo adjunto $T^{**}:X^{**} \to Y^{**}$ es una extensión de T, entendiendo por esto que $T^{**}J_X = J_Y T$, donde J_X y J_Y son las inyecciones canónicas. En particular, T^{**} coincide con T si X es reflexivo. Si identificamos X con $J_X(X)$ y Y con $J_Y(Y)$ (esto siempre será considerado de ese modo), vemos que $T^{**}(X) \subseteq Y$, o en forma equivalente
$X \subseteq (T^{**})^{-1}(Y)$,

Si $A \subseteq X$, entonces $\bar{A}$ y $\bar{A}^w$ denotarán la norma-clausura y la débil-clausura de A respectivamente; mientras que $\bar{A}^*$ denotará la débil*-clausura de A en X^{**}. Por un subespacio siempre entenderemos, salvo mención explícita de lo contrario, un subespacio lineal norma-cerrado.

2. GENERALIDADES SOBRE OPERADORES.

El objetivo de esta sección es el de proveer al lector de las herramientas básicas que se utlizarán en este trabajo. He aquí las definiciones y resultados.

DEFINICION 2.1. Sean M y N subespacios (no necesariamente norma-cerrados)de X y X^* respectivamente. Los *aniquiladores* $M^{\perp}$ y ${}^{\perp}N$ se definen como:

$$M^{\perp} = \{x^* \in X : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}$$

$$^{\perp}N = \{x \in X: x^*(x) = 0 \text{ para todo } x^* \in N\}$$

Es fácil ver que $M^{\perp}$ es un subespacio W*-cerrado de X* y $^{\perp}N$ es un subespacio de X.

El siguiente resultado puede verse en [Ru, Teo. 4.7, pag. 91].

TEOREMA 2.2. Sean M y N como en la Definición 2.1 Entonces:

(i) $^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}$

(ii) $(^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}^*$.

La prueba del próximo teorema puede leerse en [H, pag.123]. Véase también [Ru, pág. 91].

TEOREMA 2.3. Sean X un espacio de Banach y M un subespacio de X. Entonces:

(i) $(X/M)^* = M^{\perp}$

(ii) $M^* = X^*/M^{\perp}$

(iii) $M^{**} = \overline{J_X(M)}^*$

OBSERVACION. El Teorema 2.3 (iii) identifica el segundo espacio conjugado M** con un subespacio de X**, mientras que el primer conjugado M* sólamente puede ser identificado con un espacio cociente de X*. En general dicho cociente no se puede identificar con un subespacio de X*.

Un hecho interesante de hacer resaltar, proveniente del Teorema 2.3, es el siguiente:

COROLARIO 2.4. Un subespacio M de X es reflexivo si y sólo si $J_X(M)$ es W^*-cerrado en X^{**}.

De particular interés son los dos siguientes resultados [Ru, pág. 94-96].

TEOREMA 2.5. Sea $T: X \to Y$ un operador. Entonces:

(i) $N(T^*) = R(T)^{\perp} = \overline{R(T)}^{\perp}$

(ii) $N(T) = {}^{\perp}R(T^*)$.

En particular,

(iii) $N(T^*)$ es W^*-cerrado en Y^*.

(iv) $\overline{R(T)} = Y$ si y sólo si T^* es uno-a-uno.

(v) T es uno-a-uno si y sólo si $\overline{R(T^*)}^{*} = X^*$.

TEOREMA 2.6. Si T es un operador, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $R(T)$ es norma-cerrado en Y.

(ii) $R(T^*)$ es W^*-cerrado en X^*.

(iii) $R(T^*)$ es norma-cerrado en X^*.

Pasemos ahora a recordar la definición de operador débilmente compacto y una de sus caracterizaciones. La finalidad de hacer esto es con la intención de comparar estos operadores con los operadores Tauberianos.

DEFINICION 2.7. Un operador $T: X \to Y$ se dice *débilmente compacto* si $T(B_X)$ es relativamente débilmente compacto.

Hemos visto que si $T: X \to Y$ es un operador, entonces $T^{**}(X) \subseteq Y$. En general no es cierto que $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$, salvo si T es débilmente compacto como lo demuestra el siguiente teorema [DS, pág. 482-485].

TEOREMA 2.8. Para un operador $T: X \to Y$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) T es débilmente compacto

(ii) $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$.

Utilizando estas equivalencias se prueba rápidamente:

COROLARIO 2.9. Si X o Y es reflexivo, todo operador $T: X \to Y$ es débilmente compacto.

3. OPERADORES TAUBERIANOS

El estudio de los operadores Tauberianos tiene su origen en un problema sobre sumabilidad [GW], pero quienes lo nombran de esa forma son Kalton y Wilansky [KW]. Estos operadores pueden ser caracterizados por el hecho de preservar conjuntos convexos cerrados y acotados (o conjuntos acotados débilmente-cerrados). Existen otros tipos de operadores, llamados operadores "Semi-Fredholm" que se caracterizan por preservar conjuntos cerrados y acotados [W].

DEFINICION 3.1. Un operador $T: X \to Y$ es *Tauberiano* si $(T^{**})^{-1}(Y)=X$.

Como se pudo observar anteriormente, cualquier operador T satisface $X \subseteq (T^{**})^{-1}(Y)$. Por lo tanto pedir que T sea Tauberiano significa que $(T^{**})^{-1}(Y) \subseteq X$; esto es, si $x^{**} \in X^{**}$ y $T^{**}x^{**} \in Y$, entonces $x^{**} \in X$. ¿Cuál es la relación entre los operadores débilmente compactos y los Tauberianos?. Bién, si T es débilmente compacto entonces $(T^{**})^{-1}(Y) = X^{**}$, por el Teorema 2.8. Si ahora pedimos que X sea reflexivo resulta de manera trivial que T es Tauberiano; es decir, cuando X es reflexivo los operadores débilmente compactos y los Tauberianos coinciden. Esta simple observación nos revela que cuando X no es reflexivo, los operadores Tauberianos jamás son débil - mente compactos. Debemos hacer notar, sin embargo, que el conjunto de los operadores Tauberianos puede ser vácio. ¿Cómo?. Pués bien, todo lo que debemos hacer es obtener dos espacios de Banach no reflexivos X y Y de modo tal que todo operador T de X en Y sea débilmente compacto: un ejemplo, tómese $X = C(\Omega)$ con Ω Stoniano y $Y = \ell_1$ [DU, pág. 156].

Hemos visto que si X es reflexivo los operadores Tauberianos y los débilmente compactos coinciden si su dominio es X. Es más, si todo operador T de X en Y débilmente compacto es Tauberiano, entonces X es reflexivo. En efecto, sea T un operador de X en Y débilmente compacto el cual también es Tauberiano y sea $x^{**} \in X^{**}$. Por ser T débilmente compacto, $T^{**}x^{**} \in Y$ y como T es Tauberiano, $x^{**} \in X$; esto nos dice que $X = X^{**}$, por lo que X es reflexivo.

Los operadores Tauberianos gozan de algunas propiedades interesantes como por ejemplo:

TEOREMA 3.2. Sea $T: X \to Y$ un operador Tauberiano.

(i) Si Y es reflexivo, entonces X es reflexivo.

(ii) Si Y es débilmente secuencialmente completo X también lo es.

Prueba. (i) Sea $x^{**} \varepsilon X^{**}$. Puesto que $T^{**}x^{**} \varepsilon Y^{**}$ entonces $T^{**}x^{**} \varepsilon Y$ porque Y es reflexivo. Siendo T Tauberiano, $x^{**} \varepsilon X$, así (i).

(ii) Recordemos que un espacio de Banach Z es DEBILMENTE SECUENCIALMENTE COMPLETO si cada sucesión débil-Cauchy (z_n) de Z (esto significa que $(z^*(z_n))$ converge para cada z^* de Z^*) converge débilmente a un z de Z. Sea entonces (x_n) una sucesión débil-Cauchy de X. Defina x^{**} en X^{**} por $x^{**}(x^*)=\lim x^*(x_n)$ para cada $x^* \varepsilon X^*$. Puesto que T es w-w continuo, (Tx_n) es una sucesión débil-Cauchy en Y la cual converge débilmente, por la hipótesis, a un elemento $y \varepsilon Y$. Ahora, para cada $y^* \varepsilon Y^*$,

$$\begin{aligned}(T^{**}x^{**})(y^*) &= x^{**}(T^*y^*)\\ &= \lim(T^*y^*)(x_n)\\ &= \lim y^*(Tx_n)\\ &= \lim y^*(y) = \lim y(y^*),\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $T^{**}x^{**} = y \varepsilon Y$. Ya que T es Tauberiano, $x^{**} \varepsilon X$; es decir, existe $x \varepsilon X$ tal que $x = x^{**}$. Por esto, $x_n \xrightarrow{w} x$ concluyendo la prueba.

Es propicio el momento para revisar y discutir algunas de las caracterizaciones de los operadores Tauberianos obtenidas por [GW], [KW] y [NR].

En su trabajo sobre sumabilidad, Garling y Wilansky [GW, Teo. 3], obtienen el siguiente resultado:

TEOREMA 3.3. [GW]. Sea $T: X \to Y$ un operador con rango norma - cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es Tauberiano

(ii) $N(T^{**}) \subseteq X$.

(iii) $N(T)$ es reflexivo.

En general, si el rango de T no es norma-cerrado, (i) implica (ii) y (ii) implica (iii).

Posteriormente, Kalton y Wilansky [KW] observan que un resultado más general se puede obtener en ausencia de que el rango sea norma-cerrado.

TEOREMA 3.4. [KW]. Si $T: X \to Y$ es un operador, se cumplen:

1) $N(T^{**}) \subseteq X$ si y sólo si $N(T)$ es reflexivo y $\overline{R(T^*)}$ es W^*-cerrado.

2) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) T es Tauberiano

(ii) $N(T^{**}) \subseteq X$ y $T(B_X)$ es norma-cerrado.

(iii) $N(T^{**}) \subseteq X$ y $\overline{T(B_X)} \subseteq R(T)$.

Como Kalton y Wilansky no dan una prueba de estos hechos, he aquí una.

Prueba.

Nótese que la condición $N(T^{**}) \subseteq X$ es equivalente a $N(T^{**})=N(T)$. En efecto, si $N(T^{**}) = N(T)$ entonces trivialmente $N(T^{**}) \subseteq X$. Recíprocamente, suponga que $N(T^{**}) \subseteq X$. Claramente $N(T) \subseteq N(T^{**})$.

Por otro lado, si $x^{**} \in N(T^{**})$ entonces $x^{**} \in X$ (por la hipótesis) y como $T^{**}x^{**} = Tx$, donde x^{**} es la imagen de algún x, por medio de la aplicación canónica, vemos que $x \in N(T)$.

Pasemos ahora a la prueba de (1).

Suponga que $N(T^{**}) \subseteq X$. Puesto que $N(T^{**})$ es w^*-cerrado en X^{**} (Teorema 2.5 (iii)), se sigue de la primera parte que el subespacio $N(T)$ es w^*-cerrado en X^{**}. Un llamado al Corolario 2.4, nos dice que $N(T)$ es reflexivo (en X). Por otro lado, ${}^{\perp}(R(T^*)^{\perp}) = \overline{R(T^*)}$ (Teorema 2.2 (i)), mientras que el Teorema 2.5 nos dice que $R(T^*)^{\perp} = N(T^{**})$. Usando de nuevo el Teorema 2.2 (ii) y el hecho de que $N(T^{**}) = N(T)$ resulta que $\overline{R(T^*)} = {}^{\perp}(R(T^*)^{\perp}) = {}^{\perp}N(T^{**}) = ({}^{\perp}R(T^*))^{\perp} = \overline{R(T^*)}^*$. Esto dice que $\overline{R(T^*)}$ es w^*-cerrado. (Observe que ${}^{\perp}N(T^{**}) = N(T)^{\perp}$ ya que $N(T^{**}) = N(T)$).

Supongamos ahora que $N(T)$ es reflexivo (en X) y $\overline{R(T^*)}$ es w^*-cerrado. Por el Teoremas 2.5(ii), $N(T) = {}^{\perp}R(T^*)$ y por el Teorema 2.2(ii), $N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}^*$. Por hipótesis, $\overline{R(T^*)}^* = \overline{R(T^*)}$ por lo que $N(T)^{\perp\perp} = R(T^*)^{\perp} = N(T^{**})$. Por el Teorema Bipolar [TL, pág. 162], $N(T)^{\perp\perp} = \overline{N(T)}^*$ y como $N(T)$ es reflexivo resulta que es w^*-cerrado, por el Corolario 2.4, y así $N(T)^{\perp\perp} = N(T)$. De esto se deduce $N(T) = N(T^{**}) \subseteq X$.

Prueba de (2).

(i) implica (ii). Si T es Tauberiano, entonces $N(T^{**}) \subseteq X$ trivialmente. Probemos que $T(B_X)$ es cerrado. Sea (x_n) una sucesión en B_X tal que $Tx_n \to y \in Y$. Puesto que B_X^{**} es w^*-compacto y contiene a B_X, entonces existe una subred(x_β) de (x_n) tal que $x_\beta \xrightarrow{w^*} x^{**} \in B_X^{**}$. Ya que T^{**} es w^*-w^* continuo, $T^{**}x_\beta \xrightarrow{w^*} T^{**}x^{**}$

y como $T^{**}x_\beta = Tx_\beta \in Y$ entonces $y^*(Tx_\beta) \longrightarrow y^*(T^{**}x^{**})$ para cada $y^* \in Y^*$. Como $Tx_n \longrightarrow y$ en norma, $Tx_\beta \longrightarrow y$ en norma por lo que, $y^*(Tx_\beta) \longrightarrow y^*(y)$ para cada $y^* \in Y^*$. Así, $y^*(T^{**}x^{**}-y)=0$ para todo $y^* \in Y^*$, por lo cual $T^{**}x^{**} = y \in Y$. Por ser T Tauberiano, $x^{**} \in X$ y en consecuencia existe un $x \in X$ tal que $x=x^{**}$. Puesto que $\|x\| = \|x^{**}\| \leq 1$, entonces $x \in B_X$ y así $Tx = y$. Esto prueba que $T(B_X)$ es cerrado.

(ii) implica (iii) es trivial.

(iii) implica (i). Suponga que $N(T^{**}) \subseteq X$ y $\overline{T(B_X)} \subseteq R(T)$. Sea $x^{**} \in X^{**}$ tal que $T^{**}x^{**} \in Y$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $x^{**} \in B_X{}^{**}$. Siendo B_X w*-denso en $B_X{}^{**}$, existe una red (x_β) en B_X tal que $x_\beta \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Por la w*-w* continuidad de T^{**}, $T^{**}x \xrightarrow{w^*} T^{**}x^{**}$, pero como $T^{**}x_\beta = Tx_\beta \in T(B_X)$ entonces, $y^*(Tx_\beta) \longrightarrow y^*(T^{**}x^{**})$ para todo $y^* \in Y^*$. Por otra parte, como todo subconjunto convexo y cerrado de Y es débilmente cerrado en Y (DS, Teo. V.3.13), resulta que $\overline{T(B_X)}$ es débilmente cerrado en Y, de donde se deduce que $T^{**}x^{**} \in \overline{T(B_X)}$. Por la hipótesis, existe $x \in X$ tal que $T^{**}x^{**} = Tx$, por lo que $x^{**} - x \in N(T^{**})$. Como $N(T^{**}) \subseteq X$, por (iii), deducimos que $x^{**} = x \in X$. Esto dá por finalizada la demostración.

De la observación hecha al comienzo de la demostración del teorema anterior, se deduce rápidamente:

COROLARIO 3.5. Si $T: X \to Y$ es Tauberiano con X no reflexivo, entonces $N(T^{**}) \neq X$.

Para el caso en que T es uno-a-uno, una aplicación de los Teoremas 3.3 y 2.5 (v) nos dá:

COROLARIO 3.6. Sea $T: X \to Y$ un operador uno-a-uno. T es Tauberiano si y sólo si $R(T^*)$ es norma-denso en X^* y $T(B_X)$ es cerrado.

A un operador Tauberiano uno-a-uno lo llamaremos una inyección Tauberiana.

Recordemos que un espacio de Banach X es WCG (*Weakly Compactly Generated*) si existe en X un subconjunto débilmente compacto K tal que el subespacio generado por K sea norma-denso en X (Véase [L]).

COROLARIO 3.7. Sea $T: X \to Y$ una inyección Tauberiana.

(i) Si Y^* es WCG, entonces X^* es WCG.

(ii) Si Y^* es WCG, entonces $T^{**}(B_{Z^*})$ es w*-secuencialmente compacto para cada subespacio Z de X^*.

(iii) Si Y^{**}/Y es separable, entonces X^* es WCG.

PRUEBA.

(i) Puesto que T es una inyección Tauberiana, $R(T^*)$ es norma-denso en X^*, por lo que X^* es WCG si Y^* lo es [L, pág. 239]. La condición "Y^{**}/Y es separable", implica Y^* es WCG [K.Teo. 3.5]. Así X^* es WCG por (i). Esto prueba (iii). Por un resultado de Amir-Lindenstrauss [AL]: "si X es WCG, entonces B_{Z^*} es w*-secuencialmente compacto para cualquier subespacio Z de X". Por lo tanto, si Y^* es WCG entonces X^* es WCG (por(i)), y por el resultado de Amir-Lindenstrauss y la w^*-w^* continuidad de T^{**}, tenemos que $T^{**}(B_{Z^*})$ es w^*-secuencialmente compacto para cualquier subespacio Z de X^*, esto prueba (ii).

Siguiendo con las caracterizaciones de operadores Taauberianos por medio de imágenes cerradas, en el mismo artículo Kalton y Wilansky obtienen:

TEOREMA 3.8. [**KW**]. Para un operador $T: X \to Y$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es Tauberiano.

(ii) Para cada subconjunto acotado K de X, TK es relativamente débilmente compacto si y sólo si K es relativamente débilmente compacto.

Una nueva caracterización la obtuvieron Neidinger y Rosenthal [NR].

TEOREMA 3.9. [**NR**]. Sea $T: X \to Y$ un operador. Son equivalentes las siguientes condiciones:

(i) T es Tauberiano

(ii) Para todo K acotado y débilmente cerrado de X, TK es débilmente cerrado.

(iii) Para todo K convexo, cerrado y acotado de X, TK es cerrado.

(iv) Para todo K convexo, simétrico, cerrado y acotado de X, TK es cerrado.

(v) N(T) es reflexivo y para todo subespacio Z de X, $T(B_Z)$ es cerrado.

(vi) N(T) es reflexivo y para todo subespacio Z de X, $\overline{T(B_Z)} \subseteq TZ$.

Si X no es reflexivo, la siguiente también es equivalente:

(vii) $R(T)$ es de dimensión infinita y para todo subespacio Z de X, $\overline{T(B_Z)} \subseteq TZ$.

Una sucesión (x_n) de X se denomina *Débil-Cauchy* si $(x^*(x_n))$ converge para cada x^* en X^*. Un subconjunto K de X es *Débilmente-Pre-compacto* si cada sucesión acotada de K tiene una subsucesión débil-Cauchy. Diremos que X *no contiene copia de* ℓ_1, si ningún subespacio de X es linealmente homeomórfico a ℓ_1. Por un resultado de H.P. Rosenthal [Ro, Teo. 3, pág. 808], el espacio X no contiene copia de ℓ_1 si y sólo si B_X es débilmente pre-compacto.

TEOREMA 3.10. Sean $T: X \to Y$ una inyección Tauberiana y K un subconjunto acotado de X. Entonces K es débilmente pre-compacto si y sólo si TK es débilmente pre-compacto.

PRUEBA. Suponga que K es débilmente pre-compacto. Sea (y_n) una sucesión en TK. Entonces existe una sucesión (x_n) en K tal que $y_n = Tx_n$. Puesto que K es acotado y débilmente pre-compacto, existe una subsucesión de (x_n), que seguiremos llamando (x_n), tal que $(x^*(x_n))$ converge para $x^* \in X^*$. Sea $y^* \in Y^*$. Ya que T^*y^* está en X^* y como $y^*(Tx_n) = (T^*y^*)x_n$, vemos que $(y^*(Tx_n))$ converge. Esto prueba que TK es débilmente pre-compacto. (observe que ésta implicación es válida para operadores en general).

Recíprocamente, suponga que TK es débilmente pre-compacto. Sea (x_n) una sucesión en K. Entonces (Tx_n) admite una subsucesión, digamos (Tx_{n_k}), tal que $(y^*(Tx_{n_k}))$ converge para cada $y^* \in Y^*$. Como T es una inyección Tauberiana, $R(T^*) = T^*(Y^*)$ es norma-denso en X^* (Corolario 3.5). En consecuencia, dados $\varepsilon > 0$ y $x^* \in X^*$, existe $y^* \in Y^*$ tal que $\|x^* - T^*y^*\| < \varepsilon/M$

donde $M = \sup \| x_n \|$. Además, existe un l_o tal que $|(T^*y^*)(x_{n_k}) - (T^*y^*)(x_{n_l})| < \varepsilon/3M$ si $k,l \geq l_o$. Por lo tanto,

$$|x^*(x_{n_k}) - x^*(x_{n_l})| \leq |x^*(x_{n_k}) - T^*y^*(x_{n_k})| + |T^*y^*(x_{n_k} - x_{n_l})|$$

$$+ |T^*y^*(x_{n_l}) - x^*(x_{n_l})| < \varepsilon \text{ para } k,l \geq l_o.$$

Esto muestra que K es débilmente pre-compacto.

COROLARIO 3.11. Sea $T: X \to Y$ una inyección Tauberiana. Entonces $T(B_X)$ es débilmente pre-compacto si y sólo si X no contiene copia de ℓ_1.

Nuestro próximo resultado (Teorema 3.16) nos dice que las inyecciones Tauberianas preservan la propiedad de *Radon-Nikodym* y la propiedad de *Krein-Milman*.

Las definiciones y resultados a ser utilizados en esta parte pueden verse en R.D. Bourgin [B].

DEFINICION 3.12. Sea D un subconjunto acotado de X. D es *Dentado* si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $x \in D$ tal que $x \notin \overline{co}\,(D \setminus B_\varepsilon(x))$, donde $\overline{co}(A)$ denota la clausura de la cápsula convexa de A y $B_\varepsilon(x)$ es la bola cerrada de centro x y radio ε.

DEFINICION 3.13. Sean K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X y (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad. Diremos que K tiene la Propiedad de Radon-Nikodym con respecto a (Ω, Σ, μ) si para cada medida vectorial $m: \Sigma \to X$, la cual es absolutamente continua con respecto a μ y tal que

$\{m(A) / \mu(A) : A \in \Sigma, \mu(A) > 0\} \subseteq K$, existe una $f \in L^1_X(\Omega,\Sigma,\mu)$ satisfaciendo $m(A) = \int_A f d\mu$ para cada $A \in \Sigma$. El conjunto K tiene la *propiedad de Radon-Nikodym* (PRN), si K tiene la propiedad de Radon-Nikodym para cada espacio de probabilidad (Ω,Σ,μ).

Una de las tantas caracterizaciones de conjuntos con la PRN, y que usaremos aquí, es la siguiente:

TEOREMA 3.14 [B, Teo. 2.3.6, pág. 31]. Para un subconjunto convexo, cerrado y acotado K de X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) K tiene la PRN

(ii) Cada subconjunto convexo y cerrado de K es dentado.

(iii) Cada subconjunto convexo, cerrado y separable de K tiene la PRN.

Otro resultado que usaremos en la primera parte del Teorema 3.17 es el siguiente:

TEOREMA 3.15 [B, Teo. 4.1.13]. Sea K un subconjunto convexo, cerrado, acotado y separable de X y sea $T: X \to Y$ un operador. Si la restricción de T a K es uno-a-uno y si TK es cerrado en Y, entonces K tiene la PRN siempre que TK la posea.

DEFINICION 3.16. [B] . Un subconjunto convexo y cerrado K de X se dice que tiene la *Propiedad de Krein-Milman* (PKM), si cada subconjunto convexo, cerrado y acotado $D \subseteq K$ satisface

$D = \overline{co}\,(ext(D))$, donde ext(D) es el conjunto de los puntos extremales de D.

J. Lindenstraus probó que si K es un subconjunto convexo y cerrado de X con la PRN, entonces K tiene la PKM [B, Teo. 3.3.6, pág. 49]. El general, el recíproco es aún un problema sin solución. En espacios duales y con K convexo y w*-compacto, ambas condiciones son equivalentes [B, Teo. 4.2.13, pág. 91].

El siguiente lema técnico es la clave del próximo resultado.

LEMA 3.1.7. Si $T: X \to Y$ es Tauberiano y $K \subseteq X$ es acotado, entonces $T(\overline{co}(K)) = \overline{co}(TK)$.

PRUEBA.

Por el Teorema 3.8 (iii), $T(\overline{co}(K))$ es cerrado. La continuidad de T y el hecho de que $T(co(K)) = co(TK)$ producen el resultado.

El siguiente teorema es nuestro principal resultado.

TEOREMA 3.18. Sean $T: X \to Y$ una inyección Tauberiana y $K \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado.

(i) K tiene la PRN si y sólo si TK tiene la PRN.

(ii) K tiene la PKM si y sólo si TK tiene la PKM.

PRUEBA.

(i) Suponga que K tiene la PRN y sea D un subconjunto convexo y cerrado de TK. Como $T: K \to TK$ es un isomorfismo afín, y T es Tauberiano, existe un subconjunto convexo, cerrado y acotado $K_1 \subseteq K$ tal que $TK_1 = D$. Teniendo K la PRN, K_1 es dentado (Teorema 3.14); esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe un $x \in K_1$ tal que $x \notin \overline{co}(K_1 \setminus B_{\varepsilon/\|T\|}(x))$. Por el Lema 3.17, $T(\overline{co}(K_1 \setminus B_{\varepsilon/\|T\|}(x))) = \overline{co}(T(K_1 \setminus B_{\varepsilon/\|T\|}(x)))$. Por ser T inyectivo, $T(K_1 \setminus B_{\varepsilon/\|T\|}(x)) = TK_1 \setminus T(B_{\varepsilon/\|T\|}(x))$ y como $T(B_{\varepsilon/\|T\|}(x)) \subseteq B_{\varepsilon}(Tx)$ se concluye que $\overline{co}(TK_1 \setminus B_{\varepsilon}(Tx)) \subseteq T(\overline{co}(K_1 \setminus B_{\varepsilon/\|T\|}(x)))$. De lo anterior resulta ahora claro que $Tx \notin \overline{co}(TK_1 \setminus B_{\varepsilon}(Tx))$; es decir, $TK_1 = D$ es dentado y por el Teorema 3.14, TK tiene la PRN.

Reciprocamente, suponga que TK tiene la PRN y sea K_1 un subconjunto convexo, cerrado y separable de K. Por ser T Tauberiano, TK_1 es cerrado y además separable (la imagen continua de un conjunto separable es separable). Como TK tiene la PRN, un llamado al Teorema 3.14 nos revela que TK_1 también la tiene. Si acudimos ahora al Teorema 3.15 éste nos garantiza que K_1 tiene la PRN, y usando de nuevo el Teorema 3.14 se concluye que K tiene la PRN.

(ii) Suponga que K tiene la PKM. Sea $D \subseteq TK$ convexo y cerrado. Por el mismo argumento dado al inicio de la prueba de (i), existe un subconjunto convexo, cerrado y acotado $K_1 \subseteq K$ tal que $T K_1 = D$. Como K tiene la PKM, $K_1 = \overline{co}(ext(K_1))$. Por ser T inyectivo, $T(ext(K_1)) = ext(TK_1)$ lo cual nos dice, de paso, que $\text{ext}(TK_1) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.17

$$TK_1 = T(\overline{co}(\text{ext}(K_1)) = \overline{co}(T(\text{ext}(K_1)) = \overline{co}(\text{ext}(TK_1))$$

significando con esto que TK tiene la PKM.

Para el recíproco, suponga que TK tiene la PKM y sea K_1 un subconjunto convexo y cerrado de K. Siendo T Tauberiano, TK_1 es convexo, cerrado y acotado (Teorema 3.9) y por consiguiente: $TK_1 = \overline{co}(\text{ext}(TK_1))$ pués TK tiene la PKM. Por el Lema 3.17, $TK_1 = T(\overline{co}(\text{ext}(K_1)))$ y la inyectividad de T nos revela que $K_1 = \overline{co}(\text{ext}(K_1))$. Esto da por finalizada la prueba.

En la demostración del teorema anterior, parte (ii), el lema 3.17 puede ser reemplazado por un resultado de A. Lindenstrauss [B, Teo. 3.1.1, pág. 39], el cual establece que si K es un subconjunto convexo y cerrado de X tal que cada subconjunto convexo, cerrado y acotado de K tiene al menos un punto extremal entonces K tiene la PKM.

Observe que en la prueba del Teorema 3.18 se obtuvo el siguiente resultado:

COROLARIO 3.19. Si $T: X \to Y$ es una inyección Tauberiana, entonces T transforma conjuntos dentados en conjuntos dentados.

COMENTARIO FINAL.

El Teorema 3.8, de Neidenger-Rosenthal, está íntimamente relacionado con los operadores *Semi-Encajados* (en inglés *Semi-Embeddings*). Una referencia es [BR]. Un operador

$T: X \to Y$ se llama un Semi-Encaje, si T es uno-a-uno y $T(B_X)$ es cerrado. X se Semi-Encaja en Y si existe un semi-encaje T de X en Y. La relación entre semi-encajes y la PRN es simple [BR, Teo. 1.1]: "Un espacio de Banach separable X tiene la PRN si X se semi-encaja en un espacio de Banach y con la PRN". Usando ese resultado Bourgain y Rosenthal demuestran rápidamente que "Todo espacio dual separable tiene la PRN" (Este resultado es conocido como el Teorema de Dunford--Pettis [B, Teo. 4.13, pág. 73]). Uno de los defectos que sufren los operadores semi-encajados es que ellos no son hereditarios sobre subespacios; esto es, si Z es un subespacio de X y $T: X \to Y$ es un semi-encaje, entonces la restricción de T a Z no es necesariamente un semi-encaje. Uno dice entonces que T es un "Semi-encaje Hereditario" si T es un semi-encaje y la restricción de T a cualquier subespacio de X es un semi-encaje. Una consecuencia inmediata del Teorema 3.9 es la siguiente:

COROLARIO. Para un operador $T: X \to Y$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es una inyección Tauberiana

(ii) T es un semi-encaje hereditario.

R E F E R E N C I A S

[AL] AMIR, D.-LINDENSTRAUSS, J: "The structure of weakly compact sets in Banach spaces", Ann. Math. 88 (1968), 35-46.

[B] BOURGIN, R.D. "Geometric Aspect of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property", Springer-Verlag Lecture Notes in Math. Nº 993, 1983,

[BR] BOURGAIN, J.-ROSENTHAL, H.P: "Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory", J. Funct. Analysis, 52 (1983), 149-188.

[C] CONWAY, J.B.: "A Course in Functional Analysis", Springer-Verlag, N.Y., 1985.

[DU] DIESTEL, J.-Uhl, J. Jr.: "Vector Measures", Math. Surveys, 15, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.

[DS] DUNFORD, N.-Schwartz, J.: "Linear Operators, Part 1", Interscience Publishers, Inc., N.Y. 1958.

[GW] GARLING, D.J.-WILANSKY, A.: "On summability theorem of Berg, Crawford and Whitley", Proc. Camb. Phil. Soc. 71 (1972), 495-497.

[H] HOLMES, R.B.: "Geometric Functional Analysis and its Applications", Springer-Verlag N.Y., 1975.

[K] KUO, T.H.: "On conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodym property", Pacific. J. Math., 59 (1975), 497-503.

[KW] KALTON, N.-WILANSKY, A.: "Tauberian operators on Banach spaces", Proc. Amer. Math. Soc., 57 (1976), 251-255.

[L] LINDENSTRAUSS, J.: "Weakly compact sets: their topological properties and the Banach spaces they generate". Symposium on infinite Dimensional Topology, Ann. Math. Studies, 69 (1972), 235-273.

[NR] NEIDINGER, R.- ROSENTHAL, H.P.: "Norm-attainment of linear functionals on subspaces and characterizations of Tauberian operators", Pacific J. Math., 84 (1985), 215-228.

[RO] ROSENTHAL, H.P.: "Some recent discoveries in the isometric theory of Banach spaces", Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 803-831.

[Ru] RUDIN, W.: "Functional Analysis", McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1973.

[TL] TAYLOR, A.-LAY, D.C.: "Introduction to Functional Analysis Sec. Edi"., John Wiley and Sons, N.Y., 1980.

[W] WILANSLY, A.: "Semi-Fredholm maps of FK-spaces", Math. Z., 144 (1975), 9-12.