Los números cíclicos como actividad lúdica, curiosa e investigativa en la clase de matemática

Reinaldo Antonio Cadenas Aldana

Universidad de Los Andes, Departamento de Medición y Evaluación
rcadena@ula.ve

RESUMEN

Hemos diseñado una serie de actividades para el aula de clase que generan problemas que pueden ser desarrollados por estudiantes en un ambiente diferente a los modelos clásicos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. A través de una propuesta participativa en donde se debe privilegiar la acción grupal, sustentada en las propiedades aritméticas de los números cíclicos (son los períodos que generan los cocientes entre la unidad y algunos números primos). Así, proponemos actividades relacionadas con curiosidades matemáticas, trucos matemáticos y problemas de investigación para que los estudiantes logren aprendizajes significativos mientras investigan y construyen.

Palabras clave: Números cíclicos, números primos, números racionales, permutaciones.

We have designed a series of activities for the classroom through problems solving. These can be worked by our students in a different setting from the classical models of teaching-learning mathematics. Through a proposal where participating in an active group is the center, it is based on arithmetical properties of the cyclical numbers (are periods that generate quotients between the prime unit and some prime numbers). Thus, we propose activities related to mathematical curiosities, mathematical tricks and problems of investigation so that students can obtain significant learning while they have fun, investigate and construct.

Keywords: Cyclical numbers, prime numbers, rational numbers, exchanges.

ABSTRACT

Introducción

La siguiente propuesta está estructurada en catorce actividades destinadas a docentes y alumnos, en la cual queremos descubrir la existencia de una clase de números (cíclicos) que por sus características deslumbran, entretienen y abren las puertas para realizar actividades investigativas tanto en el aula como fuera de ella. Como objetivo nos planteamos utilizar nuevas herramientas distintas al lápiz y papel, para realizar actividades abiertas e innovadoras que permitan al estudiante construir y descubrir conocimientos, mostrándole que la Matemática no es una ciencia acabada y cerrada.

En esta línea de trabajo, Abrate, Luján y Pochulu (2006) proponen: "... pensamos que es muy importante generar en clases situaciones significativas, que maravillen, deslumbren o intriguen al alumno e impidan que el olvido llegue tan fácil" (p. 233). Así, planteamos actividades basadas en el constructivismo como teoría de aprendizaje, relacionadas con curiosidades matemáticas, trucos matemáticos y problemas de investigación para que los estudiantes logren aprendizajes significativos mientras se investigan y construyen. Para esto propongo algunas actividades y otras se tomaron de los trabajos de: Abrate, Pochulu, y Vargas (2006), Alegría (2006), Gamietea (2002), Gardner (1979) y Ruiz (2006) .

ACTIVIDADES

Actividad 1. Comencemos nuestro estudio dividiendo la unidad (1) entre el número primo siete (7) hasta encontrar el período de fracción 1/7, la idea de la división en este caso es hacerla de manera tradicional (con lápiz y papel), como se muestra en la Figura 1, en esta actividad el docente debe guiar al estudiante a encontrar el periodo de la fracción, que es de seis dígitos, aquí puede comparar los cálculos a mano y la utilización de la calculadora.

1	7
10	0,1428571...
30	
20	
60	
40	
50	
1	

Figura1. División de uno (1) entre siete (7)

En consecuencia, el período del cociente 1/7 es: 142857, este número será el eje central de nuestro estudio. En adelante se le sugiere al docente desarrollar las actividades organizando grupos, en los casos que lo requiera usar calculadoras y computadoras.

Actividad 2. (Alegria, 2006). Analicemos un caso muy interesante, veamos que ocurre con n x 142857, donde n recorre todos los números naturales entre uno (1) y seis (6), ver Figura 2, nótese que los dígitos son tomados en el orden en que aparecen en los restos de la división anterior y que están resaltados.

1 x 142857	142857
3 x 142857	428571
2 x 142857	285714
6 x 142857	857142
4 x 142857	571428
5 x 142857	714285

Figura 2. El número 142857 multiplicado por cada número natural entre uno y seis

Nótese que coincide la secuencia de los dígitos: 1, 3, 2, 6, 4, 5 con la secuencia de las cifras que van multiplicando al número cíclico para dar lugar a sus permutaciones cíclicas. Para justificar esto podemos indicar cada paso de la división como se indica en la Figura 3:

Paso1

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

Figura 3. División de diez entre siete

Claramente,

$$10 = 7x1+3 \Rightarrow \frac{10}{7} = 1+\frac{3}{7} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{10}{7} - 1 = 1{,}4287514... - 1 = 0{,}4287514...$$

Concluimos que la primera cifra del período se “quita” cuando 1/7 se multiplica por 3, el primero de los restos progresivos de la división. De acá se deduce que la primera permutación cíclica se obtiene al multiplicar por 3 el número cíclico inicial. Sucesivamente podemos continuar el proceso como vemos en la Figura 4.

Paso 2

100	7
30	14
2	

Figura 4. División de cien entre siete

Y procedemos de manera similar al caso anterior, concluyendo que las dos primeras cifras del período se “quitan” cuando 1/7 se multiplica por 2, el segundo de los restos progresivos de la división. De donde se infiere que la segunda permutación cíclica se obtiene al multiplicar el número inicial por 2. Así, podemos continuar para justificar el resto de las permutaciones cíclicas que aparecen en la Figura 2.

Con la actividad anterior podemos construir un juego conocido como la pulsera mágica. Supongamos que tenemos un dado y una banda de papel como la de la Figura 5. Pedimos a un estudiante lanzar el dado, el resto de los estudiantes multiplica el número que sale en la cara superior del dado por el número: 142857. Entonces, de inmediato el docente muestra el número que se obtiene en la pulsera mágica.

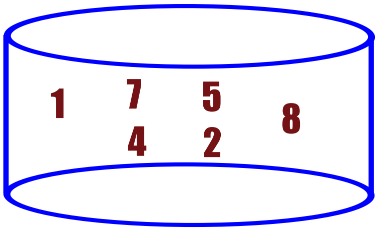

Figura 5. La pulsera mágica

Actividad 3. (Gamietea 2002). Ahora, tomemos cada permutación de los dígitos que forman el número 142857 y multipliquemos por 7, la figura 6 recoge los resultados.

142857 x 7	999999
428571 x 7	2999997
285714 x 7	1999998
857142 x 7	5999994
571428 x 7	3999996
714285 x 7	4999995

Figura 6. Cada permutación del número 142857 multiplicado por cada número natural entre uno y seis

Aparece el número nueve por todos lados; obsérvese cómo: $7\times 142857 = 999999$ donde los seis dígitos son nueves, y en el caso de una permutación de 142857 la suma de los extremos da siempre nueve, como se puede ver con el número 857142, que es una permutación del número 142857. Ahora, 7 x 857142 = 5999994, que tiene siete dígitos, nótese que si sumamos los dígitos de los extremos (resaltados) suman nueve ($5 + 4 = 9$).

En esta actividad el docente puede deslumbrar a los estudiantes resolviendo la tabla simultáneamente con ellos en una fracción de tiempo mucho menor. Además, debe explicar lo que ocurre cuando suma los extremos, para que descubran la "magia" de la actividad.

Actividad 4. (Gamietea, 2002). Usemos una o más copias del número 142857 y sigamos multiplicando por 7, como se muestra en la Figura 6.

142857 x 7	999999
142857142857 x 7	999999999999
142857142857142857 x 7	999999999999999999

Figura 7. Copias del número 142857 multiplicado por siete

De los resultados concluimos que, por cada copia de 142857 multiplicada por 7 obtenemos una copia de seis nueves. El docente puede resolver rápidamente y entregar a un estudiante el resultado mientras es resto resuelve. También puede mostrar las limitaciones de los resultados que aparecen en las calculadoras y en algunos casos la imposibilidad de usarlas como en la tercera operación (Figura 7).

Actividad 5. (Gamietea, 2002). Usemos otra permutación del número 142857 y con una o más copias de la misma sigamos multiplicando por 7 (ver Figura 8).

428571 x 7	2999997
428571428571 x 7	2999999999997
428571428571428571 x 7	2999999999999999997

Figura 8. Multiplicación de una permutación del número 142857 por siete

Sucedió algo parecido al caso anterior, pero vemos que falta un nueve que es la suma de los dígitos de los extremos. El docente puede realizar la misma estrategia de la Actividad 4, para adivinar el resultado y proponiendo números más grandes para inducir el resultado sin realizar la operación. Efectuando la actividad anterior con cualquier otra permutación del número 142857, será fácil adivinar el resultado final (ver Actividad 3).

Actividad 6. (Abrate, Pochulu, y Vargas, 2006). El docente propone dividir un número natural entre uno y seis, entre el número 7, hasta encontrar el periodo de la fracción, ver en la Figura 9.

1/7	0, 142857142857142857 …
2/7	0, 285714285714285714 …
3/7	0, 428571428571428571 …
4/7	0, 571428571428571428 …
5/7	0, 714285714285714285 …
6/7	0, 857142857142857142 …

Figura 9. Periodos de fracciones con numerador entre 1 y 6, y denominador 7

Los períodos de cada expresión decimal son interesantes. El de 1/7 da 142857, y el resto de los cocientes tienen período las permutaciones de 142857. Igual que una actividad anterior, un estudiante puede lanzar un dado y el número que muestra la cara superior se divide entre siete, luego puede mostrar el resultado inmediatamente sin hacer los cálculos, mostrando de nuevo la propiedad cíclica del número 142857.

Actividad 7. Ahora, dividamos potencias de 10 con 7, como en la Figura 10.

10^6	142857, 142857 ...
$10^{12}/7$	142857142857, 142857 ...

Figura 10. Potencias de diez entre siete

Interesante, con 10^6 obtenemos una expresión decimal cuya parte entera es una copia de 142857 y el período es 142857. Mientras que con 10^{12} obtenemos una expresión decimal cuya parte entera tiene dos copias de 142857 y el período es 142857. En esta actividad, el docente propone al estudiante escoger potencias de 10 con exponente 6 o mayor que seis, pero estos deben ser múltiplos de seis y que se dividan entre siete, de inmediato escriben el resultado. De nuevo el estudiante puede usar su calculadora para comparar resultados.

Actividad 8. En la Figura 11, mostramos una serie de nueves divididos entre siete.

999999/7	142857
999999999999/7	142857142857

Figura 11. División de nueves entre siete

Vemos que, al dividir seis nueves entre siete obtenemos 142857 y al dividir doce nueves entre siete hallamos dos copias de 142857. Aquí, el profesor introduce en una caja de tarjetas con colecciones de 6, 12, 18, etc. (múltiplos de 6) de nueves y solicita a los estudiantes tomar una tarjeta y entre 7. El docente suministra el resultado inmediatamente después que los estudiantes hayan hecho la prueba y así pueden comprobar la veracidad de la respuesta usando la calculadora o la computadora.

Actividad 9. (Gardner, 1979). En la Figura 12 mostramos la multiplicación de 142857 por números mayores que 7.

142857 x 8	1142856
142857 x 9	1285713
142857 x 10	1428570
142857 x 11	1571427
142857 x 12	1714284
142857 x 13	1857141

Figura 12. Multiplicación del número 142857 por números mayores que 7

Los estudiantes deben percatarse que al multiplicar 142857 por 8, 9, 10, 11, 12 y 13 hallamos una "permutación cíclica" de 142857 salvo un dígito, el cual se obtiene sumando los dígitos de los extremos. Para esto, el docente propone a sus estudiantes que piensen un número mayor que 7 y menor que 14 y que lo dividan entre 7, luego que sumen los dígitos que forman el número. El docente adivinará el resultado final: ¡27!

Actividad 10. (Ruiz, 2006). Sea $\alpha = 142857$, la Figura 13 muestra algunos productos de 142857 por múltiplos de 7.

7 x α = 1 x 7 x α = (1 - 1)(1000000 - 1) = 999999
14 x α = 2 x 7 x α = (2 - 1)(1000000 - 2) = 1999998
21 x α = 3 x 7 x α = (3 - 1)(1000000 - 3) = 2999997
28 x α = 4 x 7 x α = (4 - 1)(1000000 - 4) = 3999996
35 x α = 5 x 7 x α = (5 - 1)(1000000 - 5) = 4999995

Figura13. Multiplicación del número 142857 por múltiplos de 7

En conclusión, podemos decir que si **m** es múltiplo de **7**, entonces **m = n x 7** para algún **n** número entero.

Luego,

mx142857=(nx7)142857=(n-1)(1.000.000-n)

el docente propone a sus alumnos que piensen en un número múltiplo de 7, entre 7 y 70. En cada caso el docente debe llevar a los estudiantes a adivinar el resultado.

Actividad 11. (Alegría, 2006). Coloque el número 142957 y sus permutaciones como los seis vértices de un hexágono. Luego, proceda a sumar los vértices opuestos como lo se indica en la Figura 14.

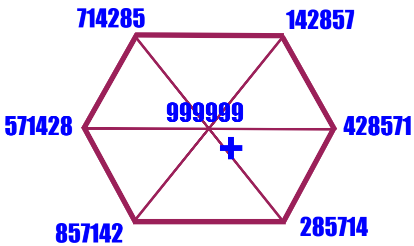

Figura14. Suma de los vértices opuestos en un hexágono (cíclico)

Lo interesante aquí es que la suma siempre nos da el mismo número: 999999. El docente construye un dado con los números 142857 y sus permutaciones, pide a sus estudiantes lanzar el dado dos veces (si aparece el mismo número repite hasta que sean distintos) y suman los dos resultados, los estudiante deben intentar adivinar el cálculo final anticipadamente.

Actividad 12. (Gardner, 1979). Todas las operaciones conducen al 9, observe en la Figura 15.

14+28+57 = 99, 9+9=18, 1+8=9
142+857 = 999, 9+9+9=27, 2+7=9
143+999 = 142857, 1+4+2+8+5+7=27, 2+7=9
(142857)2 = 20408122449, 2+0+4+0+8+1+2+2+4+4+9=36, 3+6=9
20408+122449 = 142857, 1+4+2+8+5+7=27, 2+7=9
(142857)3 = 2915443148696793, 2+9+1+5+4+4+3+1+4+8+6+9+6+7+9=81, 8+1=9

Figura 15. Operaciones varias con los dígitos de 142857

Algunas consecuencias que se obtienen de las operaciones detalladas en la Figura 15 son:

a) Al agrupar los dígitos de 142857 de dos en dos (como aparece en la tabla anterior) el resultado es la colección de dos nueves, y si son grupos de tres el resultado son tres nueves. Además, la suma de los dígitos de cada resultado nos conduce a 9.

b) La multiplicación de 143 (= 142 + 1) por 999 nos da 142857 y de nuevo la suma de los dígitos del resultado nos conduce a 9.

c) Los cuadrados y los cubos de 142857 conducen a números cuya suma de los dígitos nos llevan al 9. Además, la suma de los cinco primeros dígitos con los siguientes seis dígitos del cuadrado de 142857 da 142857. ¿Qué otras conclusiones podemos dar?

d) Conociendo los tres primeros dígitos 142 podemos hallar el número completo con tan sólo agregar los dígitos para completar tres nueves, en efecto, 142 857.

En la actividad, el docente entrega en un sobre un resultado, a varios estudiante propone resolver las operaciones indicadas en la figura 15. Al final se abrirá el sobre para ver el resultado.

Actividad 13. Tome cualquier número natural mayor o igual que uno y dividamos ese número por 7. En la Figura 16 mostramos un ejemplo:

183 / 7 = 26,142857
654 / 7 = 93,428571
13 / 7 = 1,857142
987654321 / 7 = 141093474,428571
868 / 7 = 124

Figura 16. División de algunos números entre siete

Vemos que la división siempre genera una expresión decimal con un período que es una permutación cíclica de 142857, siempre que el número que tomemos (numerador) no sea múltiplo de 7. Cuando el numerador es múltiplo de 7 el cociente de la división es un entero y se puede calcular usando la estrategia planteada en la actividad 10. Así, el docente en el aula propondrá tomar cualquier número que no sea múltiplo de 7, el estudiante procede a dividir el número seleccionado entre siete para descubrir el resultado, el docente adivinará el número resultante de la suma de los dígitos que forman el periodo de la división.

Actividad 14. (Gardner, 1979). A partir del número primo 7 generemos el número 142857,

$$1/7 = 0{,}142857142857\ldots$$

es decir, el cociente de 1 entre 7 genera una expresión decimal cuyo período es el número 142857 que tiene seis dígitos. Ahora precisemos el significado de "número cíclico":

Un número como 142857 cuando se multiplica por los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, genera permutaciones de los dígitos que lo conforman. En general, un número α de n-dígitos se llama **cíclico**, si el resultado de k x con $1 \leq k \leq n$, es una permutación cíclica de α. El número 142857 es el menor número cíclico, y el siguiente es 0588235294117647 que tiene 16 dígitos, el cual se encuentra al dividir 1 entre 17. ¿Y si dividimos 1 entre 13 o 1 entre 19? En estos casos la calculadora no ayuda y es necesario utilizar algún software de Matemática tipo MAPLE, por ejemplo.

Lo que el docente hace en el aula, es propone dividir la unidad entre diversos números primos, los estudiantes concluirán cuáles períodos de la división generan números cíclicos. Así, se puede proponer una investigación sobre alguna propiedad general que permita conseguir números cíclicos, para ser debatida en el aula. Es en esta etapa donde comienzan a surgir y perfilarse, por parte de los alumnos y después de interactuar con el docente, preguntas como:

¿Cuántos y cuáles son los racionales que comparten estas características en su período? ¿Cómo puedo anticipar la longitud del período de un racional?¿Cuál es la mínima cantidad de dígitos que requiero conocer del período de un racional para completar la serie restante?*¿Qué estructura tendría un número racional cuyo período tiene n dígitos*? entre otras (Abrate, Pochulu, y Vargas, 2006, p. 230-231).

Conclusiones y recomendaciones

Las catorce actividades indican que podemos utilizar competencias sencillas como operar con números cíclicos, así reforzamos los conceptos de: número primo, período de una expresión decimal, división, multiplicación y número racional. Además, motivamos a través de estas competencias el uso de la calculadora y la computadora (uso del MAPLE). Asociada a cada actividad podemos crear un juego utilizando por ejemplo, un dado y un número cíclico, en esta acción la creatividad del docente y del estudiante debe aplicarse al máximo. Aunado a esto, es importante privilegiar los trabajos en grupo, generando nuevas actividades usando los números cíclicos.

Al docente se le sugiere varias estrategias dependiendo de grado de madurez y de las edades de los alumnos, por ejemplo: En primaria se pueden introducir las actividades comenzando con la actividad 1, utilizando lápiz y papel, además de reforzar la división de decimales, se puede ir orientando al alumno para que por sus propios medios pueda construir y hasta conjeturar sobre los números cíclicos y sus propiedades. Asimismo el docente puede escoger las actividades más adecuadas al nivel de primaria donde quiera aplicarlas.

En secundaria puede combinarse el trabajar las operaciones con lápiz y papel con el uso de la calculadora. Y a nivel universitario pueden combinarse: hacer las operaciones con lápiz y papel, usar la calculadora y usar el computador, en algunos casos incluso, se puede mostrar las limitaciones de los resultados obtenidos con la calculadora. También se pueden utilizar los números cíclicos para dar charlas de tipo “matemagia” donde la idea inicial es causar en los alumnos sorpresa, misterio y curiosidad.

REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). *La investigación educativa en Matemática con nuevos recursos*. Villa María: Universidad de Villa María.

Alegría, P (2006). *Números Cíclicos*. Recuperado de: http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/matemagia/Ciclico/ciclico.html

Gamietea, D. (2002). *En el mundo del 142857*. Recuperado de: http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n18/en1805.pdf

Gardner, M. (1979). *Circo Matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Ruiz, L. (2006). *Simetría: Capicúas y Otras Curiosidades Numéricas*. Recuperado de: http://www.anomalia.org/perspectivas/ci/simetria capicuas.htm