Proyecto de Tesis de Pregrado

Formulación de Einsenhart de la Mecánica Clásica

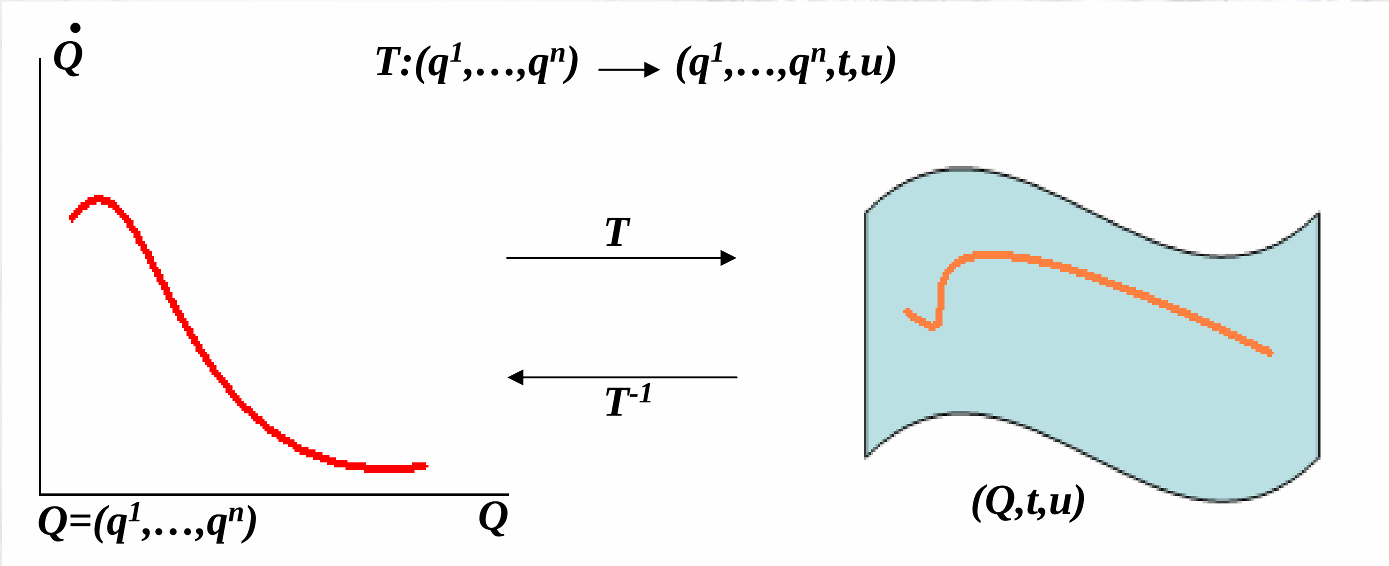
(Geometrización de la Mecánica)

Formulación de Einsenhart de la Mecánica Clásica

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela

Trayectoria en el espacio de fase de sistemas mecánicos

Geodésica en el espacio de configuración extendido (espacio-tiempo de configuración)



La formulación de Einsenhart equivale a *T y* debe cumplir con

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

✧ Las ecuaciones de las geodésicas son las ecuaciones de Lagrange del sistema mecánico para las primeras *n* dimensiones

$$T \Rightarrow \left[\frac{d^2}{ds^2} q^i + \Gamma^i{}_{jk} \frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds}\right] \longleftrightarrow^{(i,j,k)\in(1,2,\ldots,n)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} =$$

$$= \ddot{q}^i + \Gamma^i{}_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k + g^{ir}\left[jn+1, r\right]\dot{q}^j + g^{ir}g_{n+1,n+1} - \frac{1}{2}g^{ir}\left[g_{n+1n+1} - 2V\right]_{,j}$$

Ecuaciones correspondientes a las 2 dimensiones restantes (t,u)

$$\begin{cases} n+1 \Rightarrow \left[t = as\right] \\ n+2 \Rightarrow \left[u(q^i,t) = \frac{1}{2}\frac{t}{a^2} - \int L\,dt + b\right] \end{cases}$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

Utilidad de la teoría de Einsenhart*

- Sistemas caóticos: Estabilidad de trayectorias en espacios de fases vs. estabilidad de geodésicas.

- Sistemas no caóticos: cantidades conservadas bajo formulación Lagrangeana o Hamiltoniana vs. cantidades conservadas sobre geodésicas en espacios extendidos : Cálculo de cantidades conservadas y búsqueda de simetrías a partir de objetos geométricos (geodésicas).

*L. Einsenhart, Ann. of Math. **30**, (1929),591

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

Aplicación de la teoría al oscilador bidimensional isótropo
(búsqueda de cantidades conservadas)

- Establecimiento de la métrica

Energía potencial $\longrightarrow$ $V = \frac{1}{2}k(q^1)^2 + \frac{1}{2}k(q^2)^2$

Energía cinética

$$T_E = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + g_{(n+1)i}\dot{q}^i + \frac{1}{2}g_{(n+1)(n+1)} = \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}^2)^2, n = 2, i = (q^1, q^2) = (1,2)$$

Elemento de arco

$$(ds)^2 = G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{ij}dq^i dq^j + 2g_{(n+1)i}dq^i dt +$$

$$+\overline{A}(dt)^2 + 2\overline{B}dtdu = (dq^1)^2 + (dq^2)^2 - 2V(dt)^2 + 2dtdu$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

donde $\bar{B} = ctte \equiv 1$ $\quad j=(1,2) \quad (1,2,3,4) \rightarrow (q^1, q^2, t, u)$

$$\bar{A} = g_{(n+1)(n+1)} - 2V = -2V$$

con ecuaciones de movimiento

$$\ddot{q}^\mu = {}'kq^\mu, \mu = (q^1, q^2, t, u) = (1,2,3,4)$$

de solución general

$$q^1 = \cos(\sqrt{k}t + \alpha), q^2 = \cos(\sqrt{k}t + \beta), q^t = t, q^u = u$$

Para establecer el tensor métrico notamos que

$g_{(n+1)i}\dot{q}^i = g_{(t)1}\dot{q}^1 = g_{(t)2}\dot{q}^2 = 0 \rightarrow$ $\rightarrow g_{31} = g_{32} = 0$	$\frac{1}{2} g_{tt} = \frac{1}{2} g_{33} = 0,$
$g_{11} = g_{22} = 1$	$n + 1 = 3 = t,$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

y tenemos que la métrica de la variedad extendida es:

$$(G)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2V_{(q_1,q_2)} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ó \quad (G)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k((q^1)^2 + (q^2)^2) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cálculo de los Vectores de Killing

Luego de calcular conexiones (Christoffel de 1er y 2do tipo) y establecer el campo vectorial (de Killing) sobre el que se Lie-derivó, determinamos las (10) ecuaciones de Killing:

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

- $\frac{\partial}{\partial q^1}\xi_1 = 0$ $\quad$ - $\frac{\partial}{\partial q^2}\xi_2 = 0$ $\quad$ - $\frac{\partial}{\partial q^4}\xi_4 = 0$

- $\frac{\partial}{\partial q^2}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial q^1}\xi_2 = 0$ $\quad$ - $\frac{\partial}{\partial q^u}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial q^1}\xi_u = 0$
- $\frac{\partial}{\partial q^u}\xi_3 + \frac{\partial}{\partial q^3}\xi_u = 0$ $\quad$ - $\frac{\partial}{\partial q^u}\xi_2 + \frac{\partial}{\partial q^2}\xi_u = 0$

- $\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial q^3}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial q^3}\xi_1) + kq^1\xi_4 = 0$
- $\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial q^3}\xi_2 + \frac{\partial}{\partial q^2}\xi_3) + kq^2\xi_4 = 0$

- $\frac{\partial}{\partial q^3}\xi_3 - kq^1\xi_1 - kq^2\xi_2 = 0,\ \underline{para\ \xi_\mu = \xi_\mu(q^1, q^1, t, u)}$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

cuya solución es:

$$\xi_1 = C_3 q^2 + C_1 sen(\sqrt{k}t) + C_2 \cos(\sqrt{k}t)$$

$$\xi_2 = -C_3 q^1 + C_4 sen(\sqrt{k}t) + C_5 \cos(\sqrt{k}t)$$

$$\xi_3 = \sqrt{k}\left(C_2 q^1 + C_5 q^2\right) sen(\sqrt{k}t) - \sqrt{k}\left(C_1 q^1 + C_4 q^2\right)\cos(\sqrt{k}t) -$$
$$-C_6 k\left((q^1)^2 - (q^2)^2\right) + C_7$$

$$\xi_4 = C_6, \qquad \xi_\mu = \xi_\mu(q^1, q^1, t, u)$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
*Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela*

- Cálculo de Momentos

$$(\dot{x}_\nu = G_{\nu\mu}\dot{x}^\mu)\,*$$

$$P^1 = P^{q^1} = \dot{q}^1 \overset{por*}{=} \dot{q}_1$$

$$P^2 = P^{q^2} = \dot{q}^2 \overset{por*}{=} \dot{q}_2$$

$$P^3 = P^t = \dot{t} \overset{por*}{=} \frac{dt}{ds} = 1, (ds = a(dt), a \equiv 1)$$

$$P^4 = P^u = \dot{x}^3 + 2V\dot{x}^4 \overset{por*}{=} (-2V + \dot{u}) + 2V = \dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}$$, donde

$$u = \frac{t}{a^2} - \int L dt \rightarrow \dot{u} = 1 - \frac{1}{2}\left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2\right] + \frac{k}{2}\left[(q^1)^2 + (q^2)^2\right]$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

Ahora tenemos todos los ingredientes para calcular la cantidad conservada en el espacio extendido y que denominaremos "Cantidad Einsenhart" (J_E):

$$J_E = \xi_a P^a = - \ (C_3 \cos(\sqrt{k}t + \beta) + C_1\, sen(\sqrt{k}t) +$$

$$_2\cos(\sqrt{k}t)\ sen(\sqrt{k}t + \alpha)\sqrt{k}\ \cos(\sqrt{k}t + \beta)\ \sqrt{k}\, sen +$$

$$+ \ C_4 sen(\sqrt{k}t)) + C_5((-\cos(\sqrt{k}t + \beta)\ sen(\sqrt{k}t + \beta)) +$$

$$\sqrt{k}\ (C_2 \cos(\sqrt{k}t + \alpha) + C_5 \cos(\sqrt{k}t + \beta)\ \sqrt{k}\ sen(\sqrt{k}t) +$$

$$C_5 \cos(\sqrt{k}t + \beta)\ \sqrt{k}\, sen(\sqrt{k}t) - C_4\sqrt{k}\ \cos(\sqrt{k}t + \beta)) +$$

$$C_5(-\cos(\sqrt{k}t + \beta))sen(\sqrt{k}t + \beta)\sqrt{k} + C_2\cos(\sqrt{k}t + \beta) +$$

$$+ C_2\cos(\sqrt{k}t + \beta) + (C_6(1 - \frac{1}{2}sen(\sqrt{k}t + \alpha)^2)k - \sqrt{k}C_7$$

$$\frac{1}{2}sen(\sqrt{k}t + \beta)^2 k) - \frac{1}{2}k(\cos(\sqrt{k}t + \alpha)^2 + sen(\sqrt{k}t + \beta)^2$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida
Venezuela

Cantidad de Movimiento no-Noetheriana “Tipo Hojman” Vs. Cantidad de Movimiento “Tipo Einsenhart”.

(En adelante k=1 y se usan desde el inicio la solución de las ecuaciones de movimiento)

Cantidad de Movimiento no-Neatheriana (S. Hojman and F. Zertuche. Nuevo Cimento Soc. Ital. Fis. B, **88**, 1 (1985):

$$J_H = AB\left[\cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\beta)sen(\alpha)\right]$$

“Cantidad de Movimiento Einsenhart”:

$$\begin{aligned} J_E &= C_7 - C_2 sen(\alpha) - C_3 sen(\alpha)\cos(\beta) + \\ &+ C_3 sen(\beta)\cos(\alpha) - C_4\cos(\beta) - C_1\cos(\alpha) \\ &+ C_5 sen(\beta) \end{aligned}$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

¿Será la “Cantidad Hojman” un caso particular de la “Cantidad Einsenhart”?

Lo es para el siguiente conjunto de condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_1,...,C_6, A, B, k, \alpha, \beta) \ y \ C_7 = C_2 sen(\alpha) + C_3 sen(\alpha)\cos(\beta) - \\ - C_3 sen(\beta)\cos(\alpha) + C_4 \cos(\beta) + C_1 \cos(\alpha) + C_5 sen(\beta) + \\ AB\cos(\beta)\cos(\alpha) + ABsen(\beta)sen(\alpha) \end{array} \right\}$$

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela

Comentarios Finales

Ya que la “Cantidad Hojman” resultó caso particular “Einsenhart ” se afianza la conjetura de que este enfoque geométrico puede ser el más general para estudiar simetrías y calcular cantidades conservadas en mecánica clásica.

Posteriormente extenderemos la formulación de Einsenhart al oscilador bidimensional *anisótropo* comparando resultados en el marco Lagrangeano-Hamiltoniano.

M. Zambrano, L.A. Núñez y U. Percoco
Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela