

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

**Introducción al Análisis Estadístico del
Decaimiento de Mesones B^0
En el canal $B^0 \longrightarrow K^+ \pi^- \pi^0$**

Luis Alejandro Pérez

Tutor: Dr. Luis Núñez. ULA-Venezuela.
Co-Tutor: Dr. José Ocariz. LPNHE-Francia.
CeCalCULA

7 de julio de 2005

Índice general

Introducción	5
1. Interacciones Débiles en el Sector de los Quarks.	7
1.1. Transformaciones de los Campos.	7
1.2. La Violación CP en el Modelo Estándar.	9
1.2.1. La Matriz CKM y la Violación CP	10
1.2.2. Parametrización de la Matriz CKM	13
1.2.3. El Triángulo Unitario.	14
1.3. Los Mesones B	16
1.3.1. La Mecánica Cuántica de los Mesones B Neutros.	17
1.3.2. Violación CP en el sistema de los Mesones B neutros.	19
1.3.3. Los tres Tipos de Violación CP	19
1.4. El Rol de Babar.	22
2. El Dispositivo Experimental.	24
2.1. Fábricas B	24
2.2. El detector BaBar	25
3. Probabilidad y Estadística.	29
3.1. Teoría Basica de la Probabilidad.	29
3.1.1. Probabilidades y Funciones de Densidad de Probabilidad.	30
3.2. Nociones Básicas de Estadística.	33
3.2.1. Estimación de Parámetros.	33
3.2.2. El Método de Verosimilitud Máxima.	35
4. Análisis del Canal $B^0 \longrightarrow K^+ \pi^- \pi^0$.	39
4.1. La Muestra.	41
4.1.1. Las Especies dentro de la Muestra.	43
4.2. El Modelo Estadístico.	48
4.2.1. Las Muestras de Control.	49
4.2.2. Las Variables Elegidas.	52
4.2.3. El Efecto Cortar y Contar.	56
4.2.4. Correlaciones entre las Variables Elegidas y el Plano de Dalitz.	61
4.2.5. La Eliminación de los eventos resonantes D^0 y D^-	66

4.2.6.	La Corrección del SCF.	67
4.2.7.	Correlaciones entre las Variables.	71
4.2.8.	Primera Aproximación a la Construcción del Modelo Estadístico.	73
4.2.9.	Segunda Aproximación a la construcción del Modelo Estadístico. La inclusión del Fondo BB.	84
4.3.	El Cálculo del <i>Branchin Ratio</i> semi-inclusivo sin <i>charm</i> $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$	89
4.3.1.	Ajuste de los Datos <i>On Peak</i>	90
4.3.2.	Estudios de Validación de los resultados del Ajuste.	92
4.3.3.	Correcciones por eficiencia al Número de Señal y Cálculo del <i>Branching Ratio</i>	93
4.3.4.	Incertidumbres en la Medida.	94
5.	Conclusiones.	101
A.	Los <i>sPlot</i> y el Cálculo de <i>Branching Ratios</i>.	102

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad de Los Andes, por brindarme la oportunidad de formarme como un profesional.

Al Dr. Luis Núñez y al Dr. José Ocariz, mis tutores, por orientarme durante la realización de este trabajo.

Al Parque Tecnológico de Mérida, por permitirme formar parte de su grupo de trabajo.

A la Fundación Gran Mariscal de Ayacucho, por brindarme el financiamiento sin el cual no hubiese sido posible la terminación de mi carrera.

Al Dr. Marcos Rodriguez, por su apoyo sincero, para mi es usted un excelente ejemplo a seguir.

A CeCalCULA, por prestarme la logística para la realización de este trabajo.

Al Centro de Física Fundamental, por brindarme un ambiente académico durante mis estudios de pregrado.

A mi madre, por ser la fuente de apoyo más importante de mi vida, eres un ejemplo de valor y fortaleza.

A mis hermanas, Mariana, Carolina y Ana Julia, por que de una u otra forma han contribuido a mi logro.

A mis Tios, Obdulina y Rafael, y a mis primos, Angel y Reinado, por que a pesar de la distancia su confianza ha sido una fuente de animo.

A Yuleydis y Familia, por aceptarme como uno más de la familia.

Al M. Sc. Juan Luis Chaves, por la valiosa y desinteresada ayuda que me ha brindado.

A los muchachos de la Sala de Estudios Galileo Galilei, por ser amigos y un grupo de verdaderos estudiantes.

Al Dir. OTM, Marcos Zambrano, por ser un buen amigo.

A todos los que de alguna manera han contribuido con este logro,

MUCHAS GRACIAS

Resumen

Documento soporte para la medida de *Branching Ratios* en decaimientos de mesones B^0 al estado final de tres cuerpos $K^+\pi^-\pi^0$. Se ha medido el *Branching Ratio* semi-inclusivo sin *charm* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$ a través de un ajuste de Verosimilitud Máxima extendida. La data utilizada es proveniente de *Run 1 - 4* de PEP-II en SLAC. El valor que se ha obtenido es $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0) = (3,11 \pm 0,17 \pm 0,19) \times 10^{-5}$, en donde la primera componente del error es la parte estadística y la segunda componente es la parte sistemática.

Introducción

Una simetría es una operación que lleva a un sistema de una configuración inicial a una final tal que, ambas configuraciones son físicamente indistinguibles. Estas simetrías se relacionan directamente con ciertas leyes de conservación. Por ejemplo, el hecho de que un sistema sea invariante bajo traslaciones espaciales, traslaciones temporales y rotaciones, es sinónimo de que cantidades tales como: el momentum lineal, la energía y el momentum angular respectivamente, sean constantes en el tiempo.

Las simetrías de un sistema físico pueden formar un conjunto que se conoce en matemáticas como grupo. El grupo de la relatividad restringida es el llamado grupo de Poincaré. Este grupo está conformado por las rotaciones y traslaciones espacio-temporales, las transformaciones de Lorentz y dos operaciones discretas: La Paridad P y la inversión temporal T . La operación de paridad o reflexión con respecto al origen, se resume en la siguiente transformación: $(t, x) \rightarrow (t, -x)$. Se dice que esta operación cambia un sistema de referencia dextrógiro por uno levógiro y viceversa. La operación de inversión temporal viene dada por: $(t, x) \rightarrow (-t, x)$. Se dice que esta operación cambia la dirección de la “flecha del tiempo”. Existe una tercera operación importante en el estudio de la física de partículas, la conjugación de carga C . Esta última no forma parte del grupo de Poincaré por no ser una transformación espacio-temporal. La conjugación de carga invierte el signo de todos los números cuánticos de carga (como la carga eléctrica, el sabor, etc.). Se dice que esta operación cambia a las partículas por sus antipartículas. Es necesario saber si estas operaciones son verdaderas simetrías de la naturaleza y si no lo son, entonces habrá de estudiarse como y en qué medida son violadas.

Desde hace mucho, se creía que C y P eran simetrías exactas de la naturaleza. Hasta el momento, las interacciones electromagnética y fuerte no violan estas operaciones. En cambio, la interacción débil sí lo hace. En 1957 se demostró experimentalmente que la paridad es violada por la interacción débil. También fue establecido que esta misma interacción viola C . Aunque C y P eran violadas, parecía que la combinación CP era una simetría exacta de la naturaleza. Hasta que en 1964 la violación CP por la interacción débil fue observada por Christenson, Cronin, Fitch y Turlay [1] en el cuadro del estudio del decaimiento de mesones K . Luego, en julio de 2001, los experimentos de *BaBar* y *Belle* obtuvieron evidencia de violación CP en el decaimiento de mesones B , treinta y cinco años después de los mesones K .

El Modelo Estándar (SM) permite incluir el fenómeno de violación de la simetría CP a través de un solo parámetro llamado fase CKM [2]. El hecho de que microscópicamente la violación CP sea un efecto pequeño (del orden del 0.2%) dependiente de

un solo parámetro y que macroscópicamente sea un efecto grande (al menos dentro de nuestro universo observable no se tiene evidencia de sistemas de antipartículas, la violación CP es del 100 %), da pie a pensar que existe física más allá del Modelo Estándar. El rol del experimento de *BaBar* es el estudio de la violación de la simetría CP en el sistema de los mesones B . Parte de este estudio es obtener suficientes restricciones experimentales para poner a prueba al Modelo Estándar, y en caso de que este falle, establecer las pautas bajo las cuales serán construidos los nuevos modelos.

Cada modelo consta de un conjunto finito de parámetros. El valor predicho por el modelo de un observable es una función de estos. Poner a prueba un modelo consiste en calcular sus n parámetros en función de m observables, que es el número de observables de los cuales se dispone. Lo que se tiene es entonces un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas. Por lo general, el número de ecuaciones excede al número de incógnitas. Si el modelo a través del cual se han calculado los observables es incorrecto, la posibilidad más plausible es que el sistema de ecuaciones sea incompatible. La función de los grandes aceleradores es proveer del mayor número de observables posibles. Entre los observables de los que se puede disponer a través de los aceleradores de partículas se encuentran los *Branching Ratios* (o Tasas de Desintegración). La finalidad de este trabajo es hacer un análisis preliminar del canal de decaimiento $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$ y la medición de un *Branching Ratio* global de este modo. Este documento será un soporte para posteriores medidas de *Branching Ratios* en el canal considerado.

El trabajo se divide en cuatro partes o capítulos. El primero pretende dar a conocer de una forma muy superficial al sistema de los mesones B y su importancia en el estudio de la violación CP . El segundo capítulo describe al dispositivo experimental sin gran detalle e ilustra que tipo de información puede ser obtenida de éste. En el tercer capítulo se da un compendio muy resumido de la teoría de la probabilidad y estadística, se describe el método de verosimilitud máxima, herramienta estadística inferencial de vital importancia para nuestro análisis. Por último, en el capítulo cuarto se trata el tema central del trabajo, el análisis del canal de decaimiento $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$.

Capítulo 1

Interacciones Débiles en el Sector de los Quarks.

La observación de la violación de la simetría CP ha puesto restricciones para la construcción de las teorías que describen a los fenómenos de la física de partículas. Las condiciones que debe satisfacer una teoría para dar cuenta de la violación de CP da lugar a un gran número de posibilidades. La labor de los físicos de partículas es analizar con cuál de estas posibilidades se rige la naturaleza. Surge entonces un sector muy fértil para poner a prueba toda teoría. El sistema de los mesones B es bastante útil en este sentido, ya que de este sistema se esperan efectos de violación CP que ofrecen estadísticas altamente competitivas. El propósito de este capítulo es dar un compendio teórico de la violación CP en el sistema de los mesones B . Se empieza mostrando cuáles son las propiedades que debe satisfacer toda teoría de campos para dar lugar a la violación CP . Posteriormente, se estudian estas propiedades dentro del Modelo Estándar y su relación con los observables. Para culminar, se hace un estudio del sistema de los mesones B neutros, los tipos de violación CP dentro de este sistema y los observables relacionados.

1.1. Transformaciones de los Campos.

Para entender cómo aparece la violación de la simetría CP en una teoría, debemos estudiar primero cómo es que los campos con los que se contruye el Lagrangiano de dicha teoría transforman bajo tal transformación. Existen tres operaciones discretas que son simetrías potenciales de un Lagrangeano de teoría de campos. Dos de ellas, *la paridad* y *la inversión temporal*, son transformaciones espacio-temporales y forman parte del grupo de Poincaré. Paridad (P), envía $(\vec{x}, t) \rightarrow (-\vec{x}, t)$, cambiando los sistemas levógiros por dextrógiros y viceversa. Inversión temporal (T), envía $(\vec{x}, t) \rightarrow (\vec{x}, -t)$, intercambiando los conos de luz hacia el pasado y el futuro. Una tercera simetría, que no es espacio-temporal, es *la conjugación de carga* (C). Esta operación intercambia a las partículas por sus antipartículas. La operación CP reemplaza a una partícula por su antipartícula e invierte momentum y elicidad. La combinación CPT es una simetría exacta de cualquier Lagrangeano de una teoría de campos local [3].

Surge la pregunta: ¿Cuál es el estatus de estas simetrías en la naturaleza?. A través de los experimentos se ha observado que las interacciones fuertes y electromagnéticas son invariantes respecto a las operaciones C , P y T . Las interacciones débiles violan C y P separadamente, pero preservan CP y T dentro de una buena aproximación. Sólo en ciertos procesos poco frecuentes, involucrando al sistema de los mesones K y B , se han observado efectos de violación CP . Todas las observaciones hasta el momento son consistentes con la conservación de la simetría CPT .

Veamos cómo son las propiedades de transformación de los campos bajo las operaciones discretas C y P . En particular, para los espinores de Dirac se tiene:

$$\psi'_P = \gamma^0 \psi \rightarrow \text{bajo paridad.} \quad (1.1)$$

$$\psi'_C = i\gamma^2 \psi^*, \rightarrow \text{bajo conjugación de carga.} \quad (1.2)$$

en donde las γ^μ son las matrices de Dirac. Para los vectores se tiene:

$$v'^0_P = v^0 \text{ y } v'^i_P = -v^i, i = 1, 2, 3; \rightarrow \text{bajo paridad.} \quad (1.3)$$

$$v'^\mu_C = v^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3; \rightarrow \text{bajo conjugación de carga.} \quad (1.4)$$

Entonces, bajo CP tendremos:

$$\psi'_{CP} = i\gamma^2 \gamma^0 \psi^* \quad (1.5)$$

y

$$v'^0_{CP} = v^0 \text{ y } v'^i_{CP} = -v^i, i = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

El Lagrangeano, siendo un escalar de Lorentz, sólo puede depender de términos bilineales en los campos fermiónicos. También, por la naturaleza hermítica del Lagrangeano, si un término aparece, de igual manera ha de aparecer su hermítico conjugado. Las propiedades de transformación de los distintos términos que pueden aparecer en el Lagrangeano se resumen en la tabla siguiente.

Término		Término CP transformado
$\bar{\psi}_L^i \psi_R^j$	\longrightarrow	$\bar{\psi}_R^j \psi_L^i$
$\bar{\psi}_R^i \psi_L^j$	\longrightarrow	$\bar{\psi}_L^j \psi_R^i$
$\bar{\psi}_L^i \gamma_\mu \psi_R^j \xi^{\pm\mu}$	\longrightarrow	$\bar{\psi}_R^j \gamma_\mu \psi_L^i \xi^{\mp\mu}$
$\bar{\psi}_R^i \gamma_\mu \psi_L^j \xi^{\pm\mu}$	\longrightarrow	$\bar{\psi}_L^j \gamma_\mu \psi_R^i \xi^{\mp\mu}$
$\bar{\psi}_L^i \gamma_\mu \psi_R^j \xi^{\mp\mu}$	\longrightarrow	$\bar{\psi}_R^j \gamma_\mu \psi_L^i \xi^{\pm\mu}$
$\bar{\psi}_R^i \gamma_\mu \psi_L^j \xi^{\mp\mu}$	\longrightarrow	$\bar{\psi}_L^j \gamma_\mu \psi_R^i \xi^{\pm\mu}$

en donde, $\psi^i_{(L,R)} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \psi^i$ y $\xi^{\pm\mu}$ es un campo vectorial con carga electromagnética. Teniendo en cuenta la invariancia de Lorentz y la hermiticidad del Lagrangeano, las reglas de transformación CP de arriba implican que cada una de las combinaciones de

los campos en el Lagrangeano transforman bajo CP a su hermítico conjugado. Sin embargo, existen coeficientes acompañando a esas expresiones, los cuales representan constantes de acoplamiento o masas de partículas [2], que no transforman bajo CP . Si cualquiera de esos coeficientes son complejos, entonces coeficientes de términos relacionados a través de CP son complejos conjugados el uno del otro. En ese caso, CP no es necesariamente una simetría del Lagrangeano. Cuando tasas de procesos que dependen de estos parámetros son calculadas, pueden haber efectos de violación CP , como por ejemplo, tasas diferentes entre procesos conjugados de CP .

Sin embargo, no todas las fases complejas de los coeficientes en el Lagrangeano son cantidades con significado físico. Algunas de estas fases pueden ser eliminadas a través de redefiniciones de las fases de los campos de la teoría. Algunas de las constantes de acoplamiento pueden hacerse reales a través de tales redefiniciones, otras quedan complejas. Sin embargo, si persisten fases distintas de cero luego de que todas las posibles redefiniciones han sido utilizadas para eliminar tantas como sea posible, entonces es probable que exista violación de CP . Dado un Lagrangeano, es una cuestión de sólo contar para ver si esto ocurre. Si todas las fases pueden ser removidas de esta manera, la teoría automáticamente conserva CP (este es el caso del Modelo Estándar con solo dos generaciones de quarks [2]).

Si no es posible eliminar todas las fases luego de las redefiniciones de los campos, depende de la convención el lugar en donde estas aparecen. Se pueden escoger unas reales y las otras complejas, pero una escogencia diferente, relacionada con la primera a través de redefiniciones en los campos, tiene las mismas consecuencias físicas. Sólo las diferencias de fases, que quedan invariantes luego de tales transformaciones, tienen significado físico. La manera en que esas diferencias de fase dan lugar a efectos de violación CP se mostrará más adelante.

1.2. La Violación CP en el Modelo Estándar.

El Modelo Estándar [2] es una teoría que describe bastante bien gran parte de los fenómenos conocidos de la física de partículas. Es una teoría cuántica de campos construida sobre el principio de invariancia de calibre local, en donde el grupo de simetría es $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes SU(1)_Y$. Este grupo incluye el grupo de simetría de la interacción fuerte $SU(3)_C$, y el grupo de simetrías de la interacción electro-débil $SU(2)_W \otimes SU(1)_Y$. Invariancia bajo transformaciones de simetría local $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes SU(1)_Y$ previene la existencia de términos de masa de los campos fermiónicos dentro de la densidad Lagrangeana. El rompimiento espontáneo de la simetría de la interacción electro-débil genera dinámicamente masas para los fermiones debido a los acoplamientos de Yukawa de los campos fermiónicos con el doblete de Higgs [13]. En lo que sigue, nos centraremos en el lagrangeano efectivo del Modelo Estándar, es decir; en el Lagrangeano luego del rompimiento espontaneo $SU(2)_W \otimes SU(1)_Y \longrightarrow SU(1)_{em}$. Más específicamente nos centraremos en los términos de interacción y los términos de masa del mismo para los campos fermiónicos.

1.2.1. La Matriz CKM y la Violación CP .

Luego del rompimiento espontaneo de la simetría $SU(2)_W \otimes SU(1)_Y \longrightarrow SU(1)_{em}$ el Lagrangeano del Modelo Estándar se escribe como sigue:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_M + \text{otros términos.} \quad (1.7)$$

Los “otros términos” a los cuales se hace referencia en la expresión de arriba son términos de masa de los bosones de calibre y términos cinéticos tanto de los campos fermiónicos como de los bosónicos. El término \mathcal{L}_I es la parte de Lagrangeano en donde se resumen las interacciones de los campos fermiónicos con los bosones de calibre. Este término tiene la forma siguiente:

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=1}^3 g(\bar{\nu}_L^{0i} \gamma_\mu e_L^{0i} + \bar{u}^{0i} \gamma_\mu d^{0i})W^{+\mu} + g(\bar{e}^{0i} \gamma_\mu \nu^{0i} + \bar{d}^{0i} \gamma_\mu u^{0i})W^{-\mu} \quad (1.8)$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \sum_f g' \bar{f}^{0i} \gamma_\mu f^{0i} (q_f A^\mu + q_{f'} Z^{0\mu}) \quad (1.9)$$

el índice i corresponde a la familia y toma los valores 1,2 y 3, y g, g' son constantes de acoplamiento. El último término en la suma es una forma resumida de escribir:

$$\sum_f \bar{f}^{0i} \gamma_{\mu\nu} f^{0i} = \bar{e}_R^{0i} \gamma_\mu e_R^{0i} + \bar{e}_L^{0i} \gamma_\mu e_L^{0i} + \bar{\nu}_R^{0i} \gamma_\mu \nu_R^{0i} + \bar{\nu}_L^{0i} \gamma_\mu \nu_L^{0i} \quad (1.10)$$

$$+ \bar{u}_R^{0i} \gamma_\mu u_R^{0i} + \bar{u}_L^{0i} \gamma_\mu u_L^{0i} + \bar{d}_R^{0i} \gamma_\mu d_R^{0i} + \bar{d}_L^{0i} \gamma_\mu d_L^{0i} \quad (1.11)$$

El otro término \mathcal{L}_M , es la parte del Lagrangeano que resume a los términos de masa de los campos fermiónicos. Este se escribe como sigue:

$$\mathcal{L}_M = \sum_{i,j=1}^3 M_e^{ij} \bar{e}^{0i} e^{0j} + M_d^{ij} \bar{d}^{0i} d^{0j} + M_u^{ij} \bar{u}^{0i} u^{0j} + \text{h.c.} \quad (1.12)$$

en donde $h.c.$ significa hermítico conjugado. Las matrices de masa M_e, M_u y M_d son, en el caso de tres familias, matrices 3×3 complejas arbitrarias. Ahora bien, cuando se pretende analizar procesos físicos es conveniente trabajar en los autoestados de masa del Lagrangeano, estos estados son aquellos en los cuales las matrices $M_{e(u,d)}$ son diagonales. Las combinaciones:

$$M_f^\dagger M_f ; M_f M_f^\dagger \quad (1.13)$$

son dos matrices hermíticas distintas para cada $f = e, u, d$. Cada una de ellas se puede diagonalizar con una matriz unitaria de la siguiente manera:

$$D_f^2 = \begin{pmatrix} m_{1f}^2 & & \\ & m_{2f}^2 & \\ & & m_{3f}^2 \end{pmatrix} = U_{fL}^\dagger M_f M_f^\dagger U_{fL} = U_{fR}^\dagger M_f^\dagger M_f U_{fR} \quad (1.14)$$

es decir,

$$D_f = \begin{pmatrix} m_{1f} & & \\ & m_{2f} & \\ & & m_{3f} \end{pmatrix} = U_{fL}^\dagger M_f U_{fR} \quad (1.15)$$

Se necesitan entonces, dos matrices distintas para diagonalizar cada matriz de masa. Los autoestados en los cuales las matrices de masa son diagonales se relacionan con los anteriores a través de las siguientes transformaciones:

$$f_R^i = (U_{fR}^\dagger)^{ij} f_R^{0j} \quad (1.16)$$

$$f_L^i = (U_{fL}^\dagger)^{ij} f_L^{0j} \text{ con } f^i = e^i, u^i, d^i. \quad (1.17)$$

También, debido a que no se tienen términos de masa para los neutrinos (en realidad, se ha obtenido que las masas de los neutrinos no son nulas, pero se utiliza la aproximación de que son casi cero), se pueden redefinir los campos que los representan de la siguiente manera:

$$\nu_L^i = (U_L^\dagger)^{ij} \nu_L^{0j} \quad (1.18)$$

Esta redefinición tiene ciertas ventajas, las cuales se pondrán en claro a continuación. Entonces, se tienen seis matrices unitarias distintas. Veamos como quedan los distintos términos del Lagrangeano en esta nueva base. Los términos de masa quedan:

$$\bar{f}_L^{0i} M_f^{ij} f_R^{0j} = [\bar{f}_L^{0i} U_{fL}^{ik}] [(U_{fL}^\dagger)^{kl} M_f^{im} U_{fR}^{mr}] [(U_{fR}^\dagger)^{rj} f_R^{0j}] = \bar{f}_L^i D_f^{ii} f_R^i \quad (1.19)$$

en donde D_f es una matriz diagonal, y existe suma sobre los índices latinos repetidos. Las corrientes neutras quedan:

$$\bar{f}_L^{0i} \gamma_\mu f_L^{0i} = [\bar{f}_L^{0i} U_{fL}^{ik}] [(U_{fL}^\dagger)^{kl} U_{fL}^{lm}] \gamma_\mu [(U_{fL}^\dagger)^{mj} f_L^{0j}] = \bar{f}_L^i \gamma_\mu f_L^i \quad (1.20)$$

$$\bar{f}_R^{0i} \gamma_\mu f_R^{0i} = [\bar{f}_R^{0i} U_{fR}^{ik}] [(U_{fR}^\dagger)^{kl} U_{fR}^{lm}] \gamma_\mu [(U_{fR}^\dagger)^{mj} f_R^{0j}] = \bar{f}_R^i \gamma_\mu f_R^i \quad (1.21)$$

Observamos que en la base de los autoestados de masa las corrientes neutras siguen siendo diagonales. Veamos cómo quedan las corrientes cargadas. Tenemos que las corrientes cargadas de leptones se escriben, en la nueva base, como sigue:

$$\bar{\nu}_L^{0i} \gamma_\mu e_L^{0i} = [\bar{\nu}_L^{0i} U_{eL}^{ir}] \gamma_\mu [(U_{eL}^\dagger)^{rm} U_{eL}^{ml}] [(U_{eL}^\dagger)^{lj} e_L^{0j}] = \bar{\nu}_L^i \gamma_\mu e_L^i \quad (1.22)$$

Nótemos que estas corrientes cargadas se escriben de forma diagonal en la base de autoestados de masa. Esto se ha podido lograr gracias a que se ha rotado a los campos ν^{0i} con la misma matriz rotación que a los campos e^{0i} . Si se tuvieran términos de masa para los neutrinos esto último no hubiese sido posible. Para finalizar, veamos como quedan las corrientes cargadas de quarks.

$$\bar{u}_L^{0i} \gamma_\mu d_L^{0i} = [\bar{u}_L^{0i} U_{uL}^{ik}] [(U_{uL}^\dagger)^{kl} U_{dL}^{lm}] [(U_{dL}^\dagger)^{mj} d_L^{0j}] = V_{CKM}^{ij} \bar{u}_L^i d_L^j \quad (1.23)$$

en donde,

$$V_{CKM} = U_{uL}^\dagger U_{dL} \quad (1.24)$$

La cual es la matriz mezcladora CKM para las tres generaciones de quarks [4, 5]. Por convención, V_{CKM} opera sobre los autoestados de masa de los quarks del tipo *dawn*

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

y, siendo el producto de dos matrices unitarias, V_{CKM} es también unitaria

$$V^\dagger V = V V^\dagger = I \quad (1.26)$$

Como tal, esta depende generalmente de nueve parámetros: tres de ellos pueden ser escogidos como ángulos reales y los seis restantes como fases. Sin embargo, se puede reducir el número de fases en V_{CKM} a través de transformaciones de la forma:

$$V_{CKM} \longrightarrow P_u V_{CKM} P_d^*, \quad (1.27)$$

en donde, P_u y P_d son matrices de fases diagonales. Esta es una transformación legítima, debido a que tiene por efecto redefinir las fases de los campos autoestados de masa de los quark

$$q_L^i \longrightarrow (P_q)^{ii} q_L^i, \quad q_R^i \longrightarrow (P_q)^{ii} q_R^i, \quad (1.28)$$

La cuál no cambia las matrices de masa reales y diagonales M_q^{diag} . Las cinco diferencias de fase entre los elementos de P_u y P_d pueden ser escogidos de manera que la transformación (1.27) elimine cinco de las seis fases independientes en V_{CKM} ; de manera que V_{CKM} tiene una fase irremovible. Esta fase es llamada la fase de Kobayashi-Maskawa [5], δ_{CKM} , y la matriz mezcladora es llamada la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa.

La fase irremovible en la matriz CKM da lugar a la violación de CP . En efecto, la corriente cargada del sector de quarks se escribe como:

$$\mathcal{L}_{CC} = g(V_{CKM}^{ij} \bar{u}_L^i \gamma_\mu d_L^j) W^{+\mu} + g((V_{CKM}^\dagger)^{ij} \bar{d}_L^i \gamma_\mu u_L^j) W^{-\mu} \quad (1.29)$$

esta expresión transformada por CP queda:

$$CP \mathcal{L}_{CC} = g((V_{CKM}^T)^{ij} \bar{d}_L^i \gamma_\mu u_L^j) W^{-\mu} + g((V_{CKM}^*)^{ij} \bar{u}_L^i \gamma_\mu d_L^j) W^{+\mu} \quad (1.30)$$

Para que estas dos expresiones sean diferentes, se debe tener necesariamente $V_{CKM} \neq V_{CKM}^*$, es decir, que V_{CKM} sea compleja.

1.2.2. Parametrización de la Matriz CKM .

Como se ha visto en la sección anterior, la matriz CKM puede ser parametrizada a través de: tres parámetros reales y una fase. Existen infinitas maneras de parametrizar la matriz CKM , entre ellas, existen dos que son muy utilizadas: *la parametrización Estándar* y *la parametrización de Wolfenstein*.

La parametrización estándar de V_{CKM} ha sido propuesta por Chau y Keung [6] es abogada por el Particle Data Group (PDG) [7], y es obtenida por medio del producto de tres matrices de rotación (complejas), donde las rotaciones son caracterizadas por tres ángulos de Euler θ_{12} , θ_{13} y θ_{23} , los cuales son los ángulos de mezcla entre las generaciones, y una fase global δ

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

en donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ para $i < j = 1, 2, 3$. Esta parametrización satisface la relación de unitariedad 1.26. Se tendrá violación de CP si $\delta \neq 0$. Por medio de medidas directas, indirectas, y de consideraciones de unitariedad, progresivamente se han puesto cotas a los módulos de los diferentes elementos de la matriz CKM . En particular, se puede constatar que los elementos diagonales de $|V_{CKM}|$ son del orden de la unidad, $|V_{us}|$ y $|V_{cd}|$ son del orden del 20 %, $|V_{cb}|$ y $|V_{ts}|$ son del orden de 4 %, y por último, $|V_{ub}|$ y $|V_{td}|$ son del orden del 1 %. Esquemáticamente, el módulo de V_{CKM} puede ser representado de la siguiente manera:

$$|V_{CKM}| = \begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \cdot \\ \otimes & \otimes & \bullet \\ \cdot & \bullet & \otimes \end{pmatrix}$$

Se observa entonces una estructura jerárquica en los elementos de la matriz CKM , con los elementos de la diagonal estando cerca de la unidad y volviéndose más pequeños a medida que se alejan de la diagonal y aumenta el número de familia. La parametrización de Wolfenstein [8] explota esta observación, haciendo una expansión de la matriz CKM en términos de los cuatro parámetros λ , A , ρ y η ($\lambda \simeq |V_{us}| \sim 0,22$ siendo el parámetro de expansión). La relación entre los parámetros de la representación de Wolfenstein y la estándar es la siguiente,

$$\begin{aligned} s_{12} &\equiv \lambda, \\ s_{23} &\equiv A\lambda^2 \\ s_{13}e^{-i\delta} &\equiv A\lambda^3(\rho - i\eta) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Haciendo la expansión hasta tercer orden en λ se obtiene:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (1.33)$$

En esta forma se pone en evidencia la jerarquía antes mencionada. Siendo η el parámetro que tiene la información sobre la fase compleja, se tendrá entonces que: habrá violación de CP si $\eta \neq 0$.

1.2.3. El Triángulo Unitario.

El hecho de que la matriz CKM sea unitaria implica las siguientes relaciones entre sus elementos:

$$\sum_j V_{\alpha j} V_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} \text{ con } \alpha, \beta = u, c, t \text{ y } j = d, s, b. \quad (1.34)$$

Tres de estas son particularmente útiles en el estudio de la violación CP , ya que tienen información de la naturaleza compleja de la matriz CKM .

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0 \quad (1.35)$$

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0 \quad (1.36)$$

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (1.37)$$

Cada una de estas relaciones requiere que la suma de tres cantidades complejas se anule y así pueden ser representadas geoméricamente en el plano complejo como un triángulo. Por este motivo, estas relaciones son conocidas como “triángulos unitarios”. De la parametrización de Wolfenstein se observa lo siguiente:

$$|V_{ud}V_{us}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda), |V_{cd}V_{cs}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda), |V_{td}V_{ts}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (1.38)$$

$$|V_{us}V_{ub}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^4), |V_{cs}V_{cb}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^2), |V_{ts}V_{tb}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (1.39)$$

$$|V_{ud}V_{ub}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^3), |V_{cd}V_{cb}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^3), |V_{td}V_{tb}^*| \sim \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (1.40)$$

Las dos primeras relaciones muestran que los dos primeros triángulos unitarios son prácticamente degenerados (un lado siendo mucho más pequeño que los otros dos). El tercer triángulo unitario tiene todos sus lados del mismo orden, por este motivo es bastante útil en el estudio de la violación CP . Dicho triángulo puede ser representado en el plano complejo como se muestra en la Fig. 1.1. El segundo triángulo en la figura se conoce como triángulo unitario reescalado. Este triángulo es derivado de la expresión 1.37 por medio de (a) escogiendo una convención de fase en la cual $(V_{cd}V_{cb}^*)$ sea real, y (b) dividiendo las longitudes de todos los lados por $|V_{cd}V_{cb}^*|$; (a) alinea un lado del triángulo con el eje real, y (b) hace la longitud de ese lado igual a 1. Siendo esta transformación una rotación, la forma del triángulo no cambia. Dos vértices del triángulo unitario reescalado están fijos en $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Las coordenadas del vértice restante son denotadas por $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$. Las coordenadas $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ se relacionan con los parámetros de Wolfenstein de la siguiente manera:

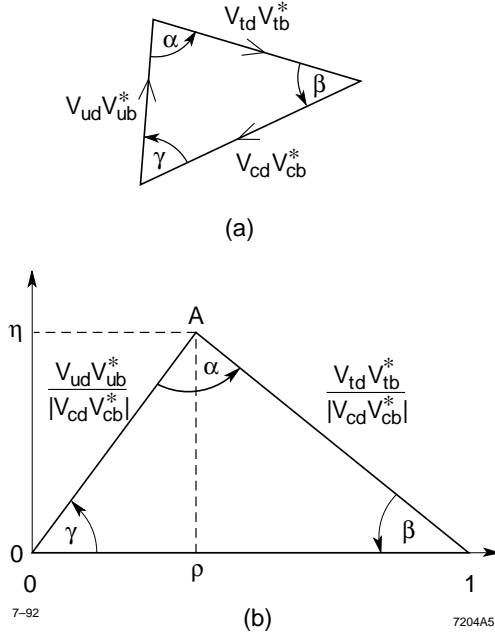


Figura 1.1: (a) El triángulo unirario, representación geométrica de la ortogonalidad entre la primera y la tercera columna de la matriz CKM , y (b), el triángulo unirario reescalado en donde cada lado ha sido dividido por $|V_{cd}V_{cb}^*|$ con la finalidad de que la base sea de longitud unidad.

$$\rho + i\eta = \frac{\sqrt{1 - A^2\lambda^4}(\bar{\rho} + i\bar{\eta})}{\sqrt{1 - \lambda^2}[1 - A^2\lambda^4(\bar{\rho} + i\bar{\eta})]} \quad (1.41)$$

Estas también se relacionan con los elementos de la matriz CKM a través de:

$$\bar{\rho} + i\bar{\eta} \equiv -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{|V_{cd}V_{cb}^*|} \quad (1.42)$$

Los lados del triángulo unirario R_u y R_t (el tercero estando normalizado a la unidad) vienen dados por (a todos los ordenes en λ):

$$R_u = \left| \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2} \quad (1.43)$$

$$R_t = \left| \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{(1 - \bar{\rho})^2 + \bar{\eta}^2} \quad (1.44)$$

Los tres ángulos α , β y γ , del triángulo unirario están definidos como

$$\alpha = \arg \left[-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} \right], \quad \beta = \arg \left[-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right], \quad \gamma = \arg \left[-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right], \quad (1.45)$$

en donde se tiene que satisfacer la relación $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Todas estas cantidades son físicas y pueden ser medidas por medio de las asimetrías CP en varios decaimientos en el sistema de los mesones B . La consistencia de las diferentes medidas posibles provee

una prueba del Modelo Estándar. Como un ejemplo, consideremos la situación en la cual una medida la suma $\alpha + \beta + \gamma$ sea inconsistente con el valor π . Esta inconsistencia se traduce a la invalidez de la hipótesis de la existencia de una matriz CKM compleja de orden 3, contradiciendo directamente al Modelo Estándar de tres generaciones de quarks. Pasemos ahora a una descripción del sistema de los mesones B .

1.3. Los Mesones B .

Los mesones B , como su nombre lo indica, son mesones que tienen como contenido de quarks un quark b (o un anti-quark \bar{b}). Los tipos de mesones B se muestran en la siguiente tabla:

Mesones B producidos en los acelerados de partículas			
Partícula	Simbolo	Contenido	Masa(GeV/c^2)
B mas	B^+	ub	5.279
B menos	B^-	$b\bar{u}$	5.279
B cero	B^0	db	5.279
B cero barra	B^0	bd	5.279
B sub s	B_s^0	sb	5.369
B sub s barra	B_s^0	$b\bar{s}$	5.369

Por supuesto, existe otro tipos de mesón B , el mesón B_c^0 (con un quark b y un antiquark \bar{c}), pero son muy masivos y por ende son más difíciles de producir y estudiar en los aceleradores de partículas. Estos son producidos en los grandes aceleradores Hadronicos, pero no en las fábricas e^+e^- (ver capítulo 2), de manera que no considerarán aquí. Los sistemas de interés serán pares de mesones neutros conjugados de CP : los mesones B_d , constituidos de un quark del tipo b y un antiquark del tipo \bar{d} (o un antiquark del tipo \bar{b} y un quark del tipo d); y los mesones B_s , constituidos de un quark del tipo b y un antiquark del tipo \bar{s} (o un antiquark del tipo \bar{b} y un quark del tipo s). Los mesones B neutros son complicados por el hecho de que diferentes estados neutros son relevantes en la discusión de diferentes procesos físicos [9]. Existen dos autoestados de sabor, los cuales tienen contenido de quark definido y son más útiles para entender producción de partículas y procesos de decaimiento. Y existen autoestados del Hamiltoniano, es decir, estados de masa y tiempo de vida media definida, los cuales se propagan a través del espacio en forma definida. Si CP fuese una buena simetría, los autoestados de masa también serían autoestados de CP (ya que el Hamiltoniano y CP conmutarían), es decir, bajo la transformación CP estos se transformarían en ellos mismos con un autovalor definido ± 1 . Pero debido a que CP no es una buena simetría, los autoestados de masa pueden ser diferentes de los autoestados de CP . En cualquier caso, los autoestados de sabor no son autoestados de masa, de manera que los autoestados de sabor se mezclan uno con el otro a medida que se propagan a través del espacio. La manera en la cual los autoestados de sabor se mezclan a medida que se propagan se tratará a continuación.

1.3.1. La Mecánica Cuántica de los Mesones B Neutros.

Una combinación lineal arbitraria de autoestados de sabor de los mesones B neutros $a|B^0\rangle + b|\bar{B}^0\rangle$ es gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (M - \frac{i}{2}\Gamma) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

en la cual M y Γ son dos matrices 2×2 Hermíticas. La invariancia CPT garantiza que $H_{11} = H_{22}$ [9].

El Hamiltoniano H es responsable de la propagación de los estados, de su mezcla, y de sus decaimientos. Como tal, no preserva la magnitud del vector (a, b) . Por lo tanto, este no es Hermitico (aunque M y Γ lo son) y no tiene autovalores necesariamente reales. H puede ser diagonalizado de la manera usual para una matriz 2×2 , y las partes imaginarias de los autovalores dan las tasas de decaimiento de sus dos autoestados, y las partes reales, sus masas. Más específicamente, si λ es un autovalor, m la masa del autoestado correspondiente y γ su anchura, entonces

$$\lambda = M - \frac{i}{2}\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{T} \quad (1.47)$$

en donde T es el tiempo de vida media de dicho autoestado. La razón por la cual el Hamiltoniano no es Hermitico es que los dos autoestados de sabor $|B^0\rangle$ y $|\bar{B}^0\rangle$ no forman una base completa para el proceso, debido a que estos no son los únicos estados finales posibles. H es, de hecho, una pequeña esquina del Hamiltoniano total expresado en términos de todos los estados posibles. Por lo tanto, lo que se está haciendo aquí es una aproximación de la evolución de los estados físicos durante el proceso de mezcla de los autoestados de sabor $|B^0\rangle$ y $|\bar{B}^0\rangle$ hasta el decaimiento de los mismos.

Los dos autoestados de H son referidos como el autoestado ligero, $|B_L\rangle$ (el de menor masa), y el autoestado pesado, $|B_H\rangle$ (el de mayor masa). Estos están dados por

$$|B_L\rangle = p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle \quad (1.48)$$

$$|B_H\rangle = p|B^0\rangle - q|\bar{B}^0\rangle, \quad (1.49)$$

los coeficientes complejos p y q obedecen la condición de normalización

$$|p|^2 + |q|^2 = 1. \quad (1.50)$$

Las magnitudes de las masas, m_H y m_L , y de las anchuras, γ_H y γ_L de los dos autoestados de H no son de interés en el estudio de la violación CP . Las diferencias de masa, Δm_B , y las diferencia de anchura, $\Delta\gamma_B$, entre los mesones B neutros serán de interes como veremos mas adelante. Estos están definidos como

$$\Delta m_B = m_H - m_L, \quad \Delta\gamma_B = \gamma_H - \gamma_L, \quad (1.51)$$

de manera que Δm_B es positivo por definición. Encontrando los autovalores de la ecuación 1.46, se obtiene

$$(\Delta m_B)^2 - \frac{1}{4}(\Delta \gamma_B)^2 = 4(|M_{12}|^2 - \frac{1}{4}|\Gamma_{12}|^2), \quad (1.52)$$

$$\Delta m_B \Delta \gamma_B = 4\mathcal{R}e(M_{12}\Gamma_{12}^*). \quad (1.53)$$

y la razón q/p está dada por

$$\frac{q}{p} = -\frac{\Delta m_B - \frac{i}{2}\Delta \gamma_B}{2(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})}, \quad (1.54)$$

Es conveniente en este momento destacar lo siguiente. El Hamiltoniano H , *a priori* parece estar representado por una matriz compleja arbitraria 2×2 , y por lo tanto tendría 8 parámetros arbitrarios. Sin embargo, la condición de invariancia CPT reduce el número de parámetros a 6. Además, la arbitrariedad en la definición de la fase global de los estados $|B^0\rangle, |\bar{B}^0\rangle$ es capaz de eliminar un parámetro adicional. En total, el Hamiltoniano depende en definitiva de 5 parámetros físicos. Esto último implica que, el cociente $\frac{q}{p}$ depende de cinco parámetros que *a priori* son arbitrarios, de manera que lo más natural sería que el valor que esta cantidad pudiera tomar fuese cualquiera. Veremos más adelante que las condiciones que dan lugar a la conservación de la simetría CP implican que esta cantidad tome valores bastante restrictivos.

La ecuación de Schrödinger se resuelve inmediatamente para cada componente, la cual en la base de autoestados de H tiene dependencias temporales bien definidas. Si el estado inicial está dado por $a_H(0)|B_H\rangle + a_L(0)|B_L\rangle$, el estado en el tiempo t será

$$|B(t)\rangle = a_H(t)|B_H\rangle + a_L(t)|B_L\rangle, \quad (1.55)$$

en donde,

$$a_H(t) = e^{-i(M_H - i\Gamma_H/2)t} a_H(0), \quad a_L(t) = e^{-i(M_L - i\Gamma_L/2)t} a_L(0) \quad (1.56)$$

$a_H(t)$ y $a_L(t)$ son las amplitudes dependientes del tiempo para las componentes pesada y ligera respectivamente. Un estado en el tiempo $t = 0$ inicialmente puro B^0 , es denotado como $|B_{phys}^0\rangle$, y tiene $a_L(0) = a_H(0) = 1/(2p)$. Similarmente un estado inicialmente puro \bar{B}^0 , $|\bar{B}_{phys}^0\rangle$, tiene $a_L(0) = -a_H(0) = 1/(2q)$. La evolución temporal de esos estados está dada por

$$|B_{phys}^0(t)\rangle = g_+(t)|B^0\rangle + (q/p)g_-(t)|\bar{B}^0\rangle, \quad (1.57)$$

$$|\bar{B}_{phys}^0(t)\rangle = (p/q)g_-(t)|B^0\rangle + g_+(t)|\bar{B}^0\rangle, \quad (1.58)$$

en donde

$$g_+(t) = e^{-imt} e^{-\gamma t/2} \cos(\Delta m_B t/2), \quad (1.59)$$

$$g_-(t) = e^{-imt} e^{-\gamma t/2} i \sin(\Delta m_B t/2), \quad (1.60)$$

y

$$m = \frac{1}{2}(m_H + m_L), \quad \gamma = \frac{1}{2}(\gamma_H + \gamma_L). \quad (1.61)$$

Con las expresiones 1.57 y 1.58 se pone en evidencia la mezcla en el sistema de los mesones B neutros a medida que el estado del sistema evoluciona en el tiempo. Vamos ahora a ver cómo se puede presentar la violación de CP en el sistema de los mesones B neutros y cómo es que se pueden definir observables independientes de las convenciones de fase que dan cuenta de dichos efectos.

1.3.2. Violación CP en el sistema de los Mesones B neutros.

1.3.3. Los tres Tipos de Violación CP .

Las posibles manifestaciones de violación CP pueden ser clasificadas de una manera independiente del modelo de la siguiente forma:

1. Violación CP en el decaimiento, ocurre tanto en sistemas cargados como neutros, cuando las amplitudes para un proceso de decaimiento y la de su CP conjugado tienen magnitudes diferentes.
2. Violación CP en la mezcla, ocurre cuando dos autoestados de masa no se pueden escoger como autoestados de CP .
3. Violación CP en la interferencia entre decaimientos con y sin mezcla, ocurre en decaimientos a estados finales que son comunes a B^0 y \bar{B}^0 .

En lo que sigue se utilizará la siguiente notación: si un sistema de mesones B tiene por Hamiltoniano al operador H , entonces las amplitudes de los procesos $B^0 \rightarrow f$, $B^0 \rightarrow \bar{f}$, $\bar{B}^0 \rightarrow f$ y $\bar{B}^0 \rightarrow \bar{f}$ se denotarán respectivamente por

$$\mathcal{A}_f = \langle f|H|B^0 \rangle, \mathcal{A}_{\bar{f}} = \langle \bar{f}|H|B^0 \rangle, \bar{\mathcal{A}}_f = \langle f|H|\bar{B}^0 \rangle, \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = \langle \bar{f}|H|\bar{B}^0 \rangle \quad (1.62)$$

Estas cantidades son importantes para lo que se muestra a continuación.

Violación CP en el Decaimiento.

Para cualquier estado f , la cantidad $\left| \frac{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}}{\mathcal{A}_f} \right|$ es independiente de las convenciones de fase y de significado físico [9]. Existen dos tipos de fases que pueden aparecer en \mathcal{A}_f y $\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}$.

Parámetros complejos de cualquier término en el Lagrangeano que contribuye a la amplitud aparecerá como complejo conjugado en la amplitud conjugada de CP correspondiente. Así, sus fases aparecen en \mathcal{A}_f y $\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}$ con signos opuestos. En el Modelo Estándar esas fases ocurren sólo en la matriz CKM , la cual es parte del sector electrodébil de la teoría, de aquí que a ese tipo de fases se les llame “fases débiles”. Por

supuesto, estas fases débiles dependen de la convención escogida, pero es la diferencia de fase la que tiene significado físico.

Un segundo tipo de fase puede aparecer en estas amplitudes aunque el Lagrangeano sea real. Estas fases no violan CP ya que aparecen en \mathcal{A}_f y $\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}$ con el mismo signo y se conocen como “fases fuertes”.

Es útil entonces escribir cada contribución a una amplitud en tres partes: su magnitud A_i , su término de fase débil $e^{i\delta_i}$, y su término de fase fuerte $e^{i\phi_i}$. Luego, si varias amplitudes contribuyen al proceso $B^0 \rightarrow f$, las amplitudes \mathcal{A}_f y $\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}$ se podrán escribir como sigue

$$\mathcal{A}_f = \sum_i A_i e^{i(\phi_i + \delta_i)}, \quad \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = \sum_i A_i e^{i(\phi_i - \delta_i)}. \quad (1.63)$$

Habrà violación de CP si las tasas de desintegración de los procesos $B^0 \rightarrow f$ y $\bar{B}^0 \rightarrow \bar{f}$ son diferentes, es decir, $\Gamma(B^0 \rightarrow f) \neq \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow \bar{f})$. Y como $\Gamma(B^0 \rightarrow f) \propto |\mathcal{A}_f|^2$ (de igual manera para el proceso conjugado de CP), entonces habrá violación de CP directa si $|\mathcal{A}_f|^2 \neq |\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}|^2$.

$$\left| \frac{\mathcal{A}_f}{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}} \right| \neq 1 \implies \text{violación de } CP \text{ en el decaimiento.} \quad (1.64)$$

Las expresiones 1.63 implican que

$$|\mathcal{A}_f|^2 - |\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}|^2 = 2 \sum_j \sum_{k \neq j} A_j A_k \sin(\delta_j - \delta_k) \sin(\phi_j - \phi_k) \quad (1.65)$$

De manera que, para que haya violación de CP en el decaimiento hacen falta al menos dos diagramas diferentes para el proceso, con módulos de amplitudes comparables, con fases fuertes diferentes y fases débiles diferentes. La asimetría CP definida como

$$a_{CP} = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(B^0 \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow \bar{f})} \quad (1.66)$$

viene dada en este caso por

$$a_{CP} = \frac{\left| \frac{\mathcal{A}_f}{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}} \right|^2 - 1}{\left| \frac{\mathcal{A}_f}{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}} \right|^2 + 1} \quad (1.67)$$

Violación CP en la Mezcla.

Como ya se ha visto anteriormente, gracias a la no conservación del sabor por la interacción débil, los mesones B neutros pueden transformarse en su antipáticula antes de decaer. Existirá violación de CP en la mezcla si

$$|\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \bar{B}^0)| \neq |\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow B^0)| \quad (1.68)$$

Este tipo de violación CP resulta del hecho que los autoestados de masa son distintos de los autoestados de CP . Esta diferencia se encuentra en la cantidad $\left|\frac{q}{p}\right|$, que es independiente de convenciones de fase [9]. Si $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$, los autoestados de masa pueden ser escogidos como autoestados de CP por redefiniciones de la fase global de los estados $|B^0\rangle, |\bar{B}^0\rangle$. Entonces, habrá violación de CP en la mezcla si $|q/p| \neq 1$:

$$\left|\frac{q}{p}\right| \neq 1 \implies \text{violación de } CP \text{ en la mezcla.} \quad (1.69)$$

Utilizando las expresiones 1.57 y 1.58, la asimetría CP en este caso se expresa como

$$a_{CP} = \frac{1 - |q/p|^4}{1 + |q/p|^4} \quad (1.70)$$

Violación CP en la Interferencia entre la Mezcla y el Decaimiento.

En una fábrica $B e^+e^-$ asimétrica operando a la resonancia $\Upsilon(4S)$ (ver capítulo 3) los mesones producidos del decaimiento de $\Upsilon(2S) \rightarrow B^0\bar{B}^0$ se encuentran en un estado coherente. Una forma de ver este estado es que la evolución temporal del B^0 y \bar{B}^0 vienen dadas por las expresiones 1.57 y 1.58 respectivamente. Sin embargo, ellos evolucionan en fase, de manera que a cualquier tiempo, hasta que una de las dos partículas decaiga, existe siempre exactamente un B^0 y un \bar{B}^0 presente. Una vez que una de las partículas decae, la otra continua evolucionando, y así existe la posibilidad de eventos con dos B^0 o dos \bar{B}^0 . En lo que sigue se considerarán decaimientos de la forma $B^0 \rightarrow f_{CP}$ y $\bar{B}^0 \rightarrow f_{CP}$, en donde f_{CP} es un estado final comun tanto a B^0 como a \bar{B}^0 autoestado de CP con autovalor η_{CP} , es decir

$$|\bar{f}_{CP}\rangle = CP|f_{CP}\rangle = \eta_{CP}|f_{CP}\rangle. \quad (1.71)$$

Se tendrá violación de CP en la interferencia entre la mezcla y el decaimiento si

$$|\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \bar{B}^0 \rightarrow f_{CP}) + \mathcal{A}(B^0 \rightarrow f_{CP})| \neq |\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow B^0 \rightarrow f_{CP}) + \mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow f_{CP})| \quad (1.72)$$

En este caso, utilizando las expresiones 1.57 y 1.58, se tiene

$$\langle f_{CP}|H|B_{phys}^0(t)\rangle = \eta_{CP}\mathcal{A}_f(g_+(t) + \lambda_f g_-(t)). \quad (1.73)$$

Similarmente

$$\langle \bar{f}_{CP}|H|\bar{B}_{phys}^0(t)\rangle = \eta_{CP}\langle f_{CP}|H|\bar{B}_{phys}^0(t)\rangle = \eta_{CP}\frac{p}{q}\mathcal{A}_f(g_-(t) + \lambda_f g_+(t)) \quad (1.74)$$

En donde $\lambda_f = \eta_f \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f}$. La asimetría CP en este caso viene dada por

$$a_{CP}(t) = \frac{\Gamma(B_{phys}^0(t) \rightarrow f_{CP}) - \Gamma(\bar{B}_{phys}^0(t) \rightarrow \bar{f}_{CP})}{\Gamma(B_{phys}^0(t) \rightarrow f_{CP}) + \Gamma(\bar{B}_{phys}^0(t) \rightarrow \bar{f}_{CP})} \quad (1.75)$$

Lo cual, sustituyendo 1.73 y 1.74 y tomando en cuenta que $\left|\frac{q}{p}\right| \simeq 1$, da como resultado

$$a_{CP}(t) = \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2} \cos(\Delta m_B t) - \frac{2\mathcal{I}m(\lambda_f)}{1 + |\lambda_f|^2} \sin(\Delta m_B t) \quad (1.76)$$

Entonces, habrá violación de CP en la interferencia entre la mezcla y el decaimiento si $\lambda_f \neq \pm 1$. Es importante destacar que, existen algunas situaciones en las cuales los efectos de violación CP en el decaimiento y la mezcla son débiles (es decir; situaciones en las cuales los observables $\left|\frac{A_f}{\bar{A}_f}\right| \sim 1$ y $\left|\frac{q}{p}\right| \sim 1$, implicando que $|\lambda| \sim 1$), todavía puede haber violación de CP en la interacción entre la mezcla y el decaimiento debido a que $\mathcal{I}m(\lambda) \neq 0$, en cuyo caso, la asimetría CP quedaría

$$a_{CP}(t) = \mathcal{I}m(\lambda) \sin(\Delta m_B t) \quad (1.77)$$

Puede demostrarse que el valor del parámetro λ , dentro de una muy buena aproximación, para el proceso de decaimiento $B^0 \rightarrow J/\psi K_S^0$ esta dado por [9]

$$\lambda = e^{i2\beta} \quad (1.78)$$

en donde β es uno de los ángulos del triángulo unitario. De manera que, para este proceso, se puede calcular dicho ángulo a través de medidas de asimetrías CP dependientes del tiempo.

Como se ha visto hasta ahora, la medición de asimetrías CP provee de una manera de acceder a las fases de los términos de la matriz CKM , claro está que el proceso estudiado debe contar por lo menos con dos diagramas diferentes de amplitudes del mismo orden. Una forma de acceder a los módulos de los parámetros de la matriz CKM es a través de la medición de *Branching Ratios*. El *Branching Ratio* del proceso $I \rightarrow F$ (en donde I es un estado inicial y F un estado final) está dado por:

$$\mathcal{B}(I \rightarrow F) = \frac{\Gamma(I \rightarrow F)}{\Gamma(I)} \quad (1.79)$$

Dicho en palabras, el *Branching Ratio* está definido como la probabilidad de que, dado que el sistema se encuentre en el estado I , evolucione al estado F . Para la obtención de los módulos de los parámetros de la matriz CKM se debe contar con un proceso que esté caracterizado por una amplitud dominante.

1.4. El Rol de Babar.

El objetivo de BaBar es el estudio de la violación de la simetría CP en el sistema de los mesones B . Como ya hemos visto, el Modelo Estándar permite incluir éste fenómeno de violación CP , pero no permite comprender su origen, ya que no da cuenta, por ejemplo, de la estructura jerárquica de los parámetros de la matriz CKM . La existencia de la violación CP en el Modelo Estándar da lugar a la existencia de una matriz unitaria compleja llamada matriz CKM . Esto último da lugar a la existencia del triángulo

unitario (que es la relación de ortogonalidad entre la primera y tercera columna de la matriz CKM). Una forma de poner a prueba este modelo dentro de este sector es sobredeterminar experimentalmente los parámetros de dicho triángulo, es decir, sobre los valores de sus ángulos y lados. Este objetivo tiene dos finalidades:

- Cuantificar la violación CP bajo la hipótesis de la veracidad del Modelo Estándar: todas las amplitudes de violación CP son proporcionales al área del triángulo unitario [1].
- Verificar si realmente existe tal triángulo ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$), y entonces poner a prueba la unitariedad de la matriz CKM y así poner a prueba el Modelo Estándar.
- Por último, en caso de observarse desviaciones del Modelo Estándar, entonces estudiar las correlaciones entre observables que producen tales desviaciones para dilucidar cual debe ser la manera en la que se construyan los nuevos modelos.

Es importante tener un conocimiento global del funcionamiento del dispositivo experimental, en nuestro caso la fábrica B PEP-II y el detector BaBar en SLAC, ya que permite entender como es que se construye la muestra estadística con la que se trabajará en este análisis. Este tema lo trataremos en el capítulo que viene a continuación.

Capítulo 2

El Dispositivo Experimental.

2.1. Fábricas B .

Para el estudio de la violación CP en el sistema de los mesones B se necesita de una producción importante de éstos, debido a los pequeños *Branching Ratios* (del orden de 10^{-4}) de los distintos procesos que se pueden presentar en este sistema. Por lo tanto, se necesitan dispositivos que sean capaces de una producción copiosa de pares $B\bar{B}$ (del orden de 10^7 o más por año), a estos últimos se les conoce como fábricas B . En el *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC) se encuentra una fábrica B conocida como el colisionador PEP-II (fig. 2.1). El PEP-II (siglas en inglés de *Positron Electron Project II*) consta de dos anillos conocidos como *anillos de almacenamiento* en los cuales se hacen circular electrones y positrones antes de hacerlos colisionar. Por uno de los anillos se hace circular a los electrones a 9GeV y por el otro circulan los positrones a $3,1\text{GeV}$, por este motivo al PEP-II se le llama colisionador e^+e^- asimétrico. Los mesones B son producidos en los colisionadores a través del proceso $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$, en donde $\Upsilon(4S)$ es un estado ligado $b\bar{b}$ excitado que se desintegra, a través de la interacción fuerte, en B^+B^- ($\sim 50\%$ de las veces) y en $B^0\bar{B}^0$ (el otro $\sim 50\%$ de las veces). La energía en el centro de masa (C.M.) de los haces e^+e^- es $10,58\text{GeV}$, correspondiendo a la masa de $\Upsilon(4S)$, que está justo por encima del umbral de producción del par $B\bar{B}$ (la suma de las masas de los pares $B^0\bar{B}^0$ o B^+B^- es de $10,558\text{GeV}$), de manera que en el C.M. los mesones B se encuentran casi en reposo. Debido a la gran asimetría de la colisión, los mesones B tienen una gran velocidad en el sistema del laboratorio y viajan casi paralelos a la dirección del eje de la colisión, pudiendo así viajar distancias lo suficientemente grandes para ser medibles, esto permite la realización de medidas de observables dependientes del tiempo. Es importante tener una idea del funcionamiento de los subsistemas de detección e identificación de partículas y del tipo de información que éstos pueden otorgar, ya que el análisis estadístico que se va a realizar en el presente trabajo depende de algunas particularidades de su funcionamiento. Por este motivo, vamos a proceder a dar una visión global del dispositivo experimental y del tipo de información que de este se puede obtener.

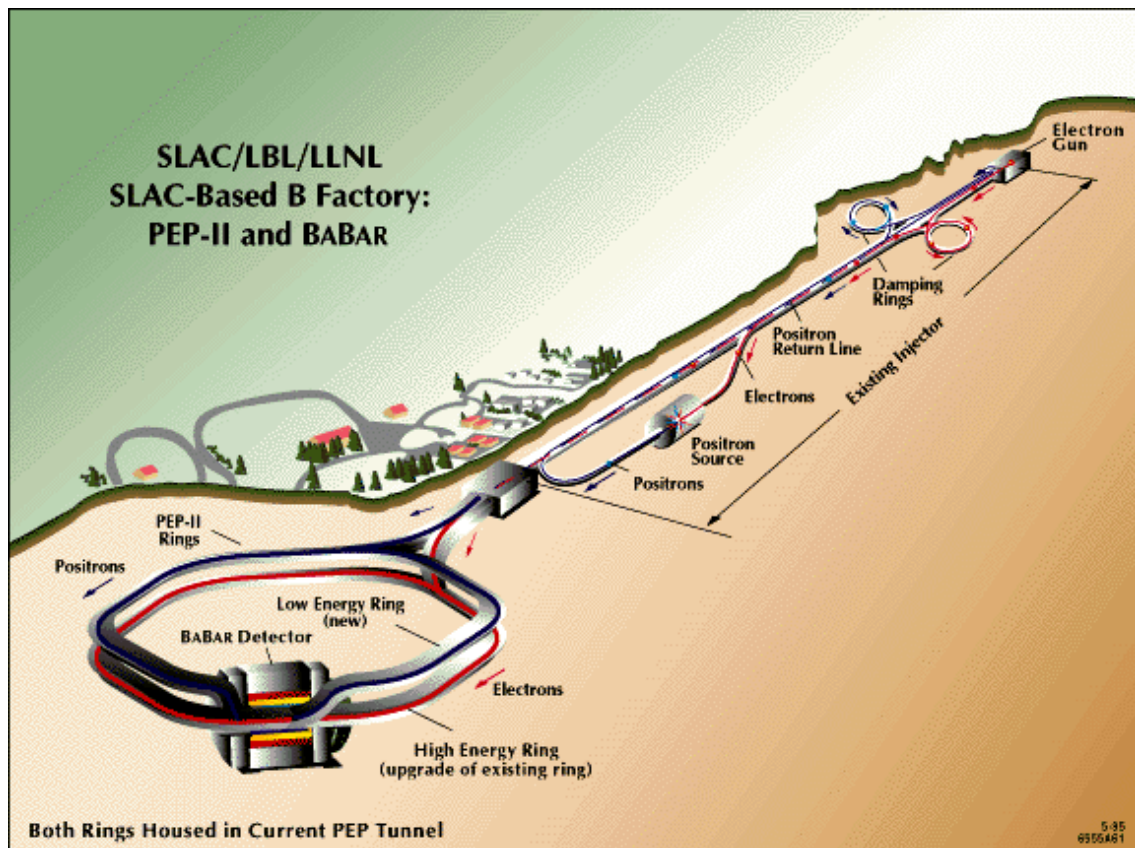


Figura 2.1: Vista aérea del colisionador PEP-II y el acelerador lineal en SLAC

2.2. El detector BaBar

Sobre el colisionador PEP-II se encuentra un detector conocido como *BaBar* (fig. 2.2). Este detector es de concepción clásica: cilíndrico y asimétrico. Este está compuesto de un conjunto de subsistemas de detección que resumiremos a continuación:

- En la parte más interna del detector *BaBar* se encuentra el **Detector de Vértice**, *Silicon Vertex Tracker (SVT)*. Fue construido especialmente para la reconstrucción de los vértices de desintegración de los mesones B . Permite también la reconstrucción de trayectorias de partículas cargadas. Las trayectorias de partículas de impulsión transversal inferior a 100MeV son reconstruidas exclusivamente gracias a la información entregada por el SVT. Para las partículas teniendo una trayectoria más importante se utiliza la operación combinada del SVT y del DCH (ver a continuación para DCH).
- En la siguiente capa se encuentra una **Camara de Deriva**, *Drift Chamber, (DCH)*. Tiene por objetivo principal la detección de partículas cargadas, la identificación de su carga y la medición precisa de su momentum y ángulos con respecto al eje de la colisión. Esto lo hace a través de la detección de la



Figura 2.2: El Detector BaBar

posición de partículas cargadas en varios puntos a lo largo de su trayectoria. Al examinar la curvatura de la trayectoria de la partícula en un campo magnético se revela su momentum y ángulos respecto al eje de colisión, y por la dirección de la deflexión en el campo magnético se deduce su carga eléctrica.

- En la capa media del detector se encuentra el **DIRC, *Detection of Internally Reflected Cherenkov light***. Está dedicado a la identificación de kaones, piones y protones. Su funcionamiento está basado en la medición del ángulo del cono de luz Cherenkov producido por el paso de una partícula cargada por una barra de cuarzo con un índice de refracción tal que la partícula cargada viaja con mayor rapidez que la luz en el cuarzo. Este ángulo está directamente relacionado con la velocidad de la partícula. El conocimiento del momentum (información obtenida en el SVT y la DCH) y de la velocidad permite calcular la masa de la partícula. Esta información aunada a la carga eléctrica permite identificar a las partículas cargadas.
- En la siguiente capa se encuentra un ***Calorímetro Electromagnético, (CEM)***. Permite la detección de fotones y la identificación de electrones. Es utilizado para la medición y la resolución angular de las cascadas electromagnéticas (producidas por la interacción de los fotones con la materia) con una excelente eficacia sobre rangos de energía desde 29 MeV a 9 GeV . Esta capacidad es necesaria para para la detección de fotones productos de la desintegración del π^0 , así como de procesos electromagnéticos y radiativos.
- En la siguiente capa se encuentra un **Imán superconductor**, produciendo un

campo magnético de $1,5T$, utilizado en los procesos de detección basados en medición de curvaturas de trayectorias de partículas cargadas.

- En la última capa se encuentran un ***Instrumented Flux Return, (IFR)***. Tiene como finalidad la detección de muones y de hadrones neutros altamente energéticos que no fueron detenidos en ninguna de las capas anteriores.
- Por último, existe un sistema, que no es de detección, llamado el *Trigger* (Disparador). El *Trigger* es un sistema de decisión de dos niveles que tiene por finalidad decidir que tipo de señales en los sistemas de detección se registrarán. El primer nivel observa las lecturas del CEM y DCH. Si estas lecturas se encuentran por encima de un umbral determinado se pasa a la siguiente etapa . La tasa de salida de información de este primer nivel es de 30 a 40 *KHz*. En el segundo nivel se realiza una reconstrucción rápida. La reconstrucción rápida convierte, sin entrar en detalle, la información en los subsistemas de detección a información por partícula, y con esta se decide, bajo ciertos criterios, si las señales se registran o no. La tasa de salida de información de la segunda etapa es de unos 200 *Hz*. Los criterios de decisión tienen por finalidad dejar de lado a señales provenientes de procesos de dispersión simple e^+e^- , o radiación Synchotron, etc, y solo escriben señales de productos semileptónicos y hadrónicos de las colisiones e^+e^- .

El detector *BaBar* no es capaz de registrar absolutamente todos los productos de las colisiones e^+e^- , debido a que no se pudo cubrir todo el espacio con dispositivos de detección. Pero, entre los que son detectados solo se registran, a través del sistema de *Trigger*, aquellos productos que pueden ser del tipo $B\bar{B}$. Las señales registradas de los productos de colisiones e^+e^- diferentes tienen una separación temporal suficiente como para ser diferenciadas. Un evento es un conjunto de señales registradas en una ventana de tiempo bien definida. Entonces en un evento se encuentra sólo la información de los productos de una colisión e^+e^- . La data de cada evento es convertida a información por partícula por medio de un proceso que se llama *reconstrucción del Evento*. Una vez terminado este proceso, la única información con la que se cuenta es del tipo siguiente:

- Momentos de partículas cargadas.
- Energías de partículas neutras.
- Identificación de partículas cargadas.

Esta información a su vez se puede clasificar de la siguiente manera.

Evento por evento:

$$\text{Evento} \quad \text{Tiempo} \quad N_{\text{Neutros}}^o \quad N_{\text{Cargados}}^o \quad \dots$$

en donde, “Evento” es el número de etiqueta que se le ha dado a un evento determinado, “Tiempo” es la ventana temporal de la ocurrencia de dicho evento y “ N_{Neutros}^o

y $N_{Cargados}^o$ ” son el número de partículas neutras y cargadas dentro del evento. Para cada partícula se puede clasificar la información como sigue,

Partícula por partícula:

Energía Momentum ángulos carga ...

Con esta información se realiza un proceso de preselección entre todos los eventos para separar a aquellos posibles candidatos productos de un canal de decaimiento específico. Este segundo proceso de preselección depende del tipo de canal de decaimiento a estudiar, sea este a dos cuerpos, tres cuerpos, etc. Seguido de esto, se inicia un segundo proceso que involucra un análisis estadístico detallado de la muestra así construida para hacer una separación más sofisticada y poder extraer una mayor cantidad de información.

En el siguiente capítulo, se tratará con un poco de detalle los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad y la estadística, conceptos que son esenciales para el análisis estadístico que se realizará en la última parte de este trabajo.

Capítulo 3

Probabilidad y Estadística.

Cuando se pretende estudiar un canal de decaimiento específico en el sistema de los mesones B , el analista se encuentra con dos dificultades primordiales: (a) los *Branching Ratios* de dichos procesos son muy bajos (se espera que sean del orden de 30×10^{-6}); (b) Los eventos que se pretenden estudiar no se encuentran aislados, en vez de esto, se encuentran altamente contaminados con otros eventos que han pasado la primera fase de discriminación o de preselección, debido a que los instrumentos de medida no son 100 % precisos y 100 % exactos. Esto da lugar a la necesidad de utilizar métodos estadísticos inferenciales altamente sofisticados. El presente capítulo pretende proveer los conceptos básicos de probabilidad y estadística necesarios para el presente trabajo. El capítulo se divide en dos partes: la primera da un compendio bastante resumido de la teoría de la probabilidad; la segunda da cuenta de algunas nociones básicas de estadística y describe el método de verosimilitud máxima, que es la herramienta estadística inferencial a ser utilizada en el análisis del canal $B^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0$.

3.1. Teoría Básica de la Probabilidad.

Una definición de probabilidad puede ser dada considerando un conjunto S , llamado espacio de prueba, y los posibles subconjuntos A, B, \dots de S que definen la clase \mathcal{G} , la interpretación de los cuales se deja abierta. La probabilidad P es una función real definida en los posibles subconjuntos de S que satisface los siguientes axiomas:

1. Para cada subconjunto $A \in \mathcal{G}$, $P(A) \geq 0$.
2. Para subconjuntos disjuntos (es decir, $A \cap B = \emptyset$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P(S) = 1$.

En adición, también se define la probabilidad condicional $P(A|B)$ si $P(B) \neq 0$ (que se lee como la probabilidad de A dado que ha ocurrido B) como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.1)$$

De esta definición, y del hecho que $A \cap B = B \cap A$, se obtiene el *teorema de Bayes*,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (3.2)$$

De los tres axiomas de definición de probabilidad y de la definición de probabilidad condicional, se obtiene la *ley total de probabilidad*,

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i), \quad (3.3)$$

para cualquier subconjunto B y para A_i disjuntos tales que $\cup_i A_i = S$.

La interpretación más comunmente usada de los subconjuntos del espacio de prueba son resultados de un experimento repetible. Una de las interpretaciones de $P(A)$ es el valor límite de la frecuencia de ocurrencia de A en tales experimentos repetibles, en el límite en el cual, el número de experimentos realizados tiende a valores muy grandes. Esta interpretación de probabilidad se conoce como *interpretación frecuentista*. Los subconjuntos del espacio de prueba también pueden ser interpretados como hipótesis, es decir, declaraciones que son o falsas o verdaderas. Usando la *interpretación subjetiva*, la probabilidad $P(A)$ se interpreta como el grado de creencia de que la hipótesis A sea verdadera.

La probabilidad subjetiva es utilizada en la estadística *Bayesina*. El teorema de *Bayes* se puede escribir como sigue,

$$P(\text{teoría}|\text{datos}) \propto P(\text{datos}|\text{teoría})P(\text{teoría}), \quad (3.4)$$

En donde ‘teoría’ representa alguna hipótesis y ‘datos’ es el resultado de un experimento. Aquí $P(\text{teoría})$ es la probabilidad *a priori* de la teoría, la cual representa el grado de creencia en el experimento antes de llevar a cabo la medida, y $P(\text{datos}|\text{teoría})$ es la probabilidad que han dado los datos obtenidos, dada la teoría. La expresión 3.4 da información de como debe ser modificada la probabilidad de la teoría en la luz de los nuevos datos para dar la probabilidad posterior, $P(\text{teoría}|\text{datos})$.

3.1.1. Probabilidades y Funciones de Densidad de Probabilidad.

Variabes aleatorias.

En muchos experimentos se está interesado en números asociados con el resultado del experimento. Siempre que se asocie un número real (o un elemento de \mathfrak{R}^n) a cada uno de los posibles resultados de un experimento se está tratando con una función cuyo dominio es la clase de subconjuntos de S y cuyo rango es \mathfrak{R}^n , tal función es llamada una *Variable Aleatoria*. De manera que, una variable aleatoria no es más que un vector de \mathfrak{R}^n definido en un conjunto. Una variable aleatoria puede variar sobre un espectro continuo o discreto (o una combinación de los dos).

Si $U : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una variable aleatoria discreta, se puede decir que $p(x) \equiv P[E(x)]$ es la probabilidad de x , donde $E(x)$ es la imagen inversa de U en el espacio de prueba y se tiene que:

$$\sum_{\text{todos los } x} p(x) = 1. \quad (3.5)$$

Si $U : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una variable aleatoria continua, entonces se toma el límite continuo de la noción de variable aleatoria discreta, con

$$p(x)dx \equiv P[E(y) : x \leq y < x + dx] \quad (3.6)$$

Aquí $p(x)$ es llamada una “función de densidad de probabilidad” (se abrevia pdf por su nombre en ingles, *probability density function*).

Independencia.

Ahora, supóngase que se tiene una variable aleatoria continua bidimensional con su respectiva pdf, $p(x, y)$, tómnese las siguientes definiciones (con su equivalente discreto correspondiente):

$$q(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad (3.7)$$

$$r(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \quad (3.8)$$

Entonces, dos variables aleatorias, $U_1(A) = x$ e $U_2(A) = y$, $A \subseteq S$, son estadísticamente independientes sí y solo si:

$$p(x, y) = q(x)r(y). \quad (3.9)$$

Valores Esperados.

El valor esperado de una función f de una variable aleatoria U , está definido por:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\text{sobre todo } x} f(x)p(x) dx, \quad (3.10)$$

Con la generalización a variables aleatorias de mayor dimensión. De esta definición resulta que si dos variables aleatorias, U_1 y U_2 , son estadísticamente independientes, entonces:

$$\langle f(x)g(y) \rangle = \langle f(x) \rangle \langle g(y) \rangle. \quad (3.11)$$

La media de una variable aleatoria está definida como su valor esperado.

La Matriz de Covariancia.

La varianza de una variable aleatoria es el cuadrado de su desviación estándar, y está definida por:

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (3.12)$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (3.13)$$

La varianza se generaliza al caso de variables aleatorias n-dimensionales a la “matriz de Covariancia”, definida como:

$$M_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \quad (3.14)$$

$$= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle. \quad (3.15)$$

Nótese que los elementos diagonales son simplemente las variancias individuales. Los elementos fuera de la diagonal son llamados “covariancias”. El coeficiente de “correlación lineal”, midiendo el grado de correlación lineal entre dos variables aleatorias, está definido como:

$$\rho_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}}. \quad (3.16)$$

Frecuentemente es de interés conocer la distribución de probabilidad de las cantidades $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) = f(\mathbf{x})$, dada la distribución de probabilidad de las cantidades (tal vez medidas) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Si las y_i son linealmente independientes, la nueva pdf para \mathbf{y} se encuentra facilmente:

$$q(\mathbf{y})d^n(\mathbf{y}) = q[f(\mathbf{x})] \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right| d^n(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

$$= p(\mathbf{x})d^n \mathbf{x}. \quad (3.18)$$

de aquí,

$$q(\mathbf{y}) = \frac{p[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})]}{\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right| [\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})]}. \quad (3.19)$$

En vez de determinar la p.d.f completa, frecuentemente se desea tener conocimiento sobre la matriz de covariancia de las nuevas variables en función de las antiguas. Si $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$ depende linealmente de $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, es decir,

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (3.20)$$

donde T es una matriz de transformación $k \times n$, luego la matriz de covariancia para \mathbf{y} está dada por:

$$M_y = TM_x T^\dagger. \quad (3.21)$$

Si y no depende linealmente de \mathbf{x} , frecuentemente se puede hacer la aproximación lineal tomando

$$T_{ij} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x} \sim \langle \mathbf{x} \rangle} \quad (3.22)$$

Nótese que esto último es tomar el primer término en la expansión en serie de *Taylor* de la función f , por lo tanto, no podría ser una buena aproximación para algunas transformaciones o lejos de $\langle \mathbf{x} \rangle$. Como un ejemplo tomese $k = 1$. Luego, en la aproximación lineal:

$$M_y = \sigma_y^2 = TM_x T^\dagger \quad (3.23)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x} \sim \langle \mathbf{x} \rangle} \left. \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x} \sim \langle \mathbf{x} \rangle} (M_x)_{ij}. \quad (3.24)$$

Si las x_i son estadísticamente independientes, entonces

$$(M_x)_{ij} = \sigma_{x_i}^2 \delta_{ij}, \quad (3.25)$$

y de aquí,

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x} \sim \langle \mathbf{x} \rangle} \right)^2 \sigma_{x_i}^2. \quad (3.26)$$

Esta es la expresión comúnmente usada para la propagación de errores.

3.2. Nociones Básicas de Estadística.

El tema de la estadística tiene que ver, para los propósitos presentes, con la extracción de información de un proceso de muestreo aleatorio, entendiéndose como muestreo aleatorio a la operación de generar una data regida por una p.d.f en la cual la generación de un dato no depende de los generados anteriormente. La estadística es algunas veces referida como el “problema inverso de la probabilidad”: en vez de determinar el muestreo de una variable aleatoria a partir de una distribución de probabilidad, se está interesado en obtener información sobre una distribución de probabilidad tomando muestras aleatorias de esta.

3.2.1. Estimación de Parámetros.

Una medida experimental es considerada como un muestreo de una distribución de probabilidad que describe la distribución de observar cada uno de los resultados posibles

de un experimento. Esta distribución es frecuentemente referida como la “distribución de la muestra”. Así, la descripción completa de un experimento consiste en dar el resultado de la medida, en conjunto con la distribución de la muestra. Típicamente esta distribución depende de parámetros desconocidos de los cuales se trata de aprender.

El problema de estimación de parámetros es llegar al “mejor estimado” del valor de un parámetro desconocido que gobierna la distribución de una muestra $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ dada. Un *estimador* $\hat{\theta}$ es una función de la data $(\hat{\theta}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))$ cuyo valor, *el estimado*, es una conjetura significativa del verdadero valor θ . La escogencia del estimador, es decir, la definición del “mejor”, depende de varios criterios. No existe ninguna regla fundamental dictaminando como un estimador debe ser construido. Se trata de escoger ese estimador que tenga las mejores propiedades. Entre las propiedades más importantes se tienen: *consistencia*, *sezgo*, *eficiencia* y *robustez*.

Consistencia.

Un estimador se dice consistente si $\hat{\theta}$ converge al valor real θ a medida que la cantidad de datos se incrementa, es decir,

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \rightarrow \theta \text{ a medida que } n \rightarrow \text{ toma valores muy grandes.} \quad (3.27)$$

Esta propiedad es tan importante que la poseen todos los estimadores comunmente usados.

Sezgo.

El sezgo, $b = \langle \hat{\theta} \rangle - \theta$, está definido como la diferencia del valor esperado del estimador y el valor real del parámetro. El valor esperado es tomado sobre un conjunto hipotético de experimentos similares en los cuales $\hat{\theta}$ es contruido de la misma manera. Cuando $b = 0$ se dice que el estimador no está sezgado.

Eficiencia.

Un estimador se dice eficiente si su varianza se comporta de la siguiente manera:

$$var(\hat{\theta}) \sim \frac{A}{n} \text{ a medida que } n \text{ toma valores muy grandes.} \quad (3.28)$$

en donde A es una constante que no depende de la muestra.

Robustez.

Por último, la robustez es la propiedad de ser insensible a pequeñas variaciones de las suposiciones sobre la p.d.f que gobierna a la muestra sobre factores tales como el ruido.

Todas estas propiedades de los estimadores no son requisitos estrictos para que califiquen como buenos. Por ejemplo, se podría pensar que se debería utilizar un estimador sin sesgo, sin embargo, esto no es de extrema importancia en la práctica, ya que un sesgo del orden de $1/n$ queda completamente apantallado por una incertidumbre estadística del orden de $1/\sqrt{n}$. Lo que sí es importante es utilizar métodos que no introduzcan ninguna incertidumbre innecesaria en la determinación de parámetros físicos de interés. A continuación, presentamos finalmente el método de Verosimilitud Máxima.

3.2.2. El Método de Verosimilitud Máxima.

Considerese un muestra $\{\mathbf{x}_i\}$ resultado de algún experimento. Cada uno de los eventos en nuestra muestra son estadísticamente independientes entre sí. Denótese por $f(\mathbf{x}, \theta)$ a la función de distribución de probabilidad que rige a dicha muestra. Por simplicidad se considera al parámetro de la distribución, θ , unidimensional. La función de Verosimilitud se define como la probabilidad que, dado un experimento, este haya dado como resultado a la muestra obtenida. Debido a que cada uno de los eventos de la muestra son estadísticamente independientes, la función de Verosimilitud está entonces definida por:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_i f(\mathbf{x}_i, \theta) \quad \text{ó} \quad \ln \mathcal{L}(\theta) = \sum_i \ln f(\mathbf{x}_i, \theta) \quad (3.29)$$

Se tratará a θ como una variable, y se indicará al valor verdadero del parámetro de la distribución como $\bar{\theta}$. A medida que el número de datos incrementa, la función de verosimilitud converge a

$$\ln \mathcal{L} \rightarrow n \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \bar{\theta}) \ln f(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.30)$$

Esto es debido a que $f(\mathbf{x}, \bar{\theta})$ da la distribución real de los eventos en $\{\mathbf{x}_i\}$. La función de verosimilitud es maximizada cuando

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.31)$$

provisto, por supuesto, que

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (3.32)$$

El estimador de verosimilitud de $\bar{\theta}$ es el valor de θ para el cual la ecuación (3.31) se satisface, es decir, es el valor de θ que hace máxima a la función de verosimilitud. A medida que el número de datos incrementa, se observa que

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow n \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \bar{\theta}) \frac{1}{f(\mathbf{x}, \theta)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \quad (3.33)$$

Si se evalúa esta última expresión en $\theta = \bar{\theta}$, se encuentra que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \theta) = 0 \quad (3.34)$$

De manera que, el máximo asintótico de la función de verosimilitud ocurre en el valor real del parámetro, esto implica que el estimador es consistente. Si para cada conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i\}$ se encuentra el valor de θ que maximiza a la función de verosimilitud, dichos valores estarán distribuidos (asintóticamente) en una distribución normal alrededor de $\bar{\theta}$. La pdf de θ será, con $\delta\theta = \theta - \bar{\theta}$:

$$g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta\theta^2}{2\sigma^2}} \quad (3.35)$$

en donde

$$\frac{1}{\sigma^2} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \quad (3.36)$$

Nuevamente, asintóticamente se tiene que

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \rightarrow n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \bar{\theta}) \ln f(\mathbf{x}, \theta) = -n \int d\mathbf{x} \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3.37)$$

en donde todo está evaluado en $\bar{\theta}$. De esto se consigue que

$$\frac{1}{\sigma^2} = n \int d\mathbf{x} \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3.38)$$

Lo cual muestra que el estimador de $\bar{\theta}$ que maximiza a la función de verosimilitud es un estimador eficiente. Visto todo esto, el método de Verosimilitud máxima consiste en:

1. Dada un muestra $\{\mathbf{x}_i\}$ y una distribución de probabilidad $f(\mathbf{x}, \theta)$ que la rige con parámetro desconocido θ , se construye a la función de verosimilitud como se indica en la expresión (3.29).
2. El estimador $\hat{\theta}$ es aquel valor que maximiza a la función de verosimilitud, es decir,

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0. \quad (3.39)$$

3. Un estimador de la desviación estándar de $\hat{\theta}$ viene dada por

$$\frac{1}{\sigma_{\hat{\theta}}^2} = \left. -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (3.40)$$

Para el caso en el cual se tenga más de un parámetro ($\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$), los pasos 2 y 3 anteriores se reemplazan por:

2. Los estimadores de los θ_i son los que resuelven la ecuación

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i} \right|_{\vec{\theta}=\hat{\theta}} = 0; i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.41)$$

Es decir, los que maximizan a la función de Verosimilitud.

3. La inversa de la matriz de covariancia de los θ_i viene dada por

$$(V_{\theta}^{-1})_{ij} = - \left. \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\vec{\theta}=\hat{\theta}} \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.42)$$

Ejemplo. La Distribución Gaussiana.

El ejemplo de la distribución gaussiana, aparte de ilustrar el método de Verosimilitud Máxima, muestra resultados que serán utilizados en algunas partes del capítulo siguiente.

Nuevamente, consideremos una muestra $\{\mathbf{x}_i\}$ regida por la pdf Gaussiana,

$$f_{p.d.f}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.43)$$

El logaritmo de la función de Verosimilitud viene dada por:

$$\ln \mathcal{L}(\mu, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (3.44)$$

Los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ están dados por:

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} \right|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.45)$$

y

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma} \right|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} = -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \quad (3.46)$$

Las segundas derivadas de la función de verosimilitud evaluadas en $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ están dadas por:

$$-\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} \right|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} = \frac{n}{\hat{\sigma}^2} \quad -\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma} \right|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} = 0 \quad (3.47)$$

$$-\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma} \right|_{(\hat{\sigma}, \hat{\mu})} = 0 \quad -\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} \right|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} = \frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \quad (3.48)$$

La inversa de la matriz de covariancia es entonces:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}^2}{2n} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Los valores esperados de $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ están dados por:

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \bar{\mu} \quad \text{y} \quad \langle \hat{\sigma}^2 \rangle = \frac{n-1}{n} \bar{\sigma}^2 \quad (3.50)$$

además,

$$\Delta \hat{\mu} = \sqrt{V_{11}} = \frac{\hat{\sigma}}{n^{1/2}} \quad \text{y} \quad \Delta \hat{\sigma} = \sqrt{V_{22}} = \frac{\hat{\sigma}}{(2n)^{1/2}} \quad (3.51)$$

Vemos entonces que, para el caso de la distribución Gaussiana, los estimadores son tanto consistentes como eficientes. Es también importante notar que el estimador $\hat{\sigma}$ está sezgado, pero este sezgo es del orden de $1/n$, que en comparación con la incertidumbre estadística (del orden de $1/\sqrt{n}$) no es significativo.

El método de Verosimilitud Máxima será la herramienta estadística utilizada en el análisis estadístico del canal $B^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0$, tema que se tratará en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Análisis del Canal $B^0 \longrightarrow K^+ \pi^- \pi^0$.

El interés principal de los modos $b \rightarrow u$ (llamados “*charmless*”) es que las amplitudes correspondientes son a menudo funciones de V_{ub} , y por lo tanto pueden ser sensibles a la violación de CP. Esto puede ilustrarse con tres ejemplos: $B \rightarrow \pi\pi$, $B \rightarrow K\pi$, $B \rightarrow K\pi\pi$.

B $\rightarrow \pi\pi$

Si la desintegración $B^0/\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ solo contuviera el término en árbol (proporcional a $V_{ub}V_{ud}^*$), una medida experimental de la asimetría en función del tiempo daría directamente acceso al ángulo α del triángulo unitario: el término sinusoidal en la asimetría (el término que acompaña al seno en la expresión 1.76) sería exactamente igual a $\sin(2\alpha)$.

Lamentablemente, la presencia de amplitudes pinguino “contaminan” la sensibilidad a α : el término sinusoidal en la simetría es igual a $\sin[2(\alpha + \delta)]$. Sin embargo, se ha demostrado que se puede utilizar la simetría de isospin para estimar el término δ de contaminación, puesto que las amplitudes de los modos $B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ y $B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ están ligadas entre sí (ecuación 107 en [10]).

Las relaciones de isospin dependen de 6 parámetros: árbol, pinguino y árbol suprimido de color (5 en total) más α . Por tanto, una medida de esos tres *Branching Ratios*, más los dos términos de la asimetría dependiente del tiempo en $B^0/\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, y la asimetría directa de CP en $B^0/\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$, permite medir el parámetro δ y por lo tanto obtener directamente α (o mejor dicho, las 8 soluciones posibles para α).

Las dificultades experimentales mayores vienen dadas porque los *Branching Ratios* son muy pequeños (menores a 5×10^{-6}), y también debido a los niveles de contaminación de la muestra. La verdadera sensibilidad del sistema $B \rightarrow \pi\pi$ al ángulo α dependerá fuertemente del cociente P/T (razón de amplitudes pinguino y árbol), que determina la capacidad de resolver las 8 ambigüedades; lamentablemente los valores centrales actuales sólo permiten excluir un pequeño conjunto de valores para α .

B $\rightarrow K\pi$

El caso de $B \rightarrow K\pi$ es en cierta medida similar al anterior. Algunas de las diferencias con respecto a $B \rightarrow \pi\pi$ lo hacen más atractivo, otras lo hacen un sistema más difícil de estudiar:

- Las desintegraciones $B \rightarrow K\pi$ están dominadas por los términos en pinguino, y por tanto son potencialmente más sensibles a contribuciones no-estándar que aparezcan en los diagramas a ordenes superiores.
- Los *Branching Ratios* son un poco mayores, del orden de $(10 - 20) \times 10^{-6}$, y los niveles de contaminación son un poco menores (menor producción de kaones que de piones en los jets).
- Existen 4 modos (las 4 combinaciones de carga posibles), así que se pueden medir 4 *Branching Ratios*, 4 asimetrías CP directas y una asimetría CP dependiente del tiempo ($B^0/\bar{B}^0 \rightarrow K^0\pi^0$, que es el único autoestado final de CP). En total 9 observables.
- Lamentablemente las relaciones de isospin dependen de más parámetros que observables (árbol, pinguino, árbol suprimido de color, pinguinos electrodébiles, aniquilación, más los parámetros CKM , 13 en total), así que el sistema $K\pi$ aislado no permite medir nada directamente.
- Sin embargo, usando las medidas del sistema $K\pi$, más otras informaciones, se puede extraer información útil (por ejemplo, utilizando cálculos teóricos que permitan estimar ciertas amplitudes). La literatura habla a menudo de un “*puzzle* $K\pi$ ”, pero eso es aun tema de controversia.

$B \rightarrow K\pi\pi$

En este caso se tienen muchos más estados finales posibles, así que el número de observables es aun mayor. Por otra parte, la estructura de los modos intermedios es muy variada. En particular, las amplitudes para los modos intermedios $B \rightarrow VP$ (vector-pseudoescalar), como por ejemplo $K^*\pi$ y ρK , satisfacen entre ellos relaciones de isospin similares a las de $B \rightarrow K\pi$. Además, muchos de esos modos contribuyen a un mismo estado final (por ejemplo $K^{*+}\pi^-$ y $K^{*0}\pi^0$ contribuyen los dos a $K^+\pi^-\pi^0$) así que se pueden medir diferencias de fases entre contribuciones intermedias, aumentando así aun más el número de observables. La dificultad mayor consiste en que esas medidas solo pueden hacerse con un análisis en amplitudes en el diagrama de Dalitz (este diagrama se explicará más adelante), y eso requiere entender la estructura en el plano de Dalitz de todos los tipos de eventos dentro la muestra. Esta es una tarea ambiciosa que va mucho más allá de este trabajo de licenciatura.

El objetivo de esta etapa es el análisis del canal $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$ ligado al cálculo del *Branching Ratio* semi-inclusivo sin *charm* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$. Para lograrlo se requiere de la construcción de un modelo estadístico que consiste en, la definición de una muestra, la construcción de una pdf para dicha muestra y la aplicación del método de Verosimilitud Máxima para la extracción de observables.

El capítulo está dividido en tres partes. En la primera se define la muestra estadística y se da una descripción de su estructura. La segunda parte consta de toda la metodología seguida para la construcción del modelo estadístico. Se empieza por la definición de las muestras de control que servirán de apoyo en la modelación de las

estructuras dentro de la muestra estadística. Se sigue con la definición de las variables de discriminación y se culmina esta parte con la construcción de la función de distribución de probabilidad que rige a la muestra. La última parte consta de la descripción del ajuste por máxima Verosimilitud y el análisis de los resultados obtenidos.

4.1. La Muestra.

Antes de comenzar lo que será la construcción del modelo estadístico, es conveniente que quede claro lo que es *la muestra estadística*. Se podría pensar simplemente que la muestra es un gran masa de datos que se han obtenido de la operación en conjunto de la fábrica de mesones B PEP-II y el detector $BaBar$ en SLAC durante 5 años de operación desde septiembre de 1999 a septiembre de 2004, en realidad es algo un poco más complicado que eso. Cuando esta data es obtenida del detector $BaBar$, tiene que ser reconstruida evento por evento. Recordemos que un evento en $BaBar$ es un conjunto de partículas en una ventana de tiempo bien definida que son productos de procesos de colisión de un par e^+e^- . Ahora, el proceso de reconstrucción consiste en transformar esta data (que es un conjunto de señales en los subsistemas de detección), siguiendo por supuesto una serie de protocolos preestablecidos, en información de cada una de las partículas que están involucradas en dicho evento. En este primer proceso de reconstrucción parte de la información de la data se pierde, pero los mecanismos de análisis son muy eficientes y la pérdida es pequeña. Luego de este primer proceso, se tiene toda la información de los procesos registrados, efectos de una colisión e^+e^- que tuvieron lugar durante los 5 años de operación de la fábrica B ; por ejemplo, algunos eventos reconstruidos pueden ser la formación de estados ligados quarks $q\bar{q}$, que seguidamente forman otras partículas, que a su vez decaen en otras, etc. Pero, debido al modo de operación de la fábrica B , tienen que haber algunos eventos que consisten en la formación de un par de mesones B^+B^- o un par $B^0\bar{B}^0$. Son los eventos de este último tipo los que interesan.

Luego de la formación de un par $B^0\bar{B}^0$, cada uno de estos decae rápidamente en un conjunto de partículas que son detectadas por $BaBar$. A cada uno de los procesos por medio de los cuales un mesón B^0 decae a un estado final determinado se conoce como un *modo de decaimiento del meson B^0* . Ahora, entre todos los posibles eventos que han tenido lugar dentro de $BaBar$, sólo interesan para este análisis aquellos que tienen que ver con la formación de un par $B^0\bar{B}^0$, y entre estos, más específicamente interesan aquellos en los cuales el mesón B^0 ha decaído en el modo $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$. Dicho esto, para analizar el modo de decaimiento $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$, convendría hacer una selección de la información producto del primer proceso de reconstrucción de aquellos eventos caracterizados por la formación de un par $B^0\bar{B}^0$ y el subsecuente decaimiento del mesón B^0 en al estado final $K^+\pi^-\pi^0$. A este segundo proceso se le llama *proceso de preselección*. Ahora bien, la información que se tiene por evento es del tipo siguiente:

- Número de Partículas Cargadas.
- Número de Partículas Neutras.

De cada una de las partículas cargadas se tiene información sobre su identidad (es decir, su masa y su carga), el valor de su momento, los ángulos que formó con el eje de la colisión, etc. y de las partículas neutras se cuenta con su energía. El proceso de preselección parte de la suposición que el evento consiste en la formación de un par $B^0\bar{B}^0$ y el subsecuente decaimiento $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$. Si esta suposición fuese cierta, entonces debería haber entre las partículas que conforman el evento un kaón cargado positivamente, un pión cargado negativamente y dos fotones productos del decaimiento de un pión neutro. El detector lo que hace es identificar partículas y obtener algo de información adicional sobre ellas, pero no existe un mecanismo que de información con 100 % de certeza sobre el proceso que las ha originado. Por este motivo, el proceso de preselección lo que hace es considerar un evento, y de este formar todas las posibles combinaciones de cuatro partículas, en las cuales se cuenta con: una partícula cargada positivamente que el sistema de identificación ha identificado como un kaón, una partícula cargada negativamente que el sistema ha identificado como un pión y dos fotones. Si este conjunto de cuatro partículas proviene del decaimiento de un B^0 , se debe tener lo siguiente:

- La masa invariante del par de fotones debería ser aproximadamente $135MeV$ (que es la masa del π^0).
- La masa invariante del kaón, pión y los fotones debería ser aproximadamente $5,28GeV$ (que es la masa del mesón B^0).
- La suma de las energías de estas cuatro partículas debería ser aproximadamente la mitad de la energía de los haces e^+e^- (en el C.M. de la colisión).
- Más otras restricciones que tienen que ver con tecnicismos del proceso de preselección.

La afirmación “debería ser aproximadamente” en las condiciones de arriba, significa que el valor de esta variable debe estar en un intervalo dado. Las dimensiones de dichos intervalos vienen determinadas por la resolución de los mecanismos de detección que se utilizaron para obtener esta información.

Ahora, si no existiese ninguna combinación que satisfaga las condiciones de arriba, entonces el evento es dejado de lado. Pero, si existe al menos una combinación de cuatro partículas dentro del evento que si satisface estas condiciones, entonces a ésta combinación se le conoce como *posible candidato*. Puede ocurrir que dentro de un evento se cuente con más de un posible candidato, en éste caso, el sistema de preselección escoge a aquel posible candidato que satisfaga mejor las condiciones antes mencionadas. Por último, puede ocurrir una situación en la cual se cuente con más de un mejor posible candidato, el criterio es escoger uno entre estos al azar. A la combinación de cuatro partículas así elegida se le conoce como *el candidato*, y al resto de partículas de este evento seleccionado se le conoce como *el resto del evento*. Al conjunto de eventos así seleccionados lo llamaremos muestra estadística. Con la información de cada uno de los eventos en la muestra se construyen variables evento por evento (sea

con la información que se tiene del candidato o del resto del evento) las cuales serán utilizadas en el proceso de construcción del modelo estadístico. En definitiva, la muestra constará de un conjunto de eventos a los cuales se les asociarán n observables con la información que se tiene del evento. De estos observables se consideran aquellos que, para los propósitos del análisis, resumen mejor la información que dicho evento posee.

Nótese que si el detector fuese 100 % preciso y 100 % exacto, la expresión “debería ser aproximadamente” en las condiciones que rigen al proceso de preselección deberían cambiarse por “sería exactamente”. Por supuesto que en realidad, el detector no es ni 100 % preciso ni 100 % exacto. Debido a esto, dentro de cada evento seleccionado el candidato puede no estar conformado por una combinación de cuatro partículas que son el producto del decaimiento de un mesón B^0 . En definitiva, lo que se quiere decir es que el proceso de preselección no es 100 % exacto (cada evento preseleccionado no forma parte necesariamente de los que se quiere estudiar) ni 100 % eficiente (el proceso de preselección descarta algunos eventos que interesan), y por consiguiente, la muestra estadística está contaminada por eventos que no son del tipo que se pretenden estudiar. Esta muestra estadística se puede separar en un conjunto de contribuciones o especies que se van a describir a continuación.

4.1.1. Las Especies dentro de la Muestra.

Como se ha venido mencionando, debido a que el proceso de preselección no es 100 % exacto, la muestra estadística está contaminada. Por este motivo, la muestra está compuesta de una serie de especies que se pueden clasificar como *Señal* y *Fondo*.

La Señal.

Considerese un evento preseleccionado el cual está conformado por los hijos del decaimiento de un par $B^0\bar{B}^0$. Más específicamente, considerese que dentro de este evento el proceso de decaimiento del mesón B^0 haya sido a través del modo $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$. A este tipos de eventos se les denomina como *Eventos de Señal* (S). Es el número de este tipo de eventos dentro de la muestra estadística lo que se pretende obtener para el cálculo posterior del *Branching Ratio* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$. Ahora, supongase que dentro de este evento de señal se tiene que la mejor combinación de cuatro partículas escogida en el proceso de preselección (es decir, el candidato del evento) sea la constituida por los hijos del decaimiento del mesón B^0 , el candidato de este tipo de evento ha sido bien reconstruido y por este motivo, a los eventos de señal con estas características se les conoce como *Eventos de Señal Truth Matched* (TM) (o eventos bien emparejados). Por otra parte, puede ocurrir la casualidad que el candidato escogido esté constituido por una combinación de partículas que no provienen de la desintegración del mesón B^0 , sino, parte de las partículas utilizadas en la construcción del candidato provienen de los hijos del decaimiento del mesón \bar{B}^0 . En este caso, el candidato ha sido mal reconstruido. Por este motivo, a este tipo de eventos de Señal se les conoce como *Eventos de Señal Self-Cross-Feed* (SCF) (o eventos de combinación cruzada).

Para poner en claro lo que se acaba de decir, considerese el siguiente ejemplo.

Supongase un evento de la forma $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B^0\bar{B}^0$. Además, supongase que el mesón B^0 se desintegra en el estado final $K^+\pi^-\pi^0$ y el \bar{B}^0 en $D^{*+}\pi^-\pi^0$. Así que, se tiene dentro del evento cuatro fotones (dos provenientes del π^0 hijo del mesón B^0 y dos provenientes de otro π^0 hijo del mesón \bar{B}^0), dos π^- , un K^+ y un D^{*+} . Supongamos adicionalmente que, por casualidad, el cálculo de la masa invariante del π^0 realizado con un fotón proveniente del mesón B^0 y un fotón proveniente del \bar{B}^0 esta más cerca de $135MeV$ que el cálculo realizado con los dos fotones provenientes del B^0 . En este caso, el sistema de preselección eligirá la “mala combinación” y desechará la “correcta”. Estamos en presencia entonces de un evento de señal SCF. Si se tiene en vez de esto, el caso en el cual la mejor combinación para el cálculo de la masa del π^0 es con los fotones provenientes del B^0 , y adicionalmente el candidato reconstruido es con el π^- proveniente del B^0 , este evento es entonces del tipo señal TM.

Antes de continuar conviene mencionar una estructura adicional que tienen los eventos de Señal que será fundamental para la construcción del modelo estadístico. Esto tiene que ver con distintas contribuciones al modo de decaimiento $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$ que se pueden separar en dos grupos: los *Modos Resonantes* y el *Modo No-Resonante*.

Los Modos Resonantes y el Modo No-Resonante.

Un evento de señal está caracterizado por la ocurrencia de un proceso del tipo $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$, para cada uno de éstos eventos de señal pueden ocurrir dos posibilidades. Una de éstas posibilidades es que el mesón B^0 se desintegre directamente en el estado final considerado. Este tipo de modo de decaimiento es llamado Modo No-Resonante. La otra posibilidad es que el mesón B^0 al desintegrarse pase por un estado intermedio, *una Resonancia*, antes de terminar en el estado final $K^+\pi^-\pi^0$. A este tipo de modos de desintegración se les llaman Modos Resonantes. Entre los modos resonantes más representativos dentro de la muestra se tienen:

- $B^0 \rightarrow D^0\pi^0$; $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$; estado final $K^+\pi^-\pi^0$.
- $B^0 \rightarrow D^-K^+$; $D^- \rightarrow \pi^-\pi^0$; estado final $K^+\pi^-\pi^0$.
- $B^0 \rightarrow K^{*0}\pi^0$; $K^{*0} \rightarrow K^+\pi^-$; estado final $K^+\pi^-\pi^0$.
- $B^0 \rightarrow K^{*+}\pi^-$; $K^{*+} \rightarrow K^+\pi^0$; estado final $K^+\pi^-\pi^0$.
- $B^0 \rightarrow K^+\rho^-$; $\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0$; estado final $K^+\pi^-\pi^0$.

Se observa entonces que la especie de Señal está constituida de seis subespecies, cinco especies caracterizadas por un modo de desintegración resonante y una especie caracterizada por el modo no-resonante, y que cada una de estas, a su vez, está conformada por dos especies, los eventos bien reconstruidos (TM) y los mal reconstruidos (SCF). Cada una de éstas especies tendrán unas propiedades bien características de las que se tratará de tomar ventaja en el proceso de la construcción del modelo estadístico. La existencia de estos modos resonantes da lugar a la introducción de lo que se conoce como *masas invariantes a dos cuerpos* y el *Plano de Dalitz*.

Las Masas Invariantes a dos Cuerpos y el Plano de Dalitz.

De manera general, considerese la desintegración de una partícula de masa M en tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3 . La situación se esquematiza en la figura. 4.1.

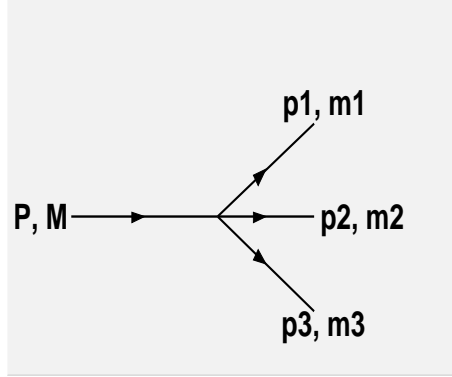


Figura 4.1: Imagen esquemática de una desintegración a tres Cuerpos.

Denotese por P el cuadrimomento de la partícula de masa M y por p_i el cuadrimomento de la partícula de masa m_i (con $i = 1, 2, 3$). Por conservación del cuadrimomento debe tenerse lo siguiente:

$$P = \sum_i p_i; i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Ahora se procede a contar el número mínimo de parámetros que se necesitan para describir la cinemática de éste decaimiento a tres cuerpos. En principio se tienen doce parámetros (el cuadrimomento de cada partícula en el estado final tiene cuatro componentes), pero debido a la conservación del cuadrimomento éstos se reducen a ocho (la conservación del cuadrimomento impone cuatro condiciones). Además, cada uno de los cuadrimomentos de las partículas debe satisfacer:

$$p_i^2 = m_i^2; i = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Estas últimas condiciones reduce el número de parámetros a cinco. Estos cinco parámetros son arbitrarios e independientes y pueden escogerse a conveniencia. Se pueden tomar tres de éstos como los ángulos que hacen los trimomentos de las partículas con un eje particular. Resta entonces escoger dos parámetros para describir completamente la cinemática del decaimiento. A tal fin, se introducen las variables siguientes:

$$m_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2. \quad (4.3)$$

Estas cantidades satisfacen $m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$, de manera que no son independientes entre sí. Se mostrará a continuación una particularidad importante de estas variables. Supongase que la desintegración de la partícula de masa

M no ocurre directamente al estado final m_1, m_2, m_3 , sino que ésta pasa por un estado resonante de masa M' y que el decaimiento ocurre de la siguiente manera:

$$M \rightarrow \text{Partícula}' + \text{partícula}_3; \text{ y } M' \rightarrow \text{partícula}_1 + \text{partícula}_2. \quad (4.4)$$

La condición de la conservación del cuadrimomento de la partícula de masa M se satisface todavía, pero la presencia de una resonancia intermedia en el proceso de desintegración impone una condición adicional. Denotese por P' el cuadrimomento de la resonancia de masa M' . La conservación del cuadrimomento en el proceso $\text{Partícula}' \rightarrow \text{partícula}_1 + \text{partícula}_2$ impone la condición siguiente:

$$P' = p_1 + p_2. \quad (4.5)$$

Dado esto, se tiene que $M'^2 = P'^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_{12}^2$; es decir, m_{12}^2 es una constante igual a la masa de la resonancia intermedia. Por esto último y por el hecho que las m_{ij}^2 son el módulo de un cuadrimomento (el módulo de cualquier cuadvivector es una cantidad invariante de Lorentz) a las m_{ij} se les denomina *Masas Invariantes a dos Cuerpos*.

Para un valor dado de m_{12}^2 , el rango de variación de m_{23}^2 está determinado por los siguientes valores máximo y mínimo:

$$(m_{23}^2)_{max} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2. \quad (4.6)$$

$$(m_{23}^2)_{min} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2. \quad (4.7)$$

en donde $E_2^* = (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)/2m_{12}$ y $E_3^* = (M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)/2m_{12}$ son las energías de las partículas 2 y 3 es el sistema del centro de masa de las partículas 1 y 2. A la región plana de variación de los cuadrados de dos de las masas invariantes, por ejemplo m_{12}^2 y m_{23}^2 , es lo que se conoce como el *Plano de Dalitz*. La forma del plano de Dalitz se muestra en la figura 4.2.

Este plano es una herramienta útil para el estudio de las propiedades características tanto de los modos resonantes como del modo no-resonante. Recuerdese que en la presencia de una resonancia intermedia una de las masas invariantes es constante, de manera que, la distribución de eventos resonantes en el plano de Dalitz debería ser una línea recta vertical, horizontal u oblicua, dependiendo de cuales masas invariantes han sido utilizadas para la construcción del plano de Dalitz. En el ejemplo que se consideró anteriormente se tenía que $m_{12} = M'$, entonces el plano de Dalitz debe estar conformados sólo por aquellos valores de m_{23} permitidos para este valor de m_{12} . En cambio, para un modo no resonante, las variables m_{12} y m_{23} pueden tomar todos los valores posibles dentro del plano de Dalitz. Se observa entonces que, los modos no-resonantes se caracterizan por una distribución uniforme a lo largo del Plano de Dalitz, en cambio, los modos resonantes están caracterizados por estructuras dentro de este plano. Aquí se pone en evidencia la importancia de las variables de Dalitz (masas invariantes con las que se construye el plano de Dalitz.) para caracterizar a los distintos

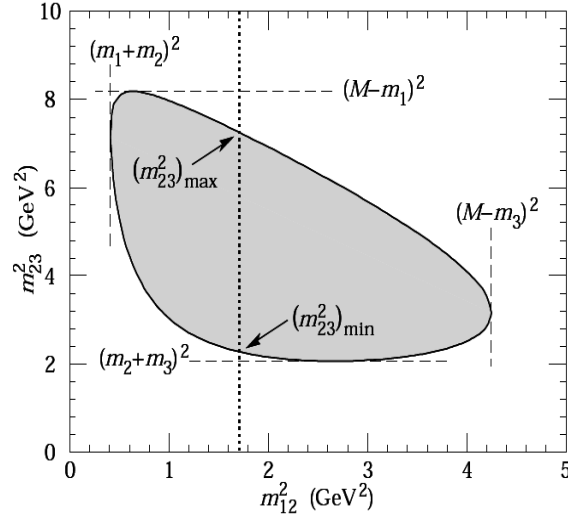


Figura 4.2: Plano de Dalitz para un estado final a tres cuerpos

modos que contribuyen dentro de la muestra de señal. Ahora se pasará a describir las otras especies presentes dentro de la muestra estadística.

El Fondo.

Considerese ahora el complemento de los eventos de señal dentro de la muestra; es decir, aquellos eventos preseleccionados los cuales pueden o no estar caracterizados por el proceso de formación de un par $B^0\bar{B}^0$. Este tipo de eventos son los conocidos con el nombre de *Eventos de Fondo*. Dentro de los eventos de Fondo se encuentran dos grupos, los *Eventos de Fondo $q\bar{q}$* (QQB) y los *Eventos de Fondo $b\bar{b}$* (BB).

Los eventos de Fondo QQB son aquellos en los cuales no se dió el proceso de formación de un par $B\bar{B}$ (en donde B puede ser B^0 o B^+), sino, tomó lugar algún otro proceso de formación de partículas entre las cuales se encontraba una combinación de un kaón, un pión y dos fotones que por casualidad tuvieron las características necesarias para ser preseleccionados. A este tipo de eventos se les conoce como Fondo $q\bar{q}$, debido a que tienen que ver con procesos de formación de estados ligados $q\bar{q}$ con q algún quark distinto del quark b .

Los eventos de Fondo BB son aquellos en los cuales se dió un proceso del tipo $B^0\bar{B}^0$ o B^+B^- . En este tipo de eventos pueden darse dos posibilidades. Una posibilidad es el caso en el cual se haya dado el proceso $B^0\bar{B}^0$ y el mesón B^0 no se desintegre en el estado final $K^+\pi^-\pi^0$, sino en algún otro estado final parecido tal que el evento cuenta con al menos una combinación de cuatro partículas que cumplen con la hipótesis de candidato. La otra posibilidad es que se haya dado el proceso B^+B^- y que nuevamente, el decaimiento de estas partículas sea tal que el evento cuente con una combinación de cuatro partículas que califiquen como candidato.

El problema de los análisis estadísticos estriba en buscar una manera inteligente de

manejar el fondo dentro de la muestra, para así obtener la mayor cantidad de información sobre la señal. Esta tarea no es sencilla, ya que no existe una forma sistemática de tratar al fondo, y además, la cantidad de eventos de señal en razón a los de fondo es aproximadamente, al menos en el caso presente, del 15 % (este número es un promedio estimado de otros análisis predecesores al presente). La componente de fondo preponderante es el Fondo QQB, que es a la que se le dará mayor importancia. La inclusión de la otra componente, el Fondo BB, se considerará como un término de corrección de menor orden al modelo estadístico. Con la discusión precedente queda definida la muestra, se procede entonces a la construcción del modelo de análisis.

4.2. El Modelo Estadístico.

El objetivo de este análisis es el cálculo del *Branching Ratio semi-inclusivo* sin *charm* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$. El *Branching Ratio* de algún modo de desintegración del B^0 es la probabilidad que, dado que se ha producido un mesón B^0 , éste decaiga en este modo específico. El *Branching Ratio semi-inclusivo* sin *charm* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$ está definido como la probabilidad que, dado que se ha producido un mesón B^0 , éste decaiga en el estado final $K^+\pi^-\pi^0$ sin que se haya pasado por las resonancias intermedias D^0 y D^- , más adelante se explicará con un poco más de detalle lo que esto significa. El cálculo del *Branching Ratio* requiere de la obtención del número total de eventos de señal que se han producido en *BaBar*, ya que operacionalmente está definido por:

$$\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0) = \frac{N_{stot}}{N_{B^0}} \quad (4.8)$$

En donde N_S es el número de eventos de señal producidos en *BaBar*, en los cuales el decaimiento del B^0 no ha pasado por los modos resonantes D^0 y D^- y N_{B^0} es el número total de eventos caracterizados por la producción de un par $B^0\bar{B}^0$ producidos por PEP-II. Accediendo al número de señal dentro de la muestra, N_S , se puede acceder a N_{stot} con un análisis de eficiencia. La aproximación más frecuente para obtener a N_S es construir, evento por evento, variables que sean capaces de discriminar a la señal del Fondo. Supongase que se pudiese construir una variable que fuese positiva para la señal y negativa para el fondo, en este caso bastaría con descartar a aquellos eventos que tengan un valor negativo de dicha variable, terminando así con una muestra de eventos de señal con 100 % de pureza (no hay ni un solo evento de fondo en la muestra) y 100 % de eficiencia (en el proceso no se perdió ni un solo evento de señal). Este tipo de variables no existe, o por lo menos no se ha encontrado alguna manera de construirlas. Teniendo en claro esto último, es evidente que un simple proceso de cortar y contar sobre una variable no es el mejor método para lograr el cometido de análisis. En vez de esto, el método que se utilizará hace uso de ciertas variables que tienen un buen poder de discriminación; es decir, poseen distribuciones bastantes diferentes para la señal y para el fondo. La aproximación será la siguiente: la aplicación del método de verosimilitud máxima para obtener la p.d.f que rige a la muestra, y luego a través de

ésta, con un análisis de eficiencia, obtener el número de señal (esto se mostrará más adelante).

Ahora bien, como ya se ha mencionado en el capítulo 3, dada una muestra que por hipótesis se supone que es estadísticamente independiente y una p.d.f. de forma conocida que depende de ciertos parámetros, el método de verosimilitud máxima lo que hace es calcular el valor de dichos parámetros que mejor representan a la muestra. Dada la descripción de la muestra en la sección precedente, se da pie a establecer la hipótesis siguiente: esta muestra es un conjunto de eventos estadísticamente independientes. Lo único que resta es proponer la p.d.f. que rige a la muestra. Proponer una p.d.f. significa proponer una función de cierto número de variables que depende de cierto número de parámetros. Como ya se ha mencionado en la sección 1, la muestra es una mezcla complicada de varias especies y no se conoce *a priori* el proceso específico por medio del cual dichas especies entran a formar parte de la muestra. Por este motivo, el proceso de proponer la p.d.f. está lejos de lo trivial. Una manera de resolver este problema es utilizar otras muestras conocidas como *muestras de control*.

4.2.1. Las Muestras de Control.

La hipótesis de independencia estadística entre los eventos que conforman a la muestra implica que las distintas especies dentro de la misma son estadísticamente independientes. Dicho esto, si se tuviese una manera de conocer la forma de las p.d.f.'s (supuestas normalizadas a la unidad) que describen a cada una de las especies dentro de la muestra, entonces la p.d.f total se podría escribir de la siguiente manera:

$$Pdf_{Total} = \alpha_1 Pdf_{TM} + \alpha_2 Pdf_{SCF} + \alpha_3 Pdf_{QQB} + \alpha_4 Pdf_{BB} \quad (4.9)$$

en donde Pdf_{TM} , Pdf_{SCF} , Pdf_{QQB} y Pdf_{BB} son las pdf's que representan a las distintas especies dentro de la muestra, y las cantidades α_i son constantes que satisfacen,

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1. \quad (4.10)$$

Una forma de proponer a las p.d.f que describen a las distintas especies es estudiando otras muestras conocidas como *muestras de control*. Una muestra de control para una especie dada es una muestra que se cree que tiene esencialmente todas las características de dicha especie. Para cada una de las especies que conforman a la muestra se va a definir una muestra de control. Estas se describen a continuación.

La Muestra de Control para la Señal.

La muestra de control que se considerará para la especie de señal está constituida de una serie de eventos generados por Monte Carlo (M.C.) de la manera que se describe a continuación. Se tiene un sistema de software, *Geant 4*, que simula un evento de señal dentro del detector *BaBar*. El sistema parte de la formación de un par $B^0 \bar{B}^0$ y la desintegración independiente uno del otro. El mesón B^0 se desintegra en $K^+ \pi^- \pi^0$

(pasando por una resonancia intermedia o no) y el mesón \bar{B}^0 se desintegra en algún otro modo. Los procesos de desintegración de ambos mesones son simulados detalladamente. Por ejemplo, el sistema se coloca en el referencial en reposo del mesón B^0 . Seguidamente, genera aleatoriamente las energías y los trimomentos de las partículas en el estado final (tomando en cuenta, por supuesto, la conservación del cuadrimento total del sistema). Luego de esto, se simula el proceso de decaimiento del π^0 en dos fotones. A continuación, el sistema se transporta al referencial del laboratorio, y en dicho referencial se simula muy detalladamente la evolución del kaón, el pión y los dos fotones dentro del detector, sus interacciones con la materia y el proceso de adquisición de datos. De igual manera, se realiza el mismo procedimiento para los hijos de la desintegración del \bar{B}^0 .

De esta manera se puede generar un número muy grande de eventos. Dichos eventos son reconstruidos y preseleccionados siguiendo los mismos protocolos que se han seguido con la muestra real. Lo importante de este proceso de generación de eventos es que, por ser una simulación, se tiene toda la información sobre cuales son las distintas partículas que conforman un evento dado, y además, los procesos que las han generado. Esto quiere decir que, dentro de esta muestra de eventos virtuales de señal, se tiene conocimiento de cuales eventos han sido mal reconstruidos y cuales no; es decir, se tienen las muestras de control de los eventos se señal TM y SCF para los distintos modos resonantes y el modo no-resonante. Además de todo esto, se tiene conocimiento de cuál es la eficiencia del proceso de preselección. A través de este proceso, se obtiene una muestra de control para la especie de señal que contiene por separado a las muestras de control para la señal TM y SCF. Debido a que se pretende hacer una medición semi-inclusiva sin *charm* del *Branching Ratio* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow k^+ \pi^- \pi^0)$, al seleccionar los eventos de señal de la muestra, no nos interesa saber a que tipo de especie de señal (resonante o no-resonante) pertenece. Por este motivo, se tomará como muestra de control de señal a los eventos no-resonantes generados por Monte Carlo, y para no producir un sesgo en el modelo por esta elección, se construiremos sólo con variables que no esten correlacionadas con las variables de Dalitz; es decir, el modelo será construido con variables que no dependen de la estructura resonante o no-resonante de los eventos se señal. Para eliminar los eventos resonantes D^0 y D^- se harán cortes en las masas invariantes a dos cuerpos correspondientes. Este último procedimiento se describirá más adelante. Entonces, con esta elección se define así a la muestra de control para la especie de señal.

La Muestra de Control para el Fondo $q\bar{q}$.

Se podría pensar que la muestra de control para los eventos de fondo $q\bar{q}$ se puede conseguir de una manera análoga a la muestra de control de la señal. Utilizar el mismo procedimiento para esta especie sería partir de un conjunto más grande de partículas (en el caso de la señal fueron solo dos, el par $B^0 \bar{B}^0$) y tendría que tenerse en cuenta un número muy grande de modos para cada una de ellas. Una forma alternativa, y menos complicada, de obtener una muestra de control para el fondo QQB es recolectar data del detector *BaBar*, pero en un modo de operación de PEP-II llamado off-resonance.

Esto lo que significa es que la fábrica de mesones B trabaja en un modo en el cual los haces e^+e^- tienen una energía menor a la suma de las masas del par $B^0\bar{B}^0$, y por este hecho no se genera ningún mesón B . La ventaja de hacer esto es que se genera de forma aislada otros tipos de eventos que, dentro de la muestra, se les llamaría eventos de fondo QQB. Los eventos de fondo QQB así generados tienen una menor energía en comparación con los eventos de fondo QQB que se encuentran en la muestra. Aun así, se considerará que los eventos generados de esta forma se pueden tomar como una muestra de control significativa para el análisis. Por supuesto, la data recolectada pasa por los mismos protocolos de reconstrucción y preselección que la data de la muestra estadística.

La Muestra de Control para el Fondo $b\bar{b}$.

No se tiene ningún modo de operación de PEP-II que pueda generar de forma aislada, como en el caso del fondo QQB, eventos del tipo fondo BB. El procedimiento en este caso es análogo al procedimiento de obtención de la muestra de control para la especie de señal. Nuevamente, lo que se hace es generar por un sistema de software (*Genat 4*), de manera similar al caso de la muestra de control de la señal, eventos del tipo BB, de los cuales se conoce su *Branching Ratio* y que se cree que puede estar presente en la muestra. Cada uno estos eventos son generados en proporción a su *Branching Ratio*, y nuevamente, los procesos de decaimiento, la evolución dentro del detector y adquisición de datos son simulados en detalle por el software. La data así obtenida, como en los casos anteriores, pasa por los mismos protocolos de reconstrucción y preselección de la muestra real. Se considerará entonces a los eventos así construidos como una muestra significativa para la especie de fondo BB presente.

Para el cálculo de errores sistemáticos, la última parte de este capítulo, es conveniente subclasificar a las muestras de control del Fondo BB en tres subespecies:

1. **Fondo BB Exclusivo (+):** Este tipo de fondo BB son eventos con desintegraciones de mesones B caracterizadas por una transición del tipo $b \rightarrow u$ (vértice V_{ub}) a nivel de quarks. Son catalogados como (+) debido a que son por lo general decaimientos a dos cuerpos. Por ejemplo, el proceso podría ser $B^0 \rightarrow K^+\pi^-$, y durante el proceso de preselección se toman este kaón y pión en conjunto con dos fotones hijos de la desintegración del \bar{B}^0 . Lo que resultaría entonces en un candidato con mayor energía que la del B^0 .
2. **Fondo BB Exclusivo (-):** Son eventos de fondo BB que se diferencian de sus contrapartes (+) en que son por lo general decaimientos a cuatro cuerpos. El proceso de decaimiento pudiera ser $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0 + X$, en donde X es alguna partícula muy blanda (de muy poca energía). Durante el proceso de preselección puede ocurrir que el candidato esté conformado por el kaón, y piones hijos del B^0 , terminado así con un candidato con una energía por debajo de la del mesón B^0 .
3. **Fondo BB Genérico:** Este tipo de fondo BB son eventos con desintegraciones de mesones B caracterizadas por una transición del tipo $b \rightarrow c$ (vértice V_{cb}) a nivel de

quarks. También son eventos de desintegraciones semileptónicas (desintegraciones en las cuales el estado final está conformado por lo menos por un leptón) de los mesones B .

Como se verá más adelante, esta subclasificación permitirá hacer estimados de errores sistemáticos de una manera simple. Seguiría entonces proponer a las p.d.f, con la ayuda de las muestras de control que se acaban de definir, que rigen a las distintas especies dentro de la muestra. Antes de definir a estas p.d.f, se definen a las variables de las cuales estas van a depender.

4.2.2. Las Variables Elegidas.

El análisis utiliza principalmente tres variables de discriminación que permiten separar a los eventos de señal de los eventos de fondo. Las variables elegidas para el análisis se dividen en dos grupos, dos variables *Cinématicas* y una variable *topológica*.

Las variables Cinématicas.

La desintegración de la resonancia $\Upsilon(4S)$ en el par $B^0 \bar{B}^0$ impone dos restricciones en el referencial del centro de masa de la colisión e^+e^- . Por una parte, la masa invariante del cuadrimomento reconstruido con los hijos de la desintegración del B^0 debe ser igual a m_{B^0} ; es decir, a la masa del mesón B^0 . Por otra parte, la energía total, en el referencial del centro de masa de la colisión e^+e^- , construida con los hijos del B^0 debe ser igual a la mitad de la energía de los haces e^+e^- . Resumiendo, se debe tener que,

$$m_{B^0}^2 = E_{rec}^{*2} - p_{rec}^{*2} \text{ y } E_{rec}^* = \frac{E_{haces}^*}{2} \quad (4.11)$$

en donde E_{rec}^* y p_{rec}^* son la energía y el trimomento reconstruidos de los hijos del mesón B^0 respectivamente, y E_{haces}^* es la energía de los haces e^+e^- . El simbolo “*” en cada una de las cantidades anteriores indica que éstas son calculadas en el referencial de la colisión e^+e^- . Las restricciones 4.11 permiten distinguir a los eventos de señal de los de fondo. Para explotarlas plenamente, se introduzcan a las variables siguientes.

La Variable m_{ES} .

La resolución de m_{B^0} es bastante mala debido a que no se conoce a E_{rec}^* con muy buena precisión. En vez de m_{B^0} se introducirá a la variable m_{ES} definida como,

$$m_{ES}^2 = \left(\frac{E_{haces}^*}{2} \right)^2 - p_{rec}^{*2} \quad (4.12)$$

Nótese que la diferencia entre m_{B^0} y m_{ES} está en el intercambio del término E_{rec}^* en la primera de las relaciones 4.11 por el término $E_{haces}^*/2$. La resolución en m_{ES} es mejor que la resolución de m_{B^0} ya que, el valor de E_{haces}^* se conoce con muy buena precisión y el término p_{rec}^* es débil delante de este último debido a que en el $C.M.$ el mesón B^0 está casi al reposo. Está es una de las variables que se vendrá utilizando a lo

largo del análisis. La variable m_{ES} es construída con los trimomentos de las partículas que conforman el candidato dentro de cada evento seleccionado. Nótese que por su definición, dicha variable no depende de las masas de las partículas utilizadas en su construcción. Construyendo a esta variable para las muestras de control Señal TM, SCF y Fondo QQB se obtienen las distribuciones que se muestran en figura 4.3. Recuerdese que será más adelante cuando se incluya a la especie Fondo BB dentro del análisis.

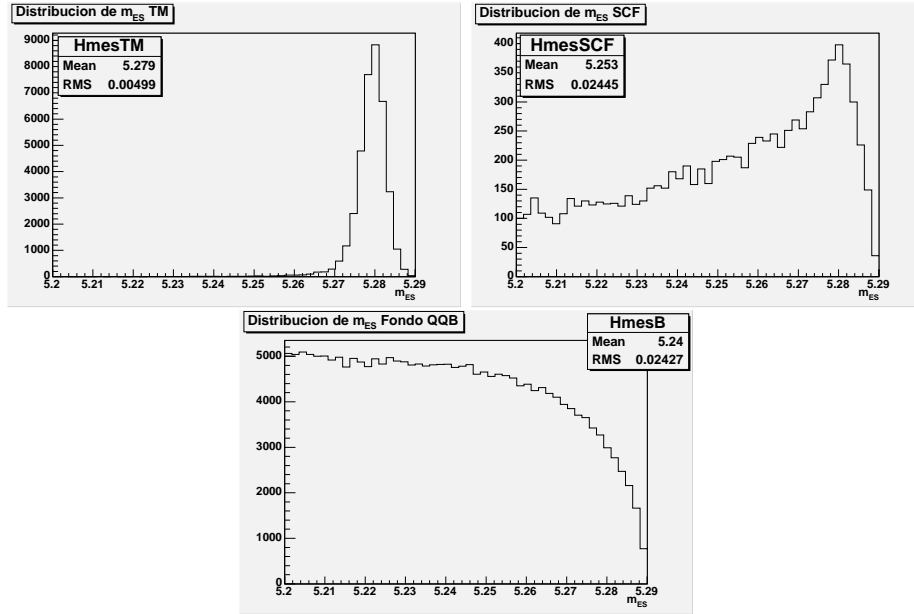


Figura 4.3: Distribuciones de la variable m_{ES} . La Señal TM arriba a la izquierda, SCF arriba a la derecha y Fondo QQB abajo.

Se observamos que la distribución de la variable m_{ES} para la señal TM está alrededor del valor $5,279 GeV = m_{B^0}$, como es de esperarse. En cambio, la distribución para el fondo QQB tiene valores apreciables en el rango $(5,2, 5,27)$, rango en el cual no se encuentran practicamente eventos de señal. Son estas diferencias entre estas distribuciones las que permitiran discriminar entre los eventos de señal y los de Fondo QQB. Este es el motivo por el cual se ha elegido a m_{ES} como una de las variables de discriminación ha utilizar en el análisis. Se sigue con la definición de la segunda variable cinématica.

La Variable ΔE .

La variable ΔE está definidad como sigue,

$$\Delta E = E_{rec}^* - \frac{E_{haces}^*}{2} \quad (4.13)$$

Nuevamente, la energía E_{rec}^* , y por consiguiente también ΔE , es construida con los valores de las masas y los trimomentos de las partículas que conforman el candidato

en cada uno de los eventos. Las distribuciones de esta variable para las muestras de control de la Señal TM, SCF y el Fondo QQB se muestran en la figura 4.4.

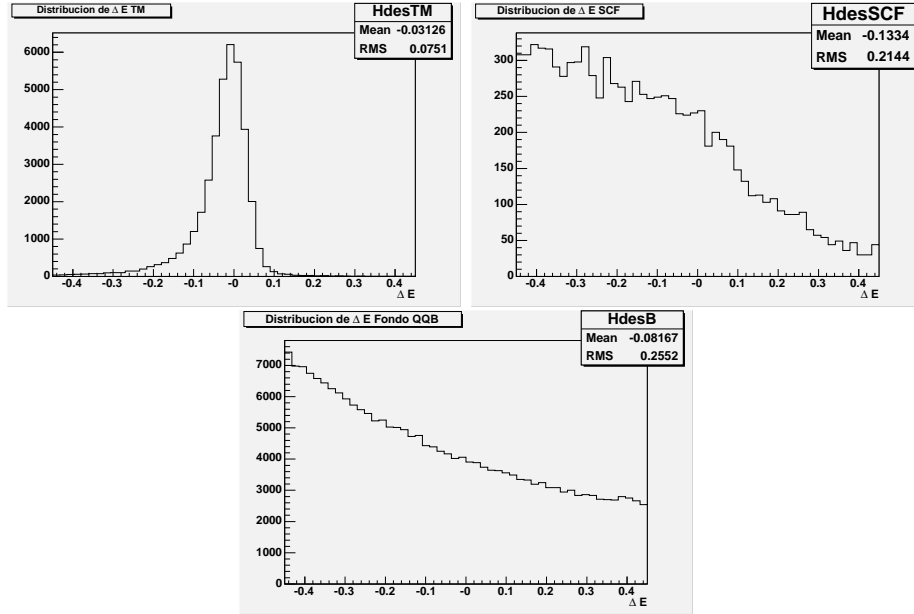


Figura 4.4: Distribuciones de la variable ΔE . La Señal TM arriba a la derecha, SCF arriba a la izquierda y Fondo QQB abajo.

La distribución de ΔE para señal está alrededor de cero, como es de esperarse. En cambio, la distribución para el Fondo QQB, está más poblada para aquellos valores negativos de ΔE . Estas distribuciones tienen diferencias significativas que permitirán discriminar entre los eventos de señal y el fondo QQB.

A continuación se pasa a definir a una tercera variable que se utilizará para la construcción del modelo estadístico, la variable red de neuronas.

Las Variables Topológicas.

Considerese un evento del tipo $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B^0\bar{B}^0$. En el referencial en reposo de la resonancia $\Upsilon(4S)$ el par de mesones $B^0\bar{B}^0$ son producidos casi al reposo, ya que la masa de la resonancia es a penas superior al doble de la masa de un mesón B . Además, los mesones se desintegran independientemente el uno del otro. De esto resulta que los eventos de señal no tienen ninguna dirección preferencial para desintegrarse, y por consiguiente, la distribución de los hijos productos de los eventos de señal deberían tener una distribución angular uniforme en el referencial en reposo del $\Upsilon(4S)$. Este no es el caso de los eventos de Fondo QQB. Debido a que los quarks q y \bar{q} son más ligeros a los quarks b y \bar{b} , los sistemas ligados que estos forman tienen una gran impulsión inicial y se fragmentan en dos *jets* de hadrones de misma dirección y de impulsiones en sentidos opuestos. Ver figura 4.5.



Figura 4.5: Topología de los eventos de Señal y Fondo $q\bar{q}$. El evento de Señal a la izquierda y el de Fondo $q\bar{q}$ a la derecha.

Existen gran cantidad de variables topológicas que explotan estas diferencias entre los eventos de señal y fondo QQB, pero las que se utilizaran son: L_0 , L_2 , $cosbmon$ y $cosbthr$. $cosbmon$ es el coseno del ángulo formado entre el trimomento del candidato del evento y el eje del detector, y $cosbthr$ es el coseno del ángulo entre el eje de empuje del resto del evento y el eje del detector. El eje de empuje está definido como el eje que forma el impulso de la partícula de más alta anergía dentro del resto del evento en el referencial del C.M de la colisión e^+e^- . L_0 y L_2 están definidos como: $L_0 = \sum_i p_i^*$ y $L_2 = \sum_i p_i^* |\cos \theta_i^*|^2$, en donde p_i^* y θ_i^* son la impulsión en el referencial del C.M. de la colisión e^+e^- y el ángulo de ésta impulsión con el eje de empuje de cada una de las partículas dentro del resto del evento. Ahora, estas variables topológicas están muy correlacionadas entre sí, y por lo tanto poseen esencialmente la misma información. Es conveniente resumir ésta información en una sola variable que se introducirá a continuación.

La Red de Neuronas (Onn).

La red de neuronas es una función no lineal de $Onn(cosbmon, cosbthr, L_0, L_2)$. Esta es construida a través del entrenamiento de redes neurales con muestras de control, garantizando una máxima separación entre los eventos de tipo señal y Fondo QQB. La distribución de esta variable para las muestras de control de señal TM, SCF y Fondo QQB se muestra en la figura 4.6 .

Se onserva que la distribución Onn tiene un pico muy agudo alrededor de 1 para la señal y alrededor de -1 para el Fondo QQB, cosa que no es de extrañar, ya que ésta variable ha sido construida para conseguir una máxima separación entre los eventos de señal y los de Fondo QQB.

Anteriormente se menciono que un procedimiento de sólo cortar y contar no es una aproximación muy precisa dada la muestra con la que se cuenta. Esto no quiere decir que no se le pueda sacar provecho a este procedimiento. A continuación se muestra como se puede cortar sobre nuestras variables y obtener así una muestra un poco más pura.

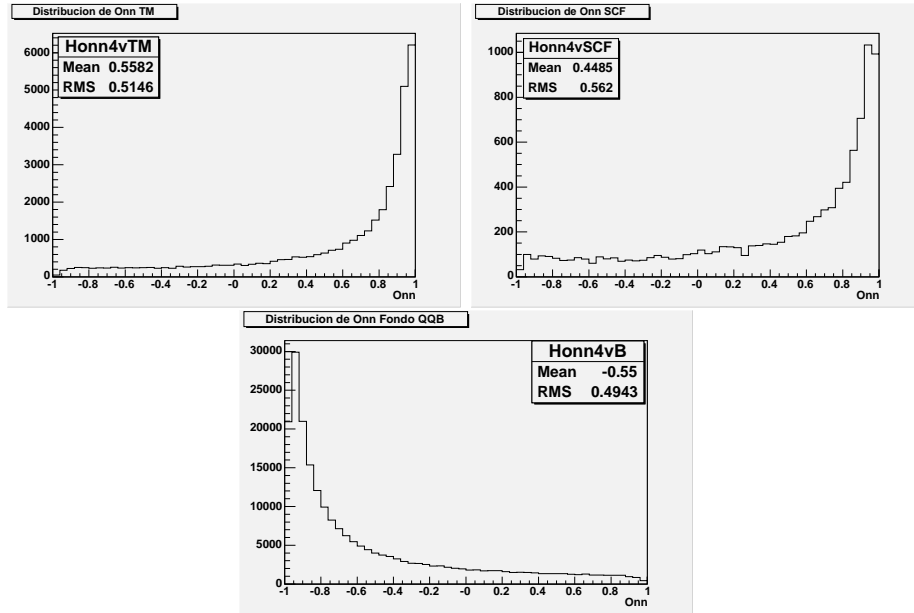


Figura 4.6: Distribuciones de la variable Onn . La Señal TM arriba a la derecha, SCF arriba a la izquierda y Fondo QQB abajo.

4.2.3. El Efecto Cortar y Contar.

Antes de proponer una p.d.f. para cada una de las muestras de control, se puede proceder a eliminar una cantidad substancial de eventos de fondo realizando cortes simples en cada una de las variables que se han escogido. Un criterio para decidir que cortes elegir, es hacer un gráfico de *pureza de la muestra vs valor del corte*, y también *significación estadística vs valor de corte*, el corte es realizado para una variable específica. Las definiciones de pureza y significación estadística se dan a continuación,

$$Pureza(Var) = \frac{N_S}{N_S + N_{QQB}} \quad (4.14)$$

$$Sig.Estadistica(Var) = \frac{N_S}{\sqrt{N_S + N_{QQB}}} \quad (4.15)$$

en donde, N_S es el número de eventos de señal dentro de la muestra y N_{QQB} es el número de eventos de Fondo QQB en la muestra para algún valor de corte en la variable Var . La pureza claramente es la fracción de eventos de señal dentro de la muestra, la significación estadística es el número de eventos de señal en unidades de error, en el supuesto que el número de eventos de señal dentro de la muestra que sobreviven a un corte de una variable siga una distribución de Poisson. N_S y N_{QQB} se calculan de la siguiente manera:

$$N_{(S,QQB)} = N_{S,QQB}(\text{Inicial en la muestra})Efic_{(S,QQB)}(Var) \quad (4.16)$$

en donde, $Efic_{(S,QQB)}(Var)$ es la eficiencia del corte. Esta puede calcularse con las muestras de control de la siguiente manera,

$$Efic_{(S,QQB)} = \frac{\text{número de eventos de (S, QQB) sobrevivientes al corte}}{\text{número inicial de eventos en la muestra de control de (S, QQB)}} \quad (4.17)$$

$N_{S,QQB}$ (Inicial en la muestra) es el número de eventos de señal o de Fondo QQB que se esperan estén dentro de nuestra muestra estadística. Estas cantidades se van a estimar para obtener un cálculo realista. Se estima a N_S (Inicial en la muestra) de la siguiente manera. Si se supone que la tasa de desintegración de $B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$ es del orden 4×10^{-5} (valor medio del “*world average*” actual), con una muestra de alrededor de unos 120 millones de mesones B^0 (datos producidos en *BaBar* 1999 y el 2003) y si se estima que el sistema de detección y de análisis tiene una eficiencia de 15%, se llega más o menos a unos 700 eventos de señal. Como un estimado de N_{QQB} (Inicial en la muestra) se toman unos 25000 eventos para hacer un estimado grueso. Estos números no tienen nada de fundamental, sólo permiten hacer estimaciones numéricas realistas de cantidades que caracterizan a la muestra.

Teniendo todo esto en cuenta, se obtienen las siguientes curvas de *pureza vs corte* y *sig. estadística vs corte* para cada una de las variables que se han elegido.

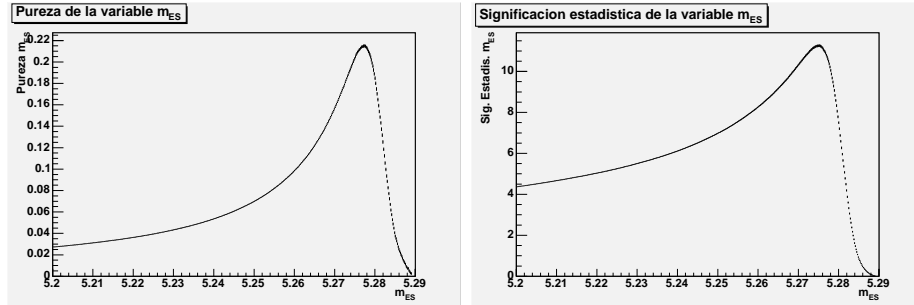


Figura 4.7: Curvas de Pureza vs Corte y Significación estadística vs Corte para la variable m_{ES} . Aquí el corte es del tipo: eventos con $m_{ES} > corte$.

Observando estos gráficos se pone en evidencia que un procedimiento de sólo cortar y contar no es efectivo, ya que la máxima pureza que se consigue con este tipo de procedimiento es del 20% para las variables m_{ES} y ΔE , y para la red de neuronas se consigue una pureza del 80%, pero en regiones en las cuales se ha eliminado también una gran cantidad de eventos de señal. Lo que se hará aquí es escoger una ventana en las tres variables escogidas que permita eliminar una cantidad considerable de eventos de fondo.

En la variable m_{ES} se ha decidido hacer el siguiente corte: $(5,23 < m_{ES} < 5,29)$. No se ha cortado drásticamente en esta variable ya que se eliminaría una gran cantidad de eventos de Fondo QQB y no se podría modelar de una forma estadísticamente significativa a la especie de Fondo QQB con una cantidad muy pequeña de eventos.

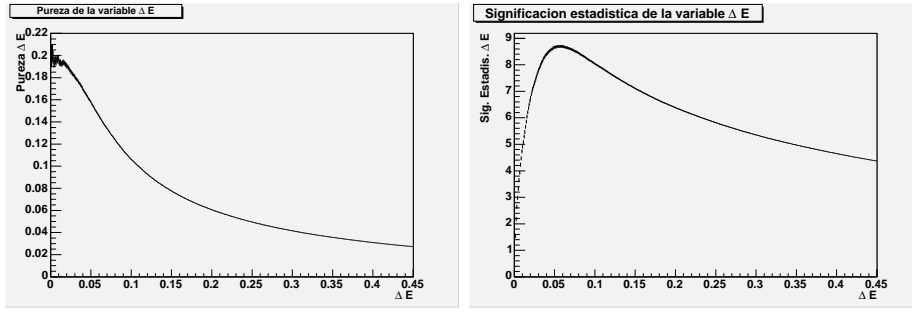


Figura 4.8: Curvas de Pureza vs Corte y Significación estadística vs Corte para la variable ΔE . Aquí el corte es del tipo: eventos con $|\Delta E| < corte$.

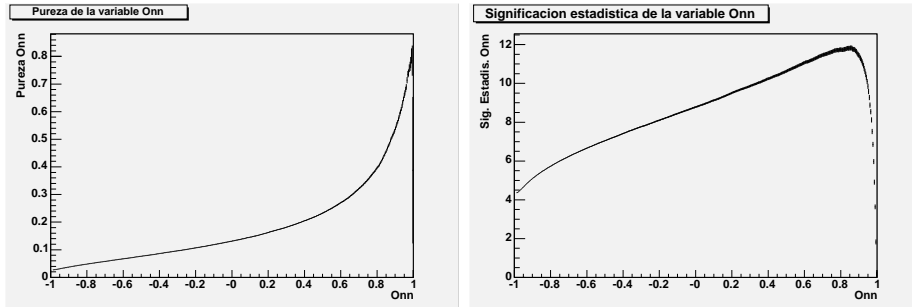


Figura 4.9: Curvas de Pureza vs Corte y Significación estadística vs Corte para la variable red de neuronas. Aquí el corte es del tipo: eventos con Red de Neuronas $> corte$.

Los cortes drásticos se han realizado en las otras dos variables. Se ha elegido a la ventana $(0,4 < Onn < 1,0)$ para la red de neuronas, un valor cercano al máximo de su significación estadística. Para la variable ΔE se ha elegido el corte asimétrico $(-0,17 < \Delta E < 0,1)$, ya que la distribución de esta variable no es simétrica. Los cortes en Onn y ΔE han sido para eliminar eventos de Fondo QQB, y el corte en m_{ES} ha sido para eliminar eventos de señal muy mal reconstruidos lejanos a 5,279. Luego de estos cortes, solamente se seleccionaran aquellos eventos de la muestra que se encuentre en la ventana V_1 que está definida por:

$$V_1 = (5,23 < m_{ES} < 5,29) \times (-0,17 < \Delta E < 0,1) \times (0,4 < Onn < 1,0) \quad (4.18)$$

Claro está que estos cortes eliminan eventos de señal también, pero, como se verá más adelante, es un efecto que luego se corregirá. Las distribuciones de las variables de discriminación en esta ventana para las tres tipos de muestras de control se muestran en las figuras 4.10, 4.11, 4.12.

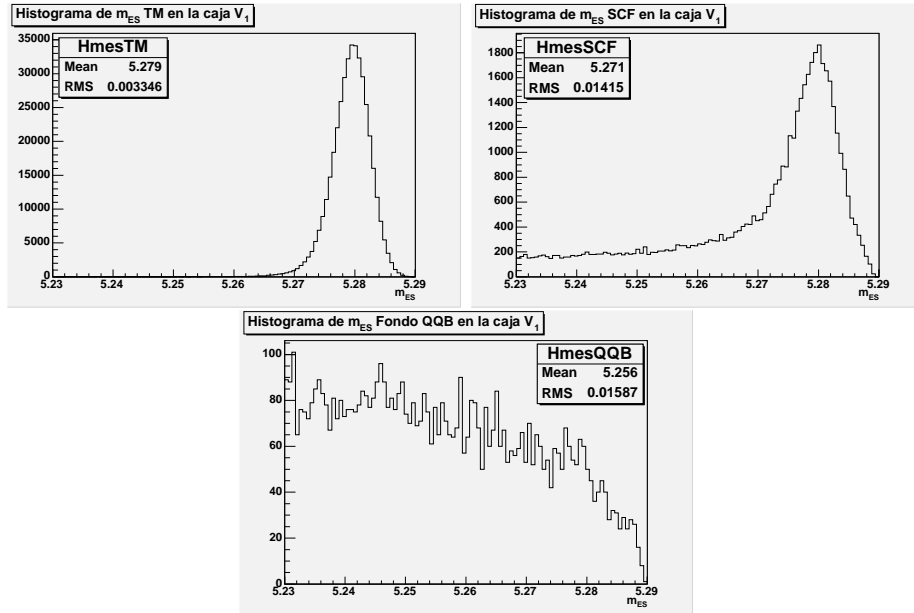


Figura 4.10: Distribución de la variable m_{ES} para las muestras de control Señal TM (arriba derecha), SCF (arriba izquierda) y Fondo QQB (abajo) en V_1 .

La introducción de una Nueva Variable Topológica.

Observando la figura 4.12, se observa que la distribución de la variable Onn tiene un pico muy pronunciado alrededor de uno 1. Para un pico tan pronunciado es difícil proponer una p.d.f analítica. Una forma de resolver este problema podría ser cortar en Onn hacia la derecha del pico, y de esta manera eliminarlo. Este procedimiento sería muy peligroso, ya que en las inmediaciones de este pico se tienen muchos eventos de señal, por lo tanto es una región en donde no se quiere cortar. Otro inconveniente es que la distribución con la que se está tratando es el resultado de una simulación, de manera que la ubicación de este pico no se conoce con certeza. Otra manera de resolver el problema sería utilizar una función uno-a-uno que suavice la forma de la distribución, pero debido a la rápida variación de Onn en las inmediaciones del pico es difícil de lograr. En vez de esto, se ha decidido definir otra variable, que se denominará como LR , de la siguiente manera:

$$LR = 1 - \frac{L_2}{L_0} \quad (4.19)$$

La distribución de esta variable para los tres tipos de muestras de control se muestran en la figura 4.13.

Ahora, como se ha mencionado antes, todas las variables topológicas están muy correlacionadas entre sí, y por este motivo se prefiere construir una sola variable que sea una función de todas ellas. Esta es la idea de la red de neuronas. Onn tiene la ventaja que el entrenamiento va a conseguir tomar en cuenta las correlaciones no

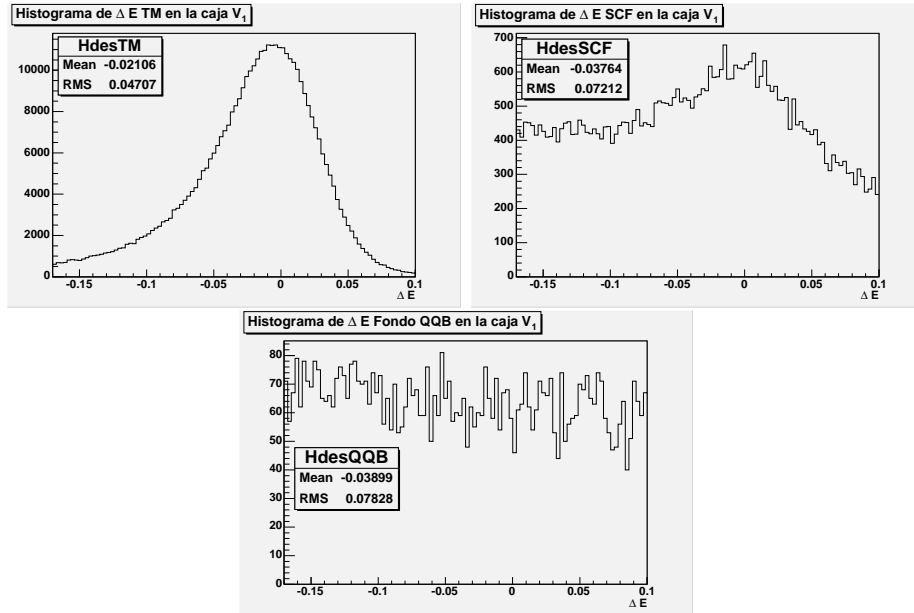


Figura 4.11: Distribución de la variable ΔE para las muestras de control Señal TM (arriba derecha), SCF (arriba izquierda) y Fondo QQB (abajo) en V_1 .

lineales entre las variables topológicas, así que va a lograr la mejor discriminación entre las clases de señal y fondo QQB. Un inconveniente de O_{nn} es que no se cuenta con una forma explícita de la función $O_{nn}(\cos b_{mon}, \cos b_{th}, L_0, L_2)$. Otro inconveniente es que O_{nn} se entrena en muestras de control, y estas pueden no ser representativas de los verdaderos eventos de señal y Fondo QQB dentro de la muestra, y es muy difícil controlar de que manera estas diferencias influyen. Y como se había mencionado antes, los picos son muy difíciles de parametrizar.

Una variable como LR tiene la ventaja que es una función sencilla y conocida. Otra ventaja es que su distribución es bastante suave tanto para la señal como para el fondo y es mucho más sencilla de parametrizar. La desventaja de esta variable es que tiene un poder de discriminación menor que O_{nn} .

Lo que se ha decidido es tener un compromiso entre perfección y simplicidad con una estrategia de dos etapas:

- Cortar en O_{nn} para eliminar a los eventos $O_{nn} < 0,4$ que son casi todos del tipo Fondo QQB.
- Utilizar a la variable LR para construir el modelo estadístico en la ventana V_1 .

Como se menciono antes, se ha decidido tomar a los eventos de Monte Carlo no resonantes como muestra de control para la especie de señal. Para justificar esta elección se debe verificar que las variables elegidas sean estadísticamente independientes de las variables de Dalitz. En la siguiente sección se estudiarán las correlaciones de las variables de discriminación con las variables de Dalitz.

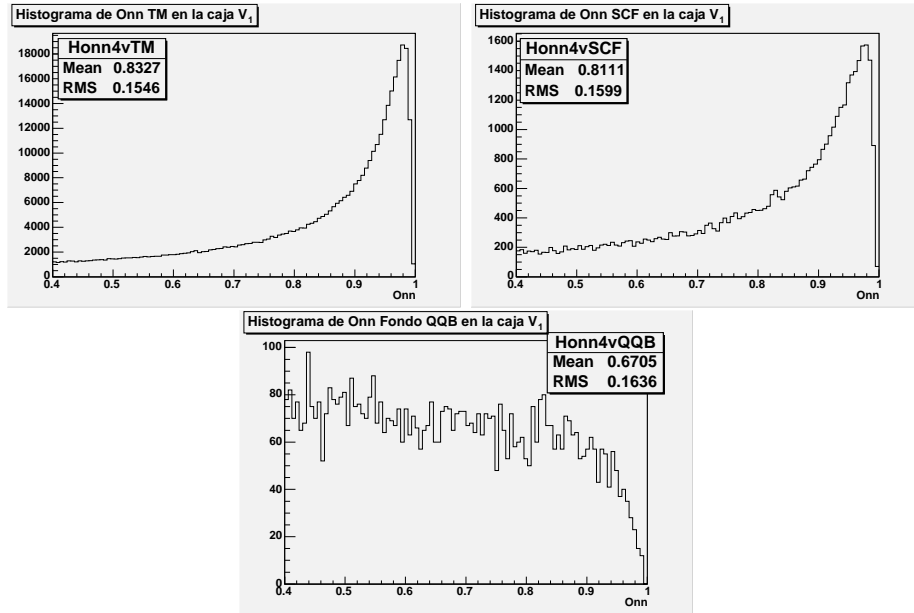


Figura 4.12: Distribución de la variable Onn para las muestras de control Señal TM (arriba derecha), SCF (arriba izquierda) y Fondo QQB (abajo) en V_1 .

4.2.4. Correlaciones entre las Variables Elegidas y el Plano de Dalitz.

Una manera de estudiar la correlación entre dos variables es a través de los perfiles. El perfil de una variable Var_1 con otra Var_2 es la distribución del promedio de la primera en función de la segunda. Si dos variables son estadísticamente independientes se debería tener que el perfil sea una línea recta de pendiente cero. En caso contrario, las variables están correlacionadas. Se visualizaran entonces los perfiles de las variables elegidas con las variables de Dalitz para las muestras de control de la señal TM y SCF.

Adicionalmente a los perfiles se pueden utilizar los coeficientes de correlación lineal entre las variables elegidas y las variables de Dalitz para cuantificar el grado de correlación lineal. Una tabla de los coeficientes de correlación lineal entre las variables elegidas y las variables de Dalitz se muestra a continuación.

Correlación lineal	TM	SCF
m_{ES} y $M_{K\pi}$	0.028	0.038
m_{ES} y $M_{K\pi^0}$	-0.014	-0.048
ΔE y $M_{K\pi}$	0.087	-0.059
ΔE y $M_{K\pi^0}$	-0.053	0.053
LR y $M_{K\pi}$	-0.015	-0.0003
LR y $M_{K\pi^0}$	0.008	0.004

Observese la figura 4.14. Nótese que la correlación entre m_{ES} TM y las variables de Dalitz es principalmente lineal con coeficientes de correlación 3% con $M_{K\pi}$ y $-1,4\%$

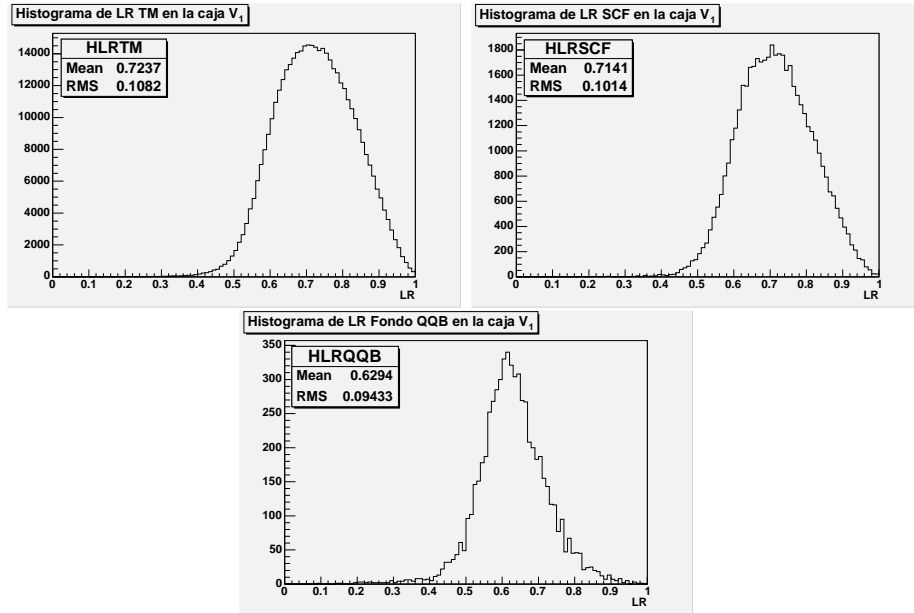


Figura 4.13: Distribuciones de la variable LR . La Señal TM arriba a la derecha, SCF arriba a la izquierda y Fondo QQB abajo.

con $M_{K\pi^0}$. La correlación lineal es bastante pequeña, por esto se considerará que m_{ES} TM no está correlacionada con las variables de Dalitz. Con respecto a m_{ES} SCF, las correlaciones son no lineales, la componente lineal no sobrepasa el 5% como se observa en la tabla de arriba. En la construcción del modelo no se buscará una sofisticación tal como para corregir correlaciones no lineales, además, la componente de SCF dentro de la muestra estadística es del orden del 6% dentro de la especie de señal (como se verá más adelante), de manera que el sesgo cometido por suponer que no existe correlación alguna es un efecto que queda apantallado por otros que se considerará luego. Dicho todo esto, se hace la siguiente hipótesis: m_{ES} , tanto TM como SCF, no está correlacionada con las variables de Dalitz.

La figura 4.15 muestra que la correlación de ΔE TM con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$ es principalmente lineal con coeficientes de correlación de 9% y 5% respectivamente. Esta correlación está dentro de niveles que se consideran como inaceptables. Para resolver este problema se va a construir, como se verá en la siguiente sección, una nueva variable como una pequeña corrección de ΔE que no esté correlacionada con las variables de Dalitz. En cuanto a ΔE SCF, las correlaciones son lineales con coeficientes de -6% y 5% con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$ respectivamente. Los niveles de correlación siguen siendo altos, pero será un efecto que se corregirá cuando se sustituya a ΔE por su corrección.

Por último, la figura 4.16 muestra que la correlación de LR con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$ es principalmente lineal con coeficientes de correlación de $-1,5\%$ y $0,8\%$. Viendo estos números se considerará entonces que LR TM no está correlacionada con las variables de Dalitz. LR SCF tiene una componente de correlación no lineal menos significativa que el TM. Pero, por las mismas razones que para m_{ES} SCF, consideramos que LR

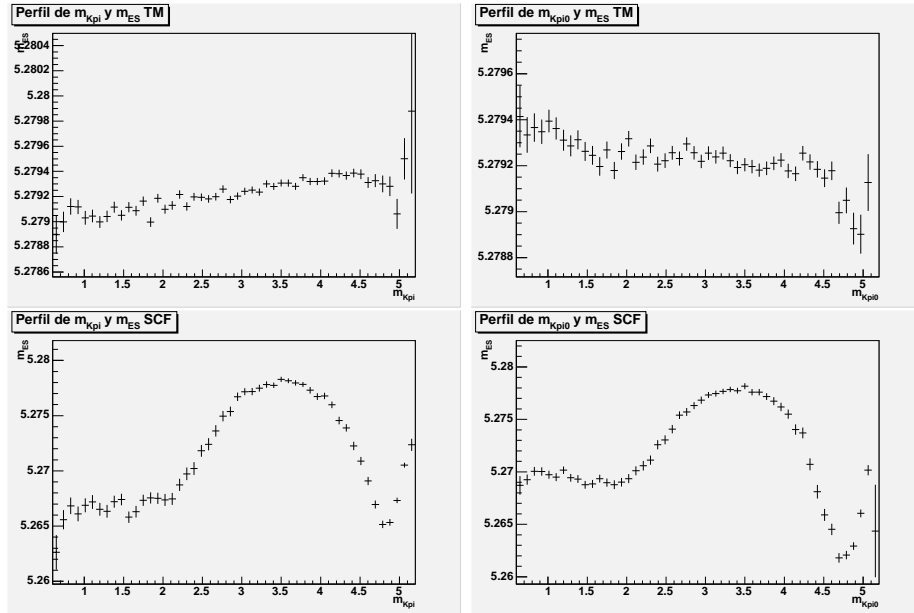


Figura 4.14: Perfiles de la variable m_{ES} con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$. TM arriba y SCF abajo.

SCF no está correlacionada con las variables de Dalitz. se hace entonces la siguiente hipótesis: LR , tanto TM como SCF, no está correlacionada con las variables de Dalitz.

Vamos a proceder ahora a construir una nueva variable, corrección de ΔE , que no esté correlacionada con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$

Correcciones a ΔE .

Mirando la figura 4.11 se observa que la distribución de ΔE TM es una Gaussiana exceptuando por las colas a valores negativos. Si una variable tiene una distribución Gaussiana su forma depende de sólo dos parámetros, su media y desviación estándar. Estos parámetros no están correlacionados entre sí (Ver ejemplo de la distribución Gaussiana en el capítulo 3, la matriz de covarianza es diagonal), de manera que si se construye una variable que tenga una distribución casi Gaussiana cuyo valor medio y desviación estándar sean constantes en el plano de Dalitz, entonces se habrá construido una variable que no está correlacionada con las variables de Dalitz. A continuación se verá cuál es la distribución de la media y de la desviación estándar de ΔE en el plano de Dalitz.

En la figura 4.17 se nota que la variación de la media y la desviación estándar de ΔE depende principalmente de $M_{K\pi}$, de manera que se procederá de la siguiente manera:

1. **Corrección al valor medio:** El valor medio de ΔE depende principalmente de $M_{K\pi}$, la variación no es muy grande, de manera que se puede esperar que la relación funcional entre $\langle \Delta E \rangle$ y $M_{K\pi}$ sea de la manera siguiente:

$$\langle \Delta E \rangle = -\gamma_1 - \alpha_1 M_{K\pi}^2 \quad (4.20)$$

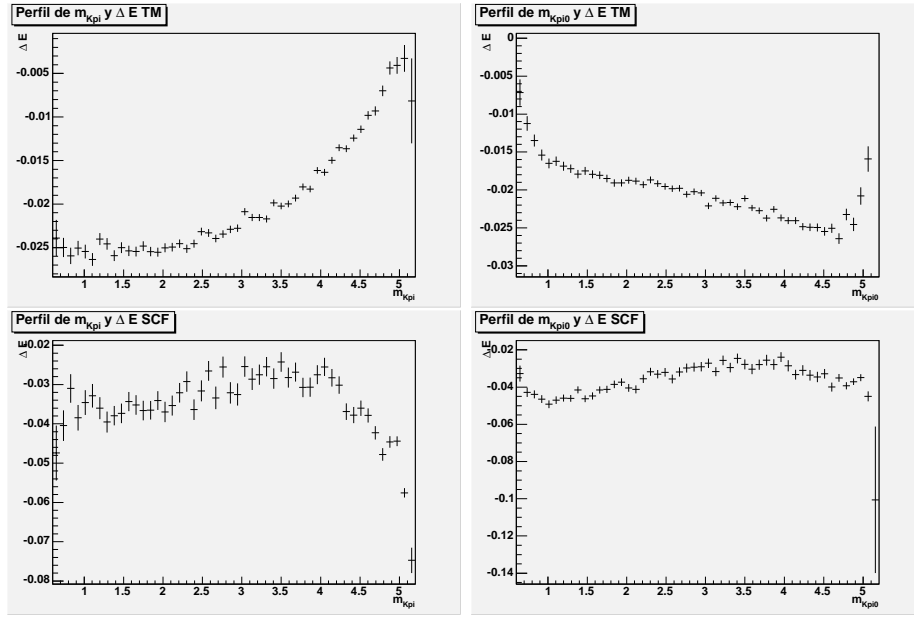


Figura 4.15: Perfiles de la variable ΔE con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$. TM arriba y SCF abajo.

Si se define una variable, $\Delta \bar{E}$, de la siguiente manera:

$$\Delta \bar{E} = \Delta E + \gamma + \alpha M_{K\pi} \quad (4.21)$$

Entonces se habrá construido una variable tal que:

$$\langle \Delta \bar{E} \rangle = 0 \quad \forall \text{ el plano de Dalitz.} \quad (4.22)$$

2. **Corrección a la desviación estándar:** Aunque la correlación de ΔE con las variables de Dalitz no es aceptable, no es excesivamente alta. Por esta razón se puede esperar que la desviación estándar de $\Delta \bar{E}$ tenga esencialmente el mismo comportamiento que la desviación estándar de ΔE , es decir, se puede esperar que la desviación estándar de $\Delta \bar{E}$ dependa principalmente de $M_{K\pi}$. Se puede entonces igualmente proponer una relación de la forma:

$$RMS(\Delta \bar{E}) = \gamma' + \alpha' M_{K\pi}^2 \quad (4.23)$$

Si se define una variable, $\Delta E'$, de la siguiente manera:

$$\Delta E' = \frac{\Delta \bar{E}}{\gamma' + \alpha' M_{K\pi}^2} RMS(\Delta E)_{\text{global}} \quad (4.24)$$

en donde $RMS(\Delta E)_{\text{global}}$ es la desviación estándar global de ΔE . De esta manera se habrá construido una variable que tiene:

$$\langle \Delta E' \rangle = 0 \text{ y } RMS(\Delta E') = RMS(\Delta E)_{\text{global}} \quad \forall \text{ el plano de Dalitz.} \quad (4.25)$$

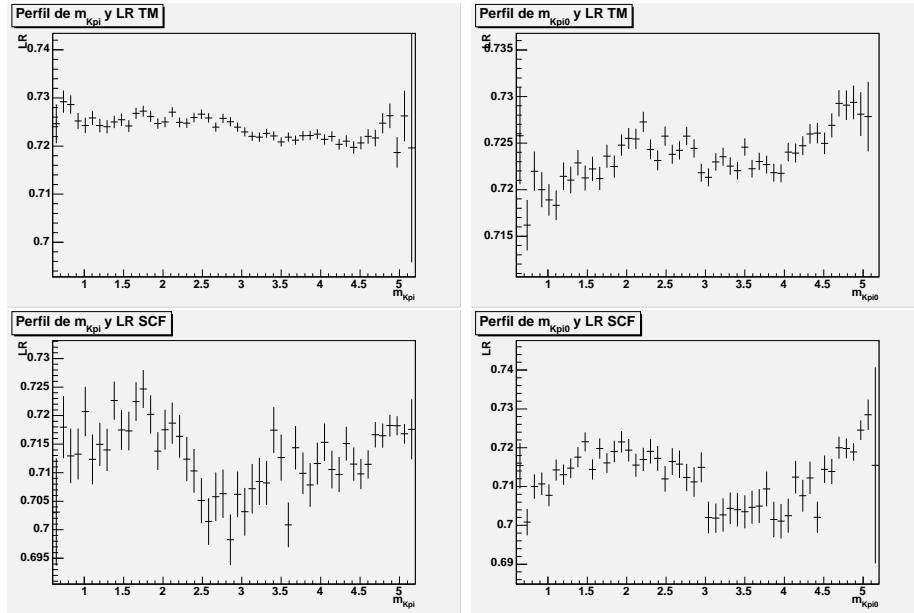


Figura 4.16: Perfiles de la variable LR con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$. TM arriba y SCF abajo.

Los valores obtenidos de los parámetros γ , α , γ' y α' , resultados de ajustes de las figuras 4.17, son los siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma &= 0,039 \pm 0,002 & \alpha &= -0,0014 \pm 0,0002 \\ \gamma' &= 0,070 \pm 0,002 & \alpha' &= -0,0015 \pm 0,002 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Los perfiles de $\Delta E'$ TM y SCF con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$ se muestran en la figura 4.18. Las correlaciones de $\Delta E'$, tanto TM como SCF, con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$ son principalmente lineales con coeficientes de correlación respectivos de $-2,4\%$ y $1,4\%$ para el TM, y -3% y $1,8\%$ para el SCF. Se considerará entonces que las variables $\Delta E'$, tanto para el TM como para el SCF, no está correlacionada con las variables de Dalitz. Se puede entonces hacer la siguiente hipótesis: todas las variables de discriminación son estadísticamente independientes de las variables de Dalitz. Todo este análisis justifica la utilización de los eventos Monte Carlo no resonantes como muestra de control para la especie de señal.

Correlación lineal	TM	SCF
$\Delta E'$ y $M_{K\pi}$	-0.024	-0.031
$\Delta E'$ y $M_{K\pi^0}$	0.014	0.018

Como ya se ha mencionado, se quiere hacer la medición del *Branching Ratio* semi-inclusivo sin *charm* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)$. Para hacer esto sólo se deben obtener el número de eventos de señal que no han pasado por los estados resonantes D^0 y D^- . En la siguiente sección se construirá un método para eliminar estos eventos de la muestra.

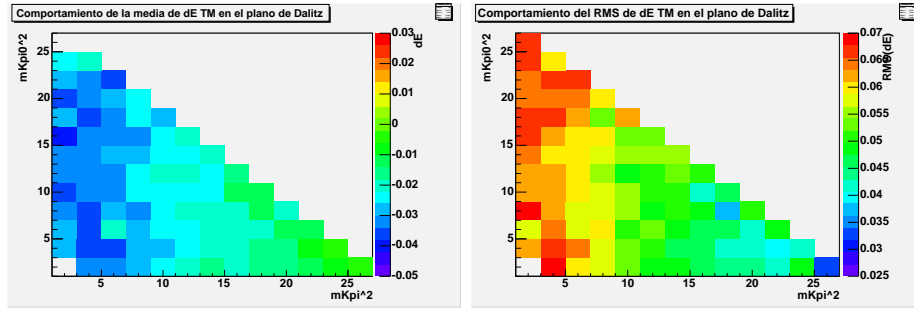


Figura 4.17: Distribución del valor medio (izquierda) y la desviación estándar (derecha) de ΔE en el plano de Dalitz.

4.2.5. La Eliminación de los eventos resonantes D^0 y D^- .

Para los eventos resonantes del tipo $B^0 \rightarrow D^0 \pi^0$ ($B^0 \rightarrow D^- K^+$) la distribución de la variable $M_{K\pi}$ ($M_{\pi\pi^0}$) debe ser muy estrecha y estar centrada en el valor m_{D^0} (m_{D^-}). Para eliminar los eventos de este tipo se harán cortes en la variable $M_{K\pi}$ ($M_{\pi\pi^0}$). Para elegir la ventana en la cual cortar se hará un análisis de eficiencias de los cortes de $M_{K\pi}$ ($M_{\pi\pi^0}$) utilizando los eventos de Monte Carlo correspondientes a cada resonancia. Se procederá de la siguiente manera (se hará un procedimiento equivalente para la variable $M_{\pi\pi^0}$):

- Se hará un ajuste por medio del método de verosimilitud máxima a la distribución de la variable $M_{K\pi}$ utilizando las muestra de control MC de $B^0 \rightarrow D^0 \pi^0$.
- Debido a que la distribución de $M_{K\pi}$ es muy estrecha se propondrá como p.d.f. una combinación lineal de dos distribuciones Gaussianas. Una de éstas para representar el núcleo de la distribución y la otra para representar las colas de eventos pobremente reconstruidos.
- Se tomará el valor medio, $\langle M_{K\pi} \rangle$, y la desviación estándar, $\sigma_{M_{K\pi}}$, de la Gaussiana principal. Con éstos se construirá una distribución de la eficiencia de cortes del tipo: eventos con $|M_{K\pi} - \langle M_{K\pi} \rangle| > n\sigma_{M_{K\pi}}$ con n entero, es decir, para cada valor de n , se seleccionarán aquellos eventos con $M_{K\pi}$ a una distancia mayor de $n\sigma_{M_{K\pi}}$ de $\langle M_{K\pi} \rangle$.
- Se escogerá aquel valor de n para el cual la fracción de eventos resonantes del tipo $B^0 \rightarrow D^0 \pi^0$ es menor a 5%.

Las distribuciones y los resultados del ajuste de $M_{K\pi}$ para los eventos $B^0 \rightarrow D^0 \pi^0$ y de $M_{\pi\pi^0}$ para los eventos $B^0 \rightarrow D^- K^+$ Monte Carlo se muestran en la figura 4.19. los valores de $\langle M_{K\pi} \rangle$, $\sigma_{M_{K\pi}}$, $\langle M_{\pi\pi^0} \rangle$ y $\sigma_{M_{\pi\pi^0}}$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \langle M_{K\pi} \rangle &= 1,86554 \pm 0,00004 & \sigma_{M_{K\pi}} &= 0,00664 \pm 0,00003. \\
 \langle M_{\pi\pi^0} \rangle &= 1,86431 \pm 0,00005 & \sigma_{M_{\pi\pi^0}} &= 0,01029 \pm 0,00006.
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

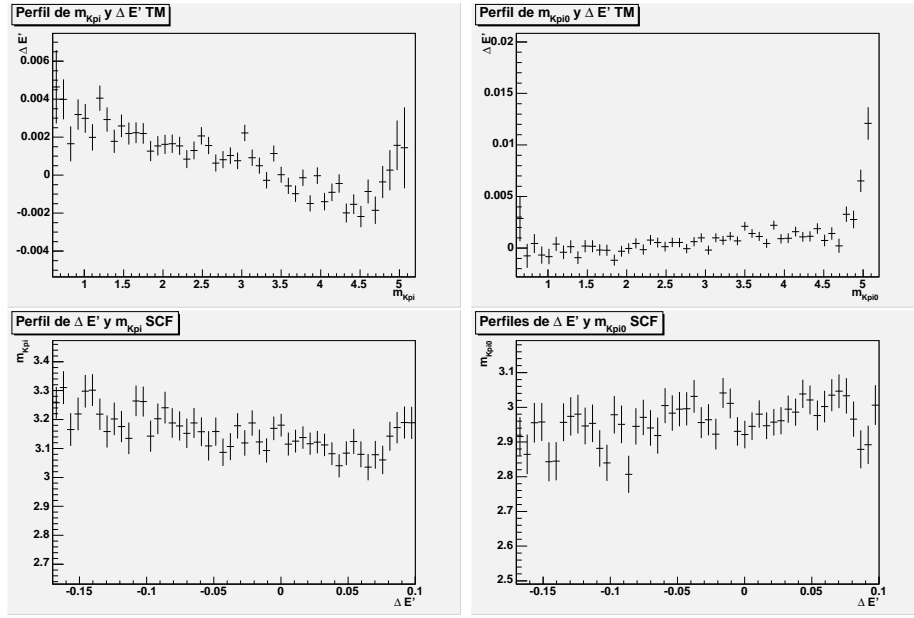


Figura 4.18: Perfiles de la variable $\Delta E'$ con $M_{K\pi}$ y $M_{K\pi^0}$. TM arriba y SCF abajo.

Las distribuciones de eficiencia para los cortes en $M_{K\pi}$ y $M_{\pi\pi^0}$ se muestran en la figura 4.20. La eficiencia a un corte de $4\sigma_{M_{K\pi}}$ en $M_{K\pi}$ para los eventos resonantes $B^0 \rightarrow D^0\pi^0$ es de 4%. Además, la eficiencia a un corte de $4\sigma_{M_{\pi\pi^0}}$ en $M_{\pi\pi^0}$ para los eventos resonantes $B^0 \rightarrow D^-K^+$ es de 4%. Se ha decidido entonces sólo considerar aquellos eventos en la ventana siguiente:

$$V_2 = (5,23 < m_{ES} < 5,29) \times (-0,17 < \Delta E' < 0,1) \times (0,4 < Onn < 1,0) - \bar{V} \quad (4.28)$$

en donde \bar{V} es el conjunto:

$$\bar{V} = (\langle M_{K\pi} \rangle - 4\sigma_{M_{K\pi}} < M_{K\pi} < \langle M_{K\pi} \rangle + 4\sigma_{M_{K\pi}}) \cup \quad (4.29)$$

$$\cup (\langle M_{\pi\pi^0} \rangle - 4\sigma_{M_{\pi\pi^0}} < M_{\pi\pi^0} < \langle M_{\pi\pi^0} \rangle + 4\sigma_{M_{\pi\pi^0}}) \quad (4.30)$$

De esta manera se han eliminado más del 96 % de eventos resonantes $B^0 \rightarrow D^0\pi^0$ y más del 96 % de eventos resonantes $B^0 \rightarrow D^-K^+$ de la muestra.

4.2.6. La Corrección del SCF.

Antes de continuar, es importante comparar las distribuciones de m_{ES} y ΔE SCF de las figuras 4.3 y 4.4 con las distribuciones de las figuras 4.10 y 4.11. Nótese el pico más pronunciado de la distribución de m_{ES} SCF para la figura 4.10 en comparación con la figura 4.3. Adicionalmente la distribución de ΔE SCF para la figura 4.11 tiene un pico que no aparece en la figura 4.4. Estas diferencia en las distribuciones se debe

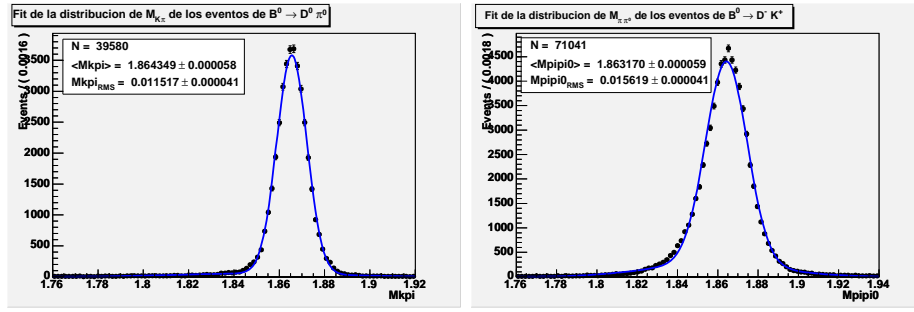


Figura 4.19: Ajustes de las distribuciones de $M_{K\pi}$ para los eventos $B^0 \rightarrow D^0\pi^0$ MC (izquierda) y de $M_{\pi\pi^0}$ para los eventos $B^0 \rightarrow D^-K^+$ MC (derecha).

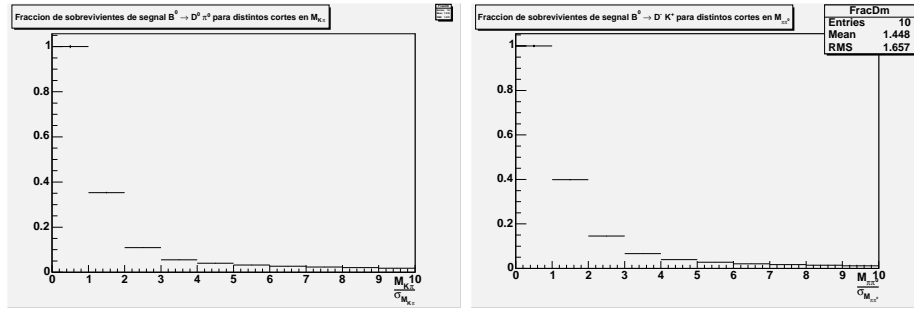


Figura 4.20: Distribución de la eficiencia para cortes en $M_{K\pi}$ (izquierda) y para cortes en $M_{\pi\pi^0}$ (derecha).

a que el SCF está contaminado con eventos de TM. La contaminación de TM en el SCF se debe a que el software para generar los eventos de Monte Carlo es diferente. SLAC a pasado a la utilización de un nuevo software (de *Geant 3* a *Geant 4*) que mejora la simulación de los eventos generados por Monte Carlo, pero que no ha sido optimizado. El antiguo software subestimaba la cantidad de materia en la camara de deriva. Recuerdese que un π^0 se desintegra casi inmediatamente en dos fotones (con una probabilidad del 99%). Cada uno de estos fotones interactua con la materia y pueden desintegrarse en un par e^+e^- . Si el proceso de desintegración del fotón ocurre a la entrada de la camara de deriva, entonces es posible que las partículas del par e^+e^- lleguen bastante separadas una de la otra al dispositivo calorímetro. Es difícil que el sistema de reconstrucción clasifique al evento como TM, y en vez de esto lo clasificará como SCF. La probabilidad depende de la cantidad de materia con la que el fotón puede interactuar. Es claro entonces el porque de las diferencia que se observan.

Lo que se pretende hacer es construir un método por medio del cual eliminar en la medida de lo posible los eventos de señal TM de la muestra de SCF. Para esto se considerarán a las distribuciones de las variables siguientes:

$$\Delta h = h_{K\pi} - h_{mcK\pi} \quad \text{y} \quad \Delta M = M_{K\pi} - M_{mcK\pi} \quad (4.31)$$

La variable $h_{K\pi}$ está definida como el coseno del ángulo de la suma de los trimomentos de K^+ y π^- con el eje de la colisión en el C.M. de e^+e^- . $hmc_{K\pi}$ es el valor de la variable generada por Monte Carlo y $h_{K\pi}$ es el valor reconstruido. Significados similares para $Mmc_{K\pi}$ y $M_{K\pi}$. Las distribuciones para Δh y ΔM para TM deben ser distribuciones muy estrechas casi Gaussianas centradas en cero. En cambio, para el SCF deberían ser distribuciones bastante más anchas. La diferencia entre estas distribuciones para el TM y el SCF se presenta en la figura 4.21.

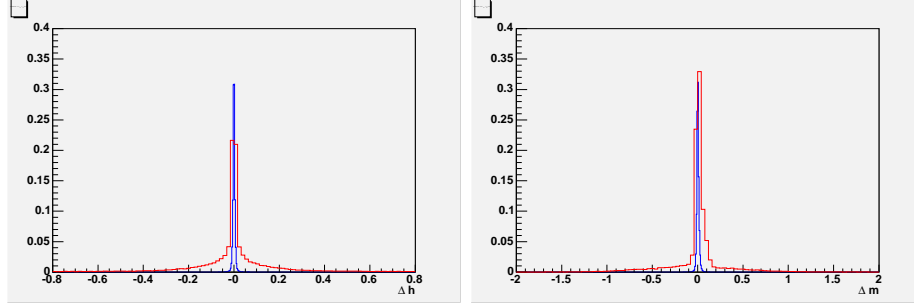


Figura 4.21: Distribuciones de Δh (izquierda) y ΔM (derecha). TM en azul, SCF en rojo.

La presencia de los picos en las distribuciones de Δh y ΔM son debidas a la contaminación de TM en el SCF. Las variables Δh y ΔM son independientes, ya que una tiene que ver con las distribución de energías del evento y la otra con las distribuciones angulares. El método que se ha decidido aplicar es el siguiente:

1. Se construirá una distribución de eficiencia para cortes elípticos en la muestra de control TM con la variable χ^2 definida como:

$$\chi^2 = \left(\frac{\Delta h - \langle \Delta h_{TM} \rangle}{\sigma_{\Delta h_{TM}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta M - \langle \Delta M_{TM} \rangle}{\sigma_{\Delta M_{TM}}} \right)^2 \quad (4.32)$$

en donde $\langle \Delta h_{TM} \rangle$ y $\sigma_{\Delta h_{TM}}$ son la media y la desviación estándar de la distribución de Δh para la muestra de control TM. Una definición similar para $\langle \Delta M_{TM} \rangle$ y $\sigma_{\Delta M_{TM}}$. Los cortes serán del tipo: eliminar aquellos eventos con $\chi < corte$. Se va a definir como χ_0 el valor de χ para el cuál la eficiencia del corte es menor que el 1 %.

2. Luego se eliminarán más del 99 % de los eventos de señal aplicando un corte con el valor de χ obtenido en el paso anterior a la muestra de control de señal SCF. De esta manera se obtiene una muestra de control para la señal SCF.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.22.

El valor de χ_0 que se ha escogido es $\chi_0 = 5$. Para este valor se ha eliminado el 99,4 % de eventos TM de la muestra de SCF. Existe otra cantidad que se quiere estimar, la

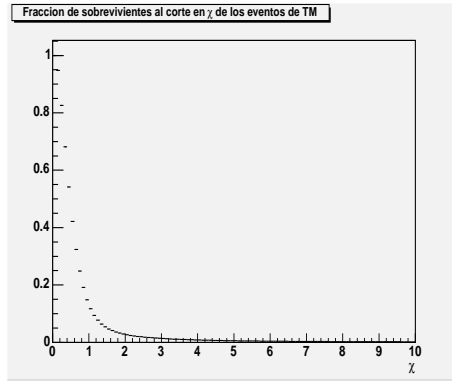


Figura 4.22: Distribución de la eficiencia para distintos cortes de χ sobre la muestra de TM.

fracción de eventos de SCF en la muestra de señal. El corte que se ha hecho en χ ha eliminado parte de los eventos de SCF en la muestra, entonces para calcular la fracción de SCF en la señal se construirá la distribución siguiente: número de eventos de SCF sobrevivientes a cortes en χ . Se hará variar a χ en el rango ($5 < \chi < 20$), debido a que para estos valores de χ no se tienen prácticamente eventos TM en la muestra y la forma de la distribución depende enteramente de los eventos de SCF. Luego, se extrapolará la distribución para $\chi = 0$, en donde el número de sobrevivientes de SCF al corte es igual al número de eventos de SCF inicialmente en la muestra. La distribución se muestra en la figura 4.23.

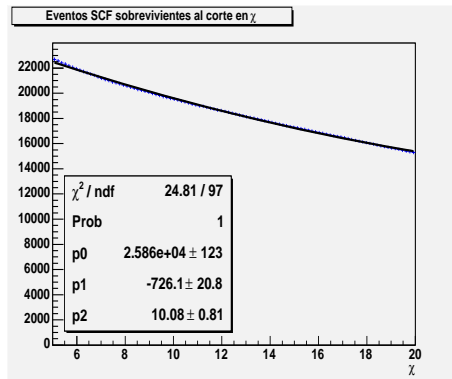


Figura 4.23: Distribución del número de sobrevivientes de SCF para cortes en χ .

Como se ve en la figura 4.23, se ha propuesto un ajuste con un polinomio de segundo grado. El número de eventos de SCF inicialmente en la muestra viene dado por el término independiente de este polinomio. El resultado obtenido es el siguiente:

$$Frac_{SCF} = 5,61\% \tag{4.33}$$

Luego de todas estas correcciones sobre nuestras muestras de control, las distribuciones de las variables elegidas se muestran en las figuras 4.24, 4.25 y 4.26. Nótese que los picos en las distribuciones de m_{ES} y $\Delta E'$ SCF ya no aparecen. A través de todos los mecanismos aplicados se han construido las muestras de control para la señal TM, SCF y el Fondo QQB. Se prosigue ahora a estudiar las correlaciones entre las variables de discriminación.

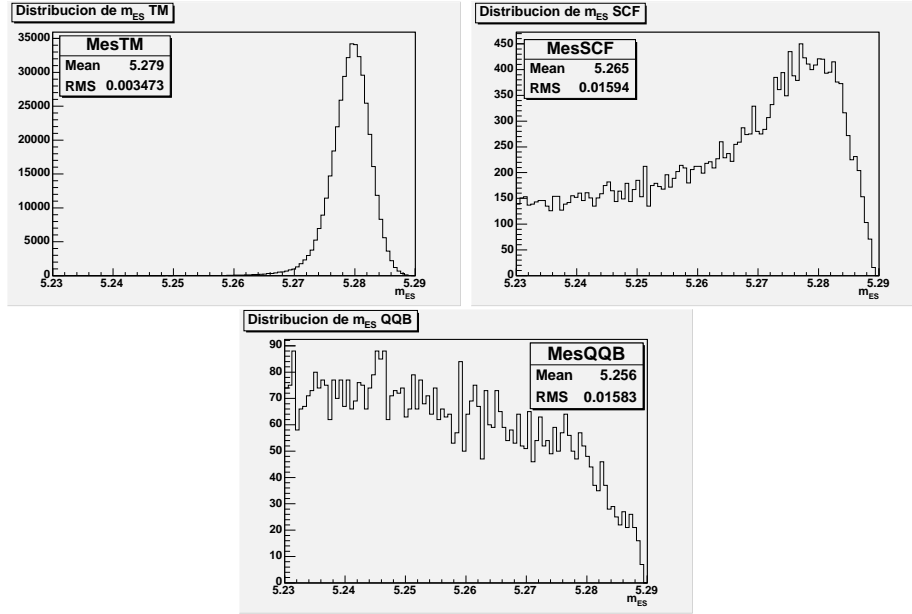


Figura 4.24: Distribución de la variable m_{ES} para las muestras de control Señal TM (arriba izquierda), SCF (arriba derecha) y Fondo QQB (abajo) en V_2 .

4.2.7. Correlaciones entre las Variables.

Recuerdese que, si dos variables son estadísticamente independientes, entonces la pdf total puede escribirse como el producto de p.d.f unidimensionales (ver relación 3.9). La forma en la que se ha escogido a las variables de discriminación da pie a pensar que son independientes. LR es una variable topológica que no tiene una relación directa con las restricciones cinématicas de la desintegración del B^0 . Si las variables que elegidas son independientes para una especie, entonces la forma de escribir la pdf total es bastante trivial. Se procederá entonces a estudiar los perfiles de las variables para cada una de las muestras de control que se han estudiado hasta ahora. Estos perfiles se observan en las figuras 4.27, 4.28 y 4.29, y los coeficientes de correlación lineal se muestran en la tabla de abajo.

Correlación lineal	TM	SCF	Fondo QQB
m_{ES} y $\Delta E'$	0.07	0.04	-0.017
m_{ES} y LR	0.008	0.003	0.0004
$\Delta E'$ y LR	-0.003	-0.011	-0.014

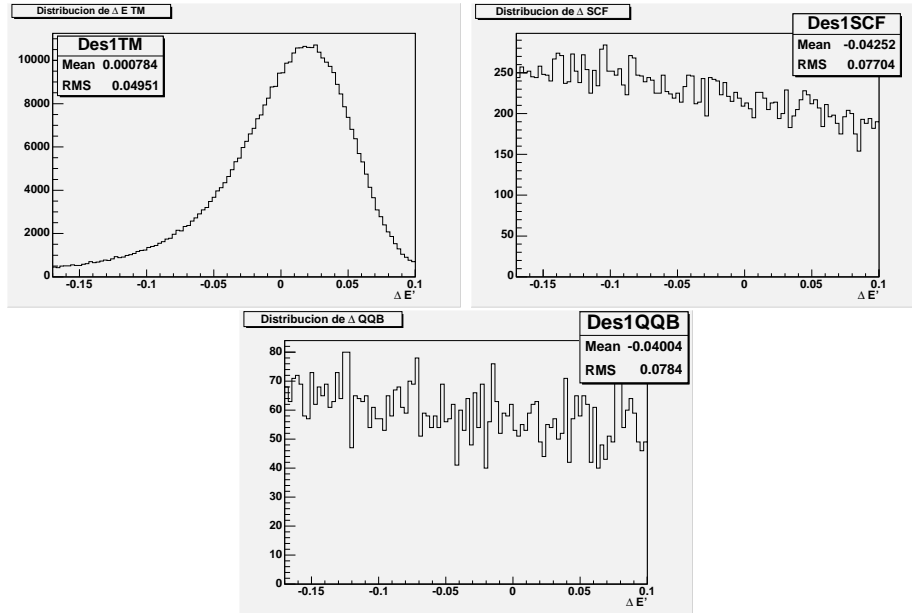


Figura 4.25: Distribución de la variable $\Delta E'$ para las muestras de control Señal TM (arriba izquierda), SCF (arriba derecha) y Fondo QQB (abajo) en V_2 .

Primero se verá la correlación de m_{ES} con $\Delta E'$. Para el caso de la señal TM, se observa que la componente lineal de la correlación es 7%, bastante alto dado los límites que se han establecido (por debajo del 5%). Se observa que para valores negativos de $\Delta E'$ la correlación es positiva y para valores positivos la correlación cambia de signo. Antes de continuar observese la figura 4.30, que es la distribución bidimensional de m_{ES} y $\Delta E'$. La distribución bidimensional de m_{ES} y $\Delta E'$ está conformada por dos contribuciones, un núcleo y unas colas. Las colas son eventos pobremente reconstruidos, en cambio los eventos del núcleo son evento muy bien reconstruidos. Si m_{ES} y $\Delta E'$ fuesen estadísticamente independientes la forma del núcleo sería aproximadamente una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados. Esto no es lo que se observa en la figura 4.30, sino que la elipse está inclinada implicando que m_{ES} y $\Delta E'$ están correlacionadas. Pero, nótese que la suposición de que estas variables son independientes sería equivalente a rotar la elipse. La rotación tiene el efecto de darle más peso a algunas combinaciones de m_{ES} y $\Delta E'$ pero también el de restarle a otras. Estos son efectos en sentidos opuestos que se espera, tomando como base trabajos anteriores [11], que no tengan un peso significativo. Los perfiles de m_{ES} y $\Delta E'$ para el SCF y el Fondo QQB son principalmente lineales con coeficientes de correlación de 4% y -1,7% respectivamente. Se considerará entonces que las variables m_{ES} y $\Delta E'$ no están correlacionadas.

Las correlaciones entre m_{ES} y LR son principalmente lineales para todas las especies con coeficientes de correlación de 0,8%, 0,3% y 0,04% para la señal TM, SCF y Fondo QQB respectivamente. De igual manera, las variables $\Delta E'$ y LR tienen correlaciones principalmente lineales para todas las especies con coeficientes -0,3%, -1,1% y -1,4% para TM, SCF y Fondo QQB. Visto todo esto se hará entonces la siguiente hipótesis:

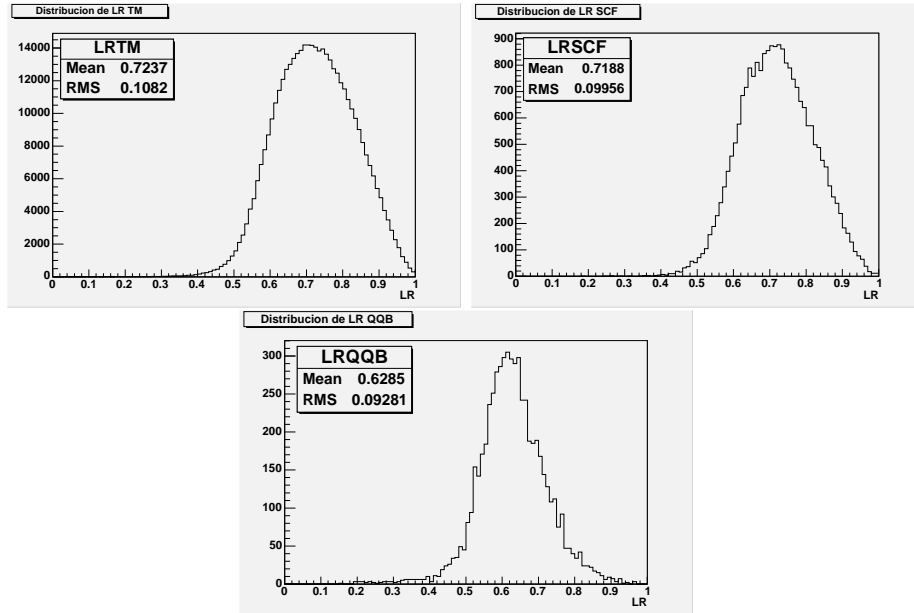


Figura 4.26: Distribución de la variable Onn para las muestras de control Señal TM (arriba izquierda), SCF (arriba derecha) y Fondo QQB (abajo) en V_2 .

Las variables m_{ES} , $\Delta E'$ y LR son estadísticamente independientes para las especies de señal TM, SCF y Fondo QQB. Esto último permite escribir las pdf para cada una de estas especies de la siguiente manera.

$$f(m_{ES}, \Delta E', LR)_e = f_1(m_{ES})f_2(\Delta E')f_3(LR) \quad (4.34)$$

en donde el índice e puede ser señal TM, SCF o Fondo QQB.

Se procede ahora a construir las pdf para las muestras de control de señal TM, SCF y Fondo QQB.

4.2.8. Primera Aproximación a la Construcción del Modelo Estadístico.

Hasta ahora se han incluido sólo a las especies de señal TM y SCF y a la especie de Fondo QQB. Se quiere ir por partes y aumentando en complejidad, por esto se incluirá más adelante a la especie del Fondo BB, cuando se haya puesto a prueba una primera aproximación del modelo. Se procede entonces a construir las pdf para las especies que se han considerado hasta ahora. Cada una de las funciones propuestas serán ajustadas por medio del método de Verosimilitud Máxima.

Construcción de las p.d.f. de TM, SCF y el Fondo QQB.

Debido a que las variables de discriminación elegidas se suponen por hipótesis estadísticamente independientes, la construcción de las pdf para cada una de las especies

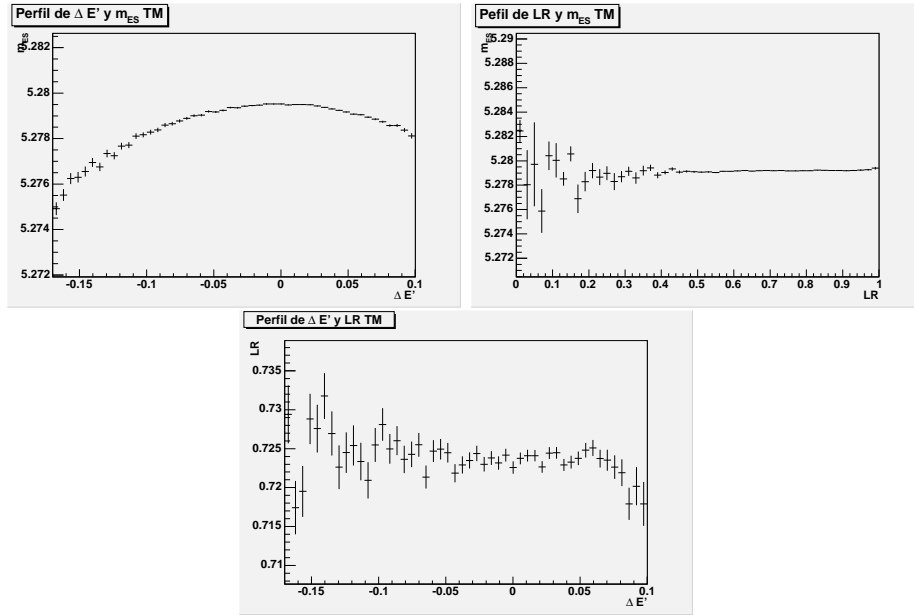


Figura 4.27: Perfiles de m_{ES} , $\Delta E'$ y LR TM.

es bastante simple. Se considerarán las distribuciones unidimensionales de las variables para cada especie y se propondrá una pdf unidimensional para cada una.

Señal TM.

- La variable m_{ES} tiene una distribución que es casi una Gaussiana excepto por la presencia una cola hacia la izquierda, por esta razón se ha decidido modelar esta distribución con una función que se conoce como *Crystal Ball* definida como:

$$f_{TM}(m_{ES}; m_0, \sigma, \alpha, n) = \frac{1}{N} \begin{cases} \exp(-(m_{ES} - m_0)^2/2\sigma^2) & , m_{ES} > m_0 - \alpha\sigma \\ \frac{(n/\alpha)^n \exp(-\alpha^2/2)}{((m_{ES} - m_0)/\sigma + n/\alpha - \alpha)^n} & , m_{ES} \leq m_0 - \alpha\sigma \end{cases} \quad (4.35)$$

en donde N es una constante de normalización que será calculada una vez dado el rango de variación de la variable m_{ES} , y el parámetro α es la distancia a m_0 en unidades de σ a la cuál la distribución pasa de Gaussiana a ley de potencia. Esta función es entonces una juxtaposición de una ley de potencias que describe las colas de la distribución y una Gaussiana que describe el núcleo. Para el ajuste se dejará fijo al parámetro n , dándole el valor $n = 25,0$ y dejando a los demás parámetros libres. Los valores de los parámetros obtenidos por el ajuste son:

$$\begin{aligned} m_0 &= 5,279672 \pm 0,000006 \\ \sigma &= 0,002742 \pm 0,000005 \\ \alpha &= 1,149 \pm 0,004 \end{aligned} \quad (4.36)$$

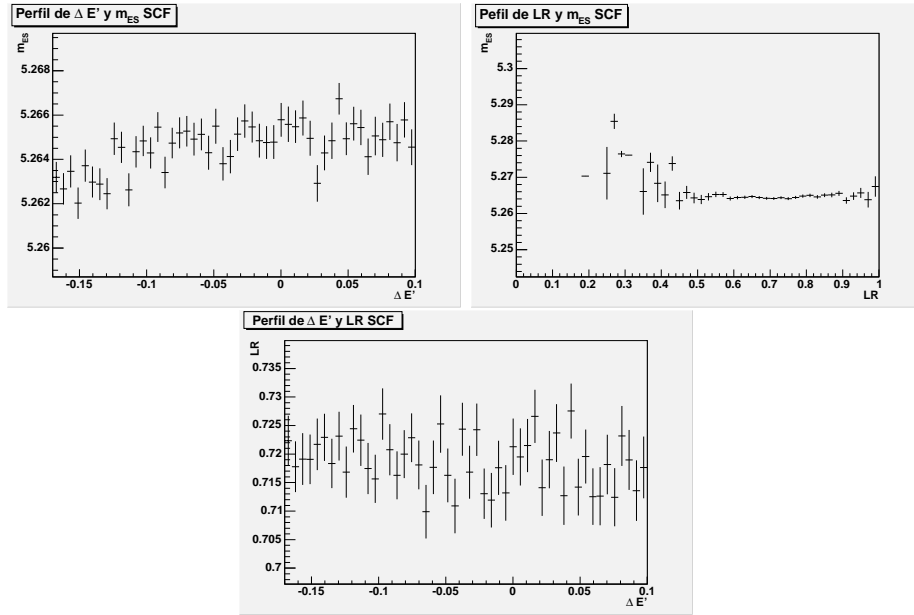


Figura 4.28: Perfiles de m_{ES} , $\Delta E'$ y LR SCF.

- Para la variable ΔE también se ha propuesto una función *Crystal Ball*, todos los parámetros están libres, excepto n al cuál se le ha dado el valor $n = 5,0$. Los valores de los parámetros obtenidos por el ajuste son:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 0,01631 \pm 0,00009 \\
 \sigma &= 0,03531 \pm 0,00008 \\
 \alpha &= 0,854 \pm 0,003
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

- Para la variable LR se ha propuesto una combinación lineal de un función *Crystal Ball* y una función Gaussiana, esta función está definida por:

$$f_{TM}(LR; m_0, \sigma_1, \alpha, n, \mu, \sigma_2, \beta) = \beta Crys(LR; m_0, \sigma_1, \alpha, n) + (1-\beta) Gauss(LR; \mu, \sigma_2)
 \tag{4.38}$$

Todos los parámetros están fijos excepto el parámetro n de la función *Crystal Ball* al cuál se le ha dado el valor $n = 5,0$. Los valores de los parámetros obtenidos por el ajuste son:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 0,8322293 \pm 0,0000002 & \sigma_1 &= 0,070577 \pm 0,000004 \\
 \alpha &= 1,2978 \pm 0,0001 & \mu &= 0,6821948 \pm 0,0000001 \\
 \sigma_2 &= 0,086879 \pm 0,0000001 & \beta &= 0,3134589 \pm 0,0000008
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Los resultados de los ajustes se muestran en la figura 4.31.

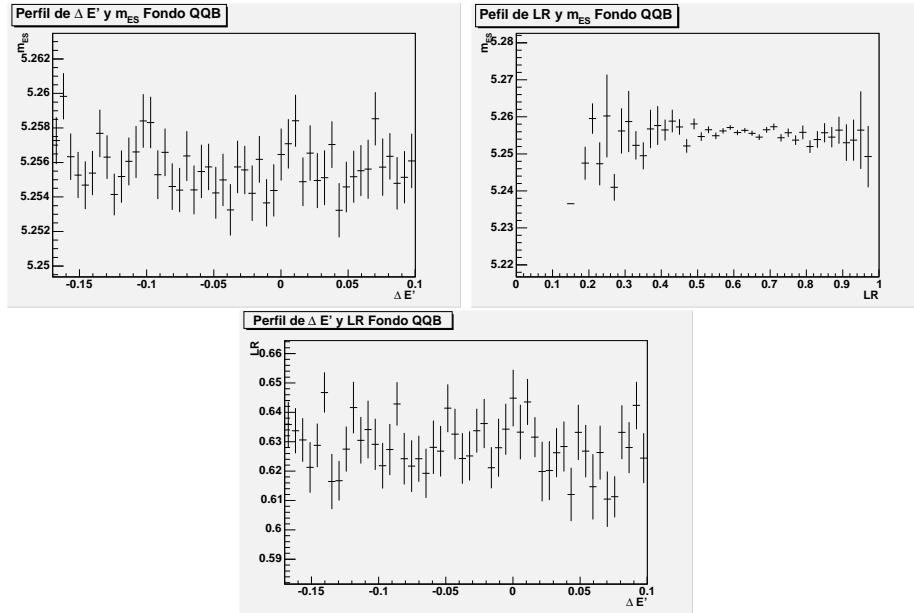


Figura 4.29: Perfiles de m_{ES} , $\Delta E'$ y LR Fondo QQB.

Señal SCF.

- Para la variable m_{ES} se ha propuesto para el ajuste una función *Crystal Ball*. En el ajuste se ha dejado fijo al parámetro n , dándole el valor $n = 0,8$ y dejando a los demás parámetros libres. Los valores de los parámetros obtenidos por el ajuste son:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 5,2806 \pm 0,0001 \\
 \sigma &= 0,0042 \pm 0,0001 \\
 \alpha &= 0,264 \pm 0,009
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

- Para la variable ΔE se ha propuesto para el ajuste un polinomio de segundo grado definido como:

$$f_{SCF}(\Delta E'; c_0, c_1) = c_1(\Delta E')^2 + c_0\Delta E' + N
 \tag{4.41}$$

en donde N es una constante de normalización. Los valores de los parámetros obtenidos por el ajuste son:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -2,8 \pm 1,2 \\
 c_0 &= -1,5 \pm 0,1
 \end{aligned}
 \tag{4.42}$$

- Para la variable LR se ha propuesto una combinación lineal de tres distribuciones Gaussianas, la función propuesta tiene la forma:

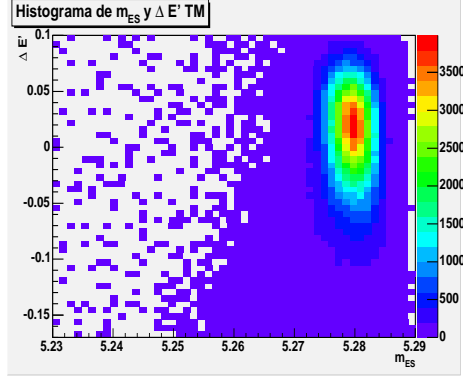


Figura 4.30: Distribución bidimensional de m_{ES} y $\Delta E'$ para la señal TM.

$$f_{SCF}(LR; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^3 \beta_i \text{Gauss}_i(LR; \mu_i, \sigma_i) \quad (4.43)$$

en donde $\beta_3 = 1 - (\beta_1 + \beta_2)$.

Los valores obtenidos de los parámetros son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,5 \pm 0,3 & \mu_2 &= 0,838 \pm 0,009 \\ \mu_3 &= 0,693 \pm 0,005 & \sigma_1 &= 0,14 \pm 0,06 \\ \sigma_2 &= 0,062 \pm 0,004 & \sigma_3 &= 0,085 \pm 0,003 \\ \beta_1 &= 0,006 \pm 0,012 & \beta_2 &= 0,19 \pm 0,04 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Los resultados de los ajustes se muestran en la figura 4.32.

El Fondo QQB.

- Para la variable m_{ES} se ha propuesto una función llamada *Argus*, ésta está definida como sigue:

$$f_{QQB}(m_{ES}; \xi, m_{max}) = N \sqrt{1 - \frac{m_{ES}^2}{m_{max}^2}} \exp\left(-\xi \left(1 - \frac{m_{ES}^2}{m_{max}^2}\right)\right) \quad (4.45)$$

en donde N es una constante de normalización, m_{max} un parámetro que se ha dejado fijo con valor $m_{max} = 5,2895 \text{ GeV}/c^2$ y ξ es el parámetro libre en el ajuste. Los fueron:

$$\xi = -20 \pm 2. \quad (4.46)$$

- En cuanto a la variable $\Delta E'$ se ha propuesto para el ajuste a un polinomio de primer grado definido como:

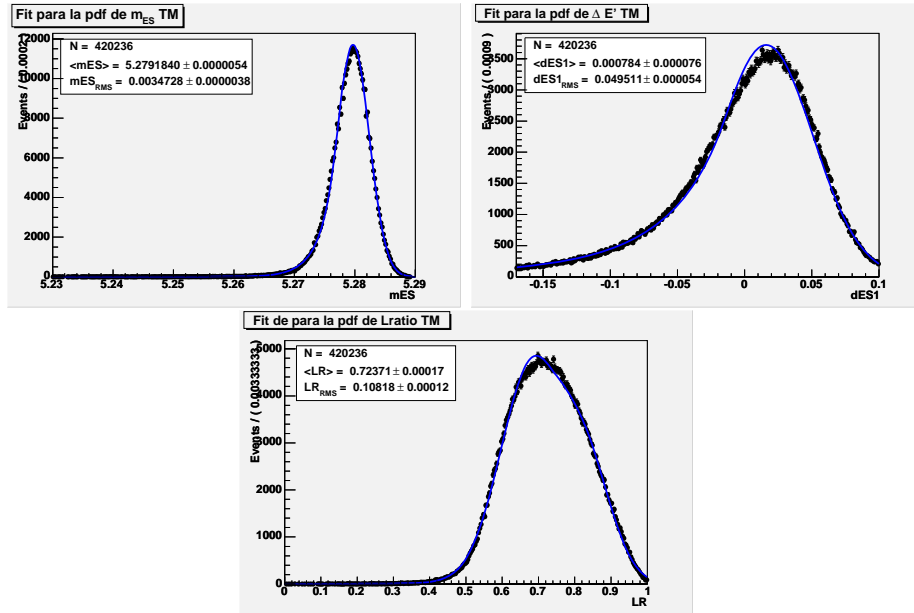


Figura 4.31: Ajuste de las pdf de m_{ES} (arriba izquierda), $\Delta E'$ (arriba derecha) y LR (abajo) para la muestra de control de la señal TM.

$$f_{QQB}(\Delta E'; c_0) = c_0 \Delta E' + N \quad (4.47)$$

en donde N es una constante de normalización. El resultado es el siguiente:

$$c_0 = -0,8 \pm 0,2. \quad (4.48)$$

- De igual manera que para LR SCF, se ha propuesto para LR QQB una combinación lineal de tres funciones Gaussianas. El resultado del ajuste es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,652 \pm 0,007 & \mu_2 &= 0,32 \pm 0,03 \\ \mu_3 &= 0,607 \pm 0,003 & \sigma_1 &= 0,099 \pm 0,003 \\ \sigma_2 &= 0,08 \pm 0,02 & \sigma_3 &= 0,057 \pm 0,004 \\ \beta_1 &= 0,57 \pm 0,08 & \beta_2 &= 0,013 \pm 0,004 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Los resultados de los ajustes se muestran en la figura 4.33.

Una vez construidas las pdf para las especies TM, SCF y Fondo QQB faltaría añadir la pdf del Fondo BB para luego realizar el ajuste final. Antes de esto se va a poner a prueba una primera aproximación del modelo estadístico en el cuál se deja por fuera a la especie de Fondo BB.

Estudios de Validación del Modelo #1. Los Experimentos Toy.

Con lo que se ha construido hasta ahora, la pdf está definida como:

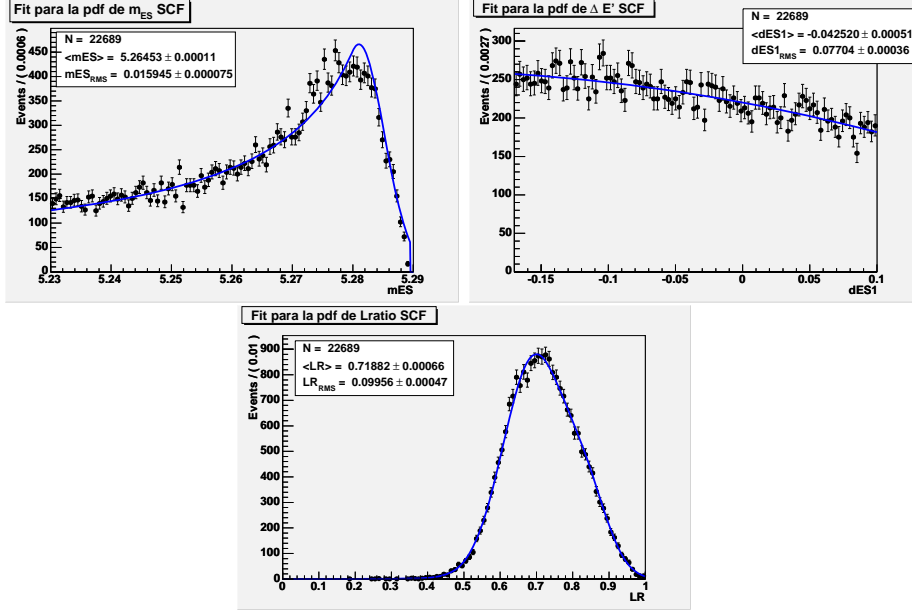


Figura 4.32: Ajuste de las pdf de m_{ES} (arriba izquierda), $\Delta E'$ (arriba derecha) y LR (abajo) para la muestra de control de la señal SCF.

$$f(\vec{x}; \vec{\theta}) = \sum_{j=1}^3 \gamma_j f_j(\vec{x}; \vec{\theta}) \quad (4.50)$$

en donde j indica suma sobre especies (TM, SCF, QQB) y γ_j es la fracción de la especie j , y en donde cada f_j se escribe como producto de pdf unidimensionales.

$$f_j(m_{ES}, \Delta E', LR) = M_j(m_{ES}) E_j(\Delta E') L_j(LR) \quad (4.51)$$

Entonces, dada una muestra $\{\vec{x}_i\}$ de N_{obs} eventos observados, la función de verosimilitud está dada por:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{N_{obs}} \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_j f_j(\vec{x}_i; \vec{\theta}) \right) \quad (4.52)$$

Pero se desea acceder al número de eventos de señal en la muestra. Para acceder a éste se podría utilizar a la fracción de señal TM y SCF obtenida por el ajuste de Verosimilitud máxima y luego obtener el número de señal de la siguiente manera:

$$N_S = N_{TM} + N_{SCF} = (\gamma_1 + \gamma_2) N_{obs}. \quad (4.53)$$

Existe una manera de obtener el número de eventos de cada especie dentro de la muestra directamente por un ajuste de Verosimilitud. Para esto nótese que, el número de eventos generados dentro de PEP-II durante sus cinco años de operación es aleatorio. Si esta operación de generación de eventos se realizase cada cinco años, entonces el

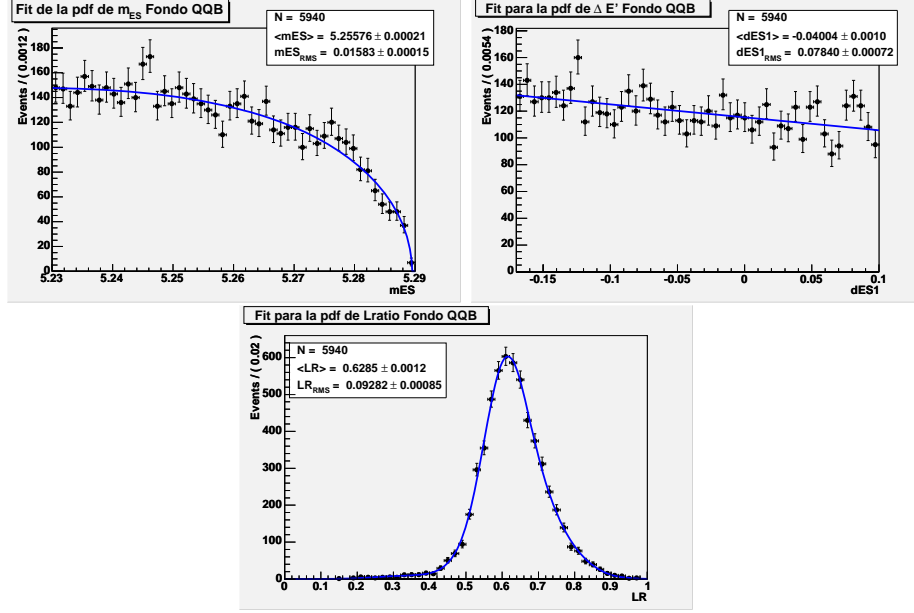


Figura 4.33: Ajuste de las pdf's de m_{ES} (arriba izquierda), $\Delta E'$ (arriba derecha) y LR (abajo) para la muestra de control del Fondo QQB.

número de eventos generados seguiría una distribución de Poisson. Recuerdese que la distribución de Poisson está dada por:

$$f(n; \nu) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \quad (4.54)$$

en donde, para el caso presente, ν sería el número esperado de eventos generados en PEP-II en un periodo de cinco años. Como se ha mencionado en el capítulo 3, la función de Verosimilitud está definida como la probabilidad de que el resultado del experimento sea la muestra. Entonces, se tiene que si el número de eventos generados por PEP-II fueron N_{obs} y cada uno de estos tuvieron un vector de observables \vec{x}_i , entonces la probabilidad de que esto ocurriese (es decir, la función de verosimilitud para esta muestra) está dada por:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, N_{TM}, N_{SCF}, N_{QQB}) = \frac{(N_{es})^{N_{obs}} e^{-(N_{es})}}{N_{obs}!} \prod_{i=1}^{N_{obs}} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{N_j}{N_{es}} f_j(\vec{x}_i; \vec{\theta}) \right) \quad (4.55)$$

$$= \frac{(N_{es})^{N_{obs}} e^{-(N_{es})}}{N_{obs}!} \frac{1}{N_{es}^{N_{obs}}} \prod_{i=1}^{N_{obs}} \left(\sum_{j=1}^3 N_j f_j(\vec{x}_i; \vec{\theta}) \right) \quad (4.56)$$

$$= \frac{e^{-(N_{es})}}{N_{obs}!} \prod_{i=1}^{N_{obs}} \left(\sum_{j=1}^3 N_j f_j(\vec{x}_i; \vec{\theta}) \right) \quad (4.57)$$

en donde $N_{es} = N_{TM} + N_{SCF} + N_{QQB}$ es el número total de eventos esperados y N_j

es el número esperados de la especie j . Esta función de Verosimilitud se conoce como función de *Verosimilitud Extendida*, y es la que se vendrá utilizando.

Una forma de poner a prueba al modelo es a través de la realización de *Experimentos Toy*. Un experimento *Toy* es un experimento virtual en la fábrica PEP-II. El experimento consiste en crear una muestra que está regida por la función de distribución que se ha construido. Y luego ajustarla con el modelo que se ha desarrollado. Toda optimización al modelo se realizará con la ayuda de las muestras de control. Los experimentos *Toy* son una manera de tener un estimado de la estabilidad del ajuste construido con el modelo. Será solamente cuando se tenga confianza en la estabilidad cuando se proceda a ajustar a los eventos de la muestra estadística. Lo único que se conoce son las funciones de distribución de cada una de las especies dentro de la muestra, pero se puede hacer una estimación del número de eventos de cada categoría. En la sección 4.2.3 se ha dado una estimación gruesa del número de eventos de señal, 700, y también una estimación del número de eventos de fondo QQB, 25000. Estos números no tienen nada de significativo, sólo son estimaciones que son útiles para poner a prueba al modelo. Una estimación del número de señal TM y SCF lo se hará de la siguiente manera:

$$N_{TM} = 700(1 - Frac_{SCF}) \quad y \quad N_{SCF} = 700Frac_{SCF} \quad (4.58)$$

en donde $Frac_{SCF}$ es el valor obtenido en la sección 4.2.6. La muestra se generará a través de un distribución de Poisson con valor esperado 700 un número de eventos de señal, y de igual manera para el número de eventos de fondo QQB. Se utilizará esta muestra para realizar un ajuste de Verosimilitud extendida. Para poner a prueba la estabilidad del ajuste de los parámetros que se dejen libres, se realizará este procedimiento un número N de veces. Como un primer experimento *Toy*, se dejaran libres únicamente al número de cada una de las especies.

Ajuste del Número de Señal TM, SCF y Fondo QQB.

Se han realizado 500 experimentos *Toy* dejando libre el número de eventos esperados para cada una de las especies. Aparte de las distribuciones del valor y del error de cada parámetro obtenido por el ajuste, se puede construir otra distribución conocida como *Pull*. La distribución *Pull* de una variable x ajustada es la distribución de la siguiente variable:

$$Pull_x = \frac{x_{ajuste} - x_{es}}{\Delta x_{ajuste}} \quad (4.59)$$

en donde x_{ajuste} y Δx_{ajuste} son el valor y el error del parámetro x obtenido por el ajuste, en cambio x_{es} es el valor esperado del parámetro x . El *Pull* de una variable debería ser una distribución Gaussiana con valor esperado cero y desviación estándar 1. Si el valor obtenido por el ajuste es una medida significativa de la cantidad que se desea estimar, el valor medio de la variable $Pull_x$ debería ser compatible con cero. Por esto se define el sezgo de la siguiente manera:

$$sezgo_x = |\langle Pull_x \rangle| \pm \frac{RMS(Pull_x)}{\sqrt{N_{MC}}} \quad (4.60)$$

en donde N_{MC} es el número de experimento *Toy* realizados. Vease expresiones (3.51) para los errores de la media y la desviación estándar de una distribución Gaussiana.

Además, si el valor del error obtenido por el ajuste es una medida significativa de la incertidumbre sobre el parámetro, entonces la desviación estándar del $Pull_x$ debería ser consistente con uno. Por esta razón se define el sezgo sobre el error como sigue:

$$Esezgo_x = |1 - RMS(Pull_x)| \pm \frac{RMS(Pull_x)}{\sqrt{2N_{MC}}} \quad (4.61)$$

Las distribuciones de los $Pull$ para cada uno de los parámetros libres dentro del ajuste se muestran en la figura 4.34. Los sezgos sobre los parámetros y los errores para estos experimentos *Toy* son:

$$\begin{aligned} sezgo_{N_{TM}} &= 0,14 \pm 0,04 & Esezgo_{N_{TM}} &= 0,09 \pm 0,03 \\ sezgo_{N_{SCF}} &= 0,15 \pm 0,04 & Esezgo_{N_{SCF}} &= 0,14 \pm 0,03 \\ sezgo_{N_{QQB}} &= 0,11 \pm 0,04 & Esezgo_{N_{QQB}} &= 0,06 \pm 0,03 \end{aligned} \quad (4.62)$$

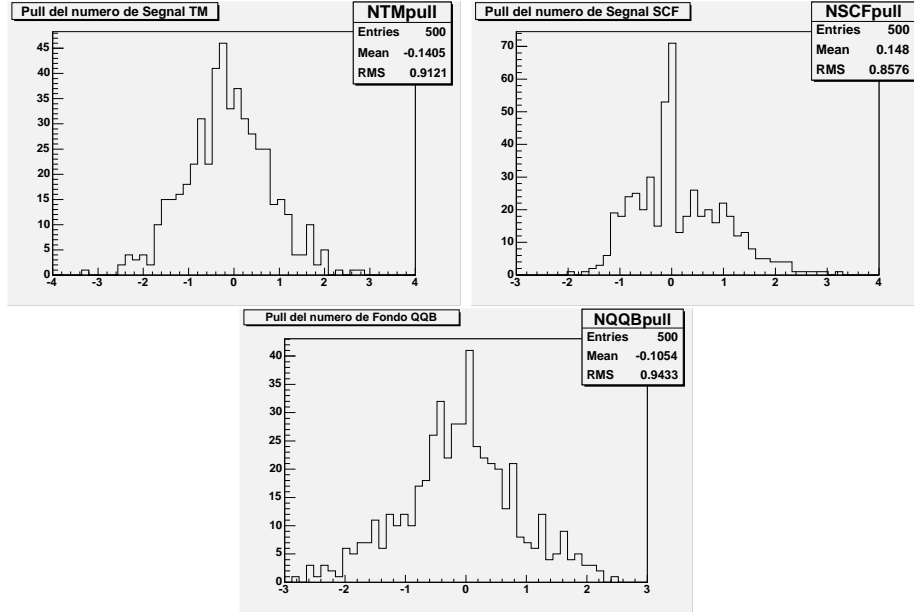


Figura 4.34: Distribuciones de los $Pull$ para N_{TM} (arriba izquierda), N_{SCF} (arriba derecha) y N_{QQB} (abajo).

Sólamente observando los sezgos se nota que el modelo falla al tratar de ajustar a estas cantidades. Nótese que la distancia a cero de casi todos los sezgos (excepto el sezgo en el error del Fondo QQB) están a más de tres desviaciones estándar de cero, que es valor que esperaríamos que tuvieran. La probabilidad de que esto ocurra

es muy baja (la probabilidad de que una variable con distribución Gaussiana tenga un valor a más de tres desviaciones estándar de su valor medio es menor que 0,1%), implicando que modelo está intrínsecamente sezdado para todos los parámetros. Se sospecha que la razón es que el modelo no es lo suficientemente fino como ajustar el valor de N_{SCF} . Para darle peso a esta hipótesis vease la figura 4.35. En esta figura se observa que aproximadamente la mitad de las veces el ajuste no pudo encontrar el valor de N_{SCF} y por consiguiente le asigno el valor cero. Se tiene entonces que el ajuste de este parámetro es bastante inestable. Por esto último, para lo que sigue, se dejará fija la fracción de SCF.

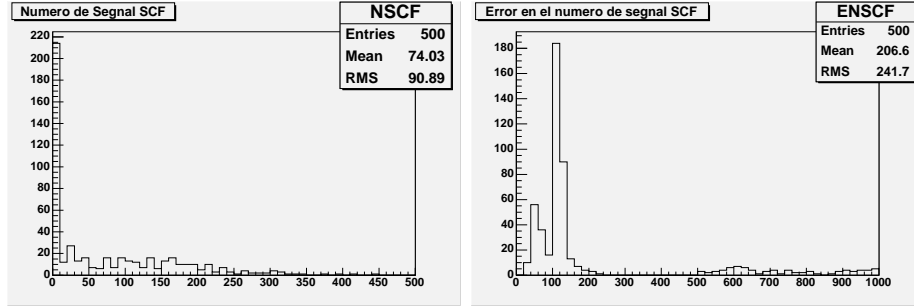


Figura 4.35: Distribuciones del ajuste al número de SCF (izquierda) y su error (derecha).

Ajuste del Número de Señal y del Número del Fondo QQB.

Para resolver los inconvenientes del ajuste del SCF se realizará el ajuste directamente al número de señal. Se redefinirá entonces a la función de verosimilitud de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, N_S, N_{QQB}) = \frac{e^{-(N_{es})}}{N_{obs}!} \prod_{i=1}^{N_{obs}} \left(\sum_{j=1}^3 N_j f_j(\vec{x}_i; \vec{\theta}) \right) \quad (4.63)$$

en donde $N_1 = (1 - Frac_{SCF})N_S$ y $N_2 = Frac_{SCF}N_S$, y la fracción de SCF será un parámetro que se dejará fijo.

Se han realizado 500 experimentos *Toy* ajustando con esta función de Verosimilitud. Las distribuciones los *Pull* se muestran en la figura 4.36. Los valores de los sezdos se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} sezdgo_{N_S} &= 0,01 \pm 0,04 & E sezdgo_{N_S} &= 0,02 \pm 0,03 \\ sezdgo_{N_{QQB}} &= 0,03 \pm 0,05 & E sezdgo_{N_{QQB}} &= 0,01 \pm 0,03 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Cada uno de estos sezdos son compatibles con cero. Estos experimentos *Toy* son bastante estables, ya que al nivel de precisión de 500 observaciones no se puede observar sezdgo alguno. Concluido esto, se pasará ahora a considerar a la especie de Fondo BB.

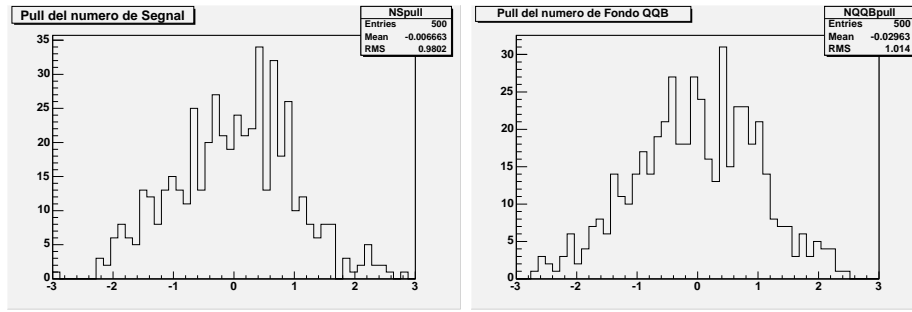


Figura 4.36: Distribuciones de los $Pull$ de N_S (izquierda) y N_{QQB} (derecha).

4.2.9. Segunda Aproximación a la construcción del Modelo Estadístico. La inclusión del Fondo BB.

El estudio de la especie Fondo BB procede de manera análoga que para las otras. Se estudiarán las correlaciones entre las variables de discriminación y se decidirá como construir la pdf que representa a esta categoría.

Construcción de la p.d.f del Fondo BB.

Observense rápidamente los perfiles de las variables de discriminación para el Fondo BB, estos se muestran en la figura 4.37. Los coeficientes de correlación se muestran abajo.

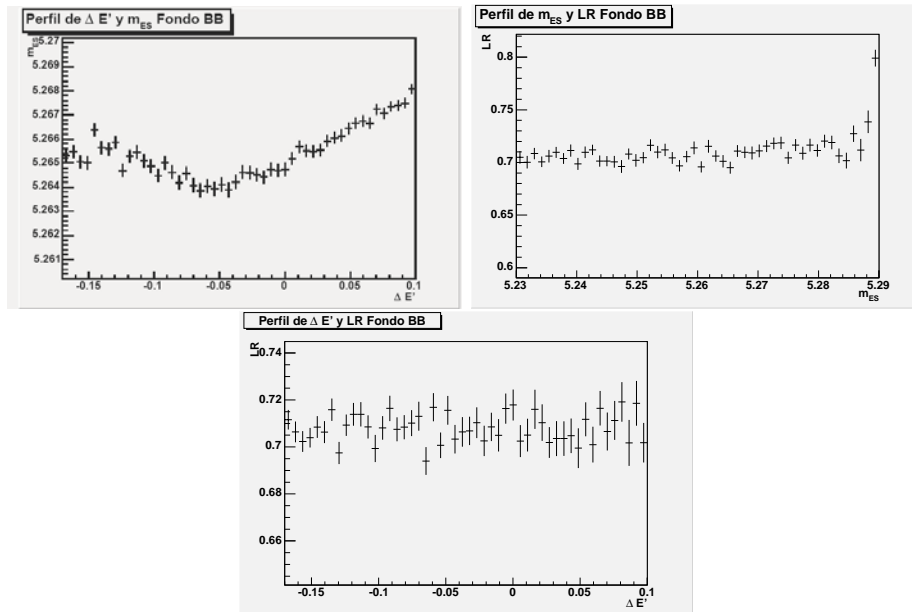


Figura 4.37: Perfiles de m_{ES} , $\Delta E'$ y LR Fondo BB.

Correlación lineal	Fondo BB
m_{ES} y $\Delta E'$	-0.03
m_{ES} y LR	0.04
$\Delta E'$ y LR	0.003

Los coeficientes de correlación lineal están por debajo de 5%, pero la correlación entre m_{ES} y $\Delta E'$ no es principalmente lineal. Por esto se hará la siguiente hipótesis: La variable LR es independiente de m_{ES} y $\Delta E'$, pero estas dos últimas no lo son. Por este motivo la pdf para la especie del fondo BB se modelará de la siguiente manera:

$$f_{BB}(m_{ES}, \Delta E', LR) = f_{12}(m_{ES}, \Delta E') f_3(LR) \quad (4.65)$$

Se construirán estas pdf de la siguiente forma:

- La pdf de m_{ES} y $\Delta E'$ se ha decidido dividirla en tres componentes: una componente de Fondo BB Exclusivo (+), una de Exclusivo (-) y otra de Genérico. De manera que se escribirá esta pdf de la siguiente manera:

$$f_{12}(m_{ES}, \Delta E) = \frac{N_{B+}}{N_{Btot}} f_+(m_{ES}, \Delta E') + \frac{N_{B-}}{N_{Btot}} f_-(m_{ES}, \Delta E') + \frac{N_{BG}}{N_{Btot}} f_G(m_{ES}, \Delta E') \quad (4.66)$$

en donde N_{B+}, N_{B-}, N_{BG} son el número de eventos de Fondo BB Exclusivo (+), Exclusivo (-), Genérico respectivamente esperados en la muestra, y $N_{Btot} = N_{B+} + N_{B-} + N_{BG}$. Las f_i con $i = +, -, G$ son las pdf correspondientes a las clases de Fondo BB. La ventaja de descomponer la pdf de m_{ES} y $\Delta E'$ se verá más adelante cuando se proceda a calcular los errores sistemáticos. Para generar las f_i se suavizan las distribuciones bidimensionales de m_{ES} y $\Delta E'$ construidas con las muestras de control mencionadas en la sección 4.2.1. Las distribuciones bidimensionales de m_{ES} y $\Delta E'$ se muestran en la figura 4.38. El número de eventos esperados de cada clase de Fondo BB depende de *Branching Ratios* de los modos de decaimiento que constituyen cada especie, de las eficiencias calculadas con las muestras de control y de la luminosidad (el número total de eventos $B^0 \bar{B}^0$ generados), la manera en la que se han calculado es la siguiente:

$$N_{Bi} = L \times f_i \times \mathcal{B}r_i \quad (4.67)$$

en donde $i = +, -, G$, f_i y $\mathcal{B}r_i$ son la eficiencia y el *Branching Ratio* de la subclase i del Fondo BB, y L es la luminosidad (unos 120 millones de eventos). Los valores obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned} N_{B+} &= 93 \pm 10 \% \\ N_{B-} &= 166 \pm 10 \% \\ N_{BG} &= 1925 \pm 20 \% \end{aligned} \quad (4.68)$$

en donde los errores en estas cantidades son debidos a incertidumbres en la Luminosidad, los *Branchin Ratios* y las eficiencias utilizadas para calcularlas.

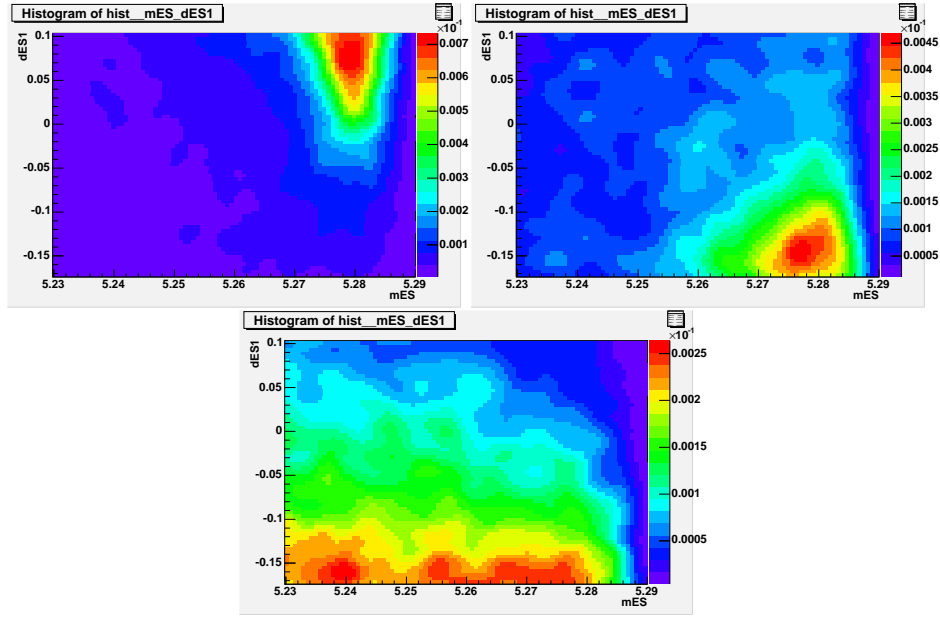


Figura 4.38: Pdf bidimensionales de m_{ES} y $\Delta E'$ para el Fondo BB Exclusivo (+) (arriba izquierda), Exclusivo (-) (arriba derecha) y Genérico (abajo).

- En cuanto a la pdf de la variable LR , se ha propuesto un combinación lineal de tres Gaussianas. El resultado del ajuste se muestra en la figura 4.39, y los valores de los parámetros obtenidos se muestran a continuación:

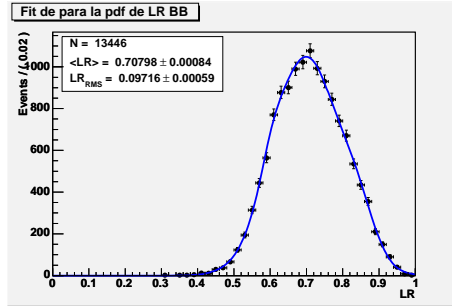


Figura 4.39: Ajuste de la pdf de LR para el Fondo BB.

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= 0,603 \pm 0,007 & \mu_2 &= 0,842 \pm 0,007 \\
 \mu_3 &= 0,699 \pm 0,004 & \sigma_1 &= 0,032 \pm 0,006 \\
 \sigma_2 &= 0,048 \pm 0,005 & \sigma_3 &= 0,091 \pm 0,002 \\
 \beta_1 &= 0,03 \pm 0,01 & \beta_2 &= 0,08 \pm 0,02
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Ya que se ha modelado a la especie de Fondo BB se puede incluir para completar el modelo. Como en el caso anterior, se van a realizar estudios de validación con la realización de experimentos *Toy*.

Estudios de Validación del Modelo #2. Los Experimentos Toy.

De igual manera que para el primer modelo, se pondrá a prueba el segundo a través de la realización de experimentos *Toy*.

Ajuste del Número de Fondo BB.

Intereza estimar si se puede ajustar al número de eventos de Fondo BB. Para esto se han hecho 1000 experimentos *Toy* (se ha aumentado el número de experimento para disminuir los errores estadísticos) dejando libre al número de eventos de señal, al número de eventos de Fondo QQB y al número de eventos de Fondo BB. Los *Pull* de los resultados se muestran en la figura 4.40, y los sezgos a continuación:

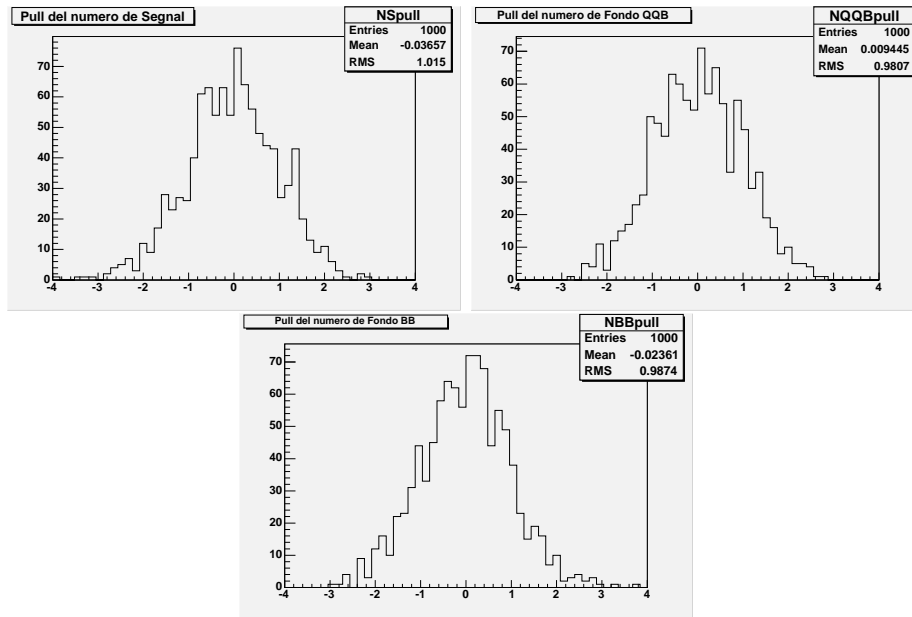


Figura 4.40: Distribuciones de los *Pull* para N_S (arriba izquierda), N_{QQB} (arriba derecha) y N_{BB} (abajo).

$$\begin{aligned}
 sezgo_{N_S} &= 0,037 \pm 0,032 & Esezgo_{N_S} &= 0,015 \pm 0,022 \\
 sezgo_{N_{QQB}} &= 0,009 \pm 0,030 & Esezgo_{N_{QQB}} &= 0,019 \pm 0,022 \\
 sezgo_{N_{BB}} &= 0,024 \pm 0,031 & Esezgo_{N_{BB}} &= 0,012 \pm 0,022
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Podría pensarse que el número de señal está sezgado. La distancia del sezgo en N_S a cero es menor de dos desviaciones estándar, nótese que esto puede ocurrir con una probabilidad del 30 %, de manera que el resultado que se ha obtenido puede ser una fluctuación estadística y no se puede concluir que exista ningún sezgo. Con relación a los demás sezgos, todos son compatibles con cero. Ahora se procederá a ver si los parámetros de la pdf del Fondo QQB pueden dejarse libres en el ajuste.

Ajuste del los parámetros de la pdf de Fondo QQB.

Los parámetros de la pdf del Fondo QQB que se quiere ver si se pueden ajustar son: el parámetro de *Argus* ξ para la pdf de m_{ES} y coeficiente lineal c_0 para la pdf de $\Delta E'$. No se dejaron libres a los parámetros de la pdf de LR ya que las distribuciones de esta variable para todas las especies son muy parecidas, no es altamente discriminante, pero su existencia en el modelo disminuye el error estadístico del ajuste (esto se verá más adelante). Al igual que en el caso anterior se han realizado 1000 experimentos *Toy*, en cada uno de los cuales se han dejado libres a los parámetros de las pdf de m_{ES} y $\Delta E'$ del Fondo QQB y los números de eventos de las especies de señal, Fondo QQB y Fondo BB. Las distribuciones de los *Pull* del número de eventos de cada especie se muestran en la figura 4.41, los *Pull* de los parámetros de la pdf del Fondo QQB se muestran en la figura 4.42 y los sezgos a continuación.

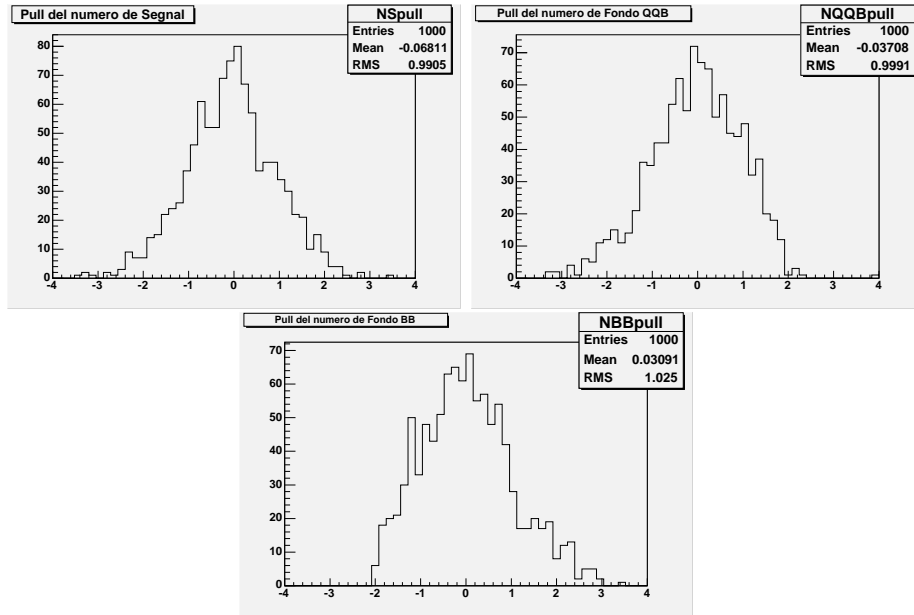


Figura 4.41: Distribuciones de los *Pull* para N_S (arriba izquierda), N_{QQB} (arriba derecha) y N_{BB} (abajo). Estos *Pull* son el resultado de los experimentos *Toy* en los que se han ajustados los parámetros de la pdf del Fondo QQB.

$$\begin{aligned}
 sezgo_{N_S} &= 0,068 \pm 0,031 & Esezgo_{N_S} &= 0,01 \pm 0,02 \\
 sezgo_{N_{QQB}} &= 0,037 \pm 0,032 & Esezgo_{N_{QQB}} &= 0,001 \pm 0,022 \\
 sezgo_{N_{BB}} &= 0,031 \pm 0,032 & Esezgo_{N_{BB}} &= 0,025 \pm 0,023 \\
 sezgo_{\xi} &= 0,016 \pm 0,033 & Esezgo_{\xi} &= 0,030 \pm 0,023 \\
 sezgo_{c_0} &= 0,016 \pm 0,032 & Esezgo_{c_0} &= 0,026 \pm 0,023
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

En realidad la cantidad que interesa que no esté sezgada es el número de eventos de señal. Su sezgo está a una distancia entre dos y tres desviaciones estándar de cero. El resultado que se ha obtenido puede ser una fluctuación estadística que tiene

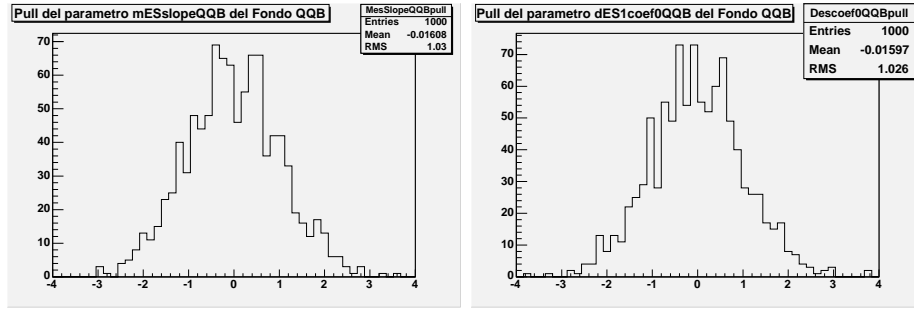


Figura 4.42: Distribuciones de los *Pull* del parámetro de *Argus* de la pdf de m_{ES} (izquierda) y del coeficiente lineal de la pdf de $\Delta E'$ (derecha) del Fondo QQB.

una probabilidad de 2% de ocurrir. Si la estimación de N_S estuviese sesgada, pues se habrían de hacer correcciones por sesgo. En cualquier caso, son los estudios de validación sobre los resultados del ajuste final los que lo determinaran. Los estudios que se han venido realizando son estimaciones de la estabilidad del ajuste de los parámetros. Todo este estudio nos ha dado pie a decidir dejar libres a los siguientes parámetros:

1. Número de eventos de Señal, N_S .
2. Número de eventos de Fondo QQB, N_{QQB} .
3. Número de eventos de Fondo BB, N_{BB} .
4. Parámetro de *Argus* de la pdf de m_{ES} del Fondo QQB, ξ .
5. Coeficiente lineal de la pdf de $\Delta E'$ del Fondo QQB, c_0 .

La forma esperada de la distribución de las variables de discriminación, con 700 eventos de señal, 25000 eventos de Fondo QQB y 2184 eventos de Fondo BB (ver relación 4.68) se muestra en la figura 4.43.

Ya que se ha construido modelo estadístico, es decir, se ha construido la pdf que rigen a la muestra y se ha definido a la función de Verosimilitud a utilizar. Restaría entonces analizar los datos reales.

4.3. El Cálculo del *Branchin Ratio* semi-inclusivo sin *charm* $\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0)$.

Antes de proceder al ajuste nominal, onservese la forma de las distribuciones de las variables de discriminación para los datos en la resonancia $\Upsilon(4S)$ o datos *On Peak*, estas se muestran en la figura 4.44. Nótese el parecido de las distribuciones de las figuras 4.44 y 4.43, dando un indicativo favorable de la construcción del modelo. El número de eventos en los datos *On Peak* es casi el doble del número de eventos esperados que se ha estimado, pero la estimación que se ha realizado ha sido en un número de eventos

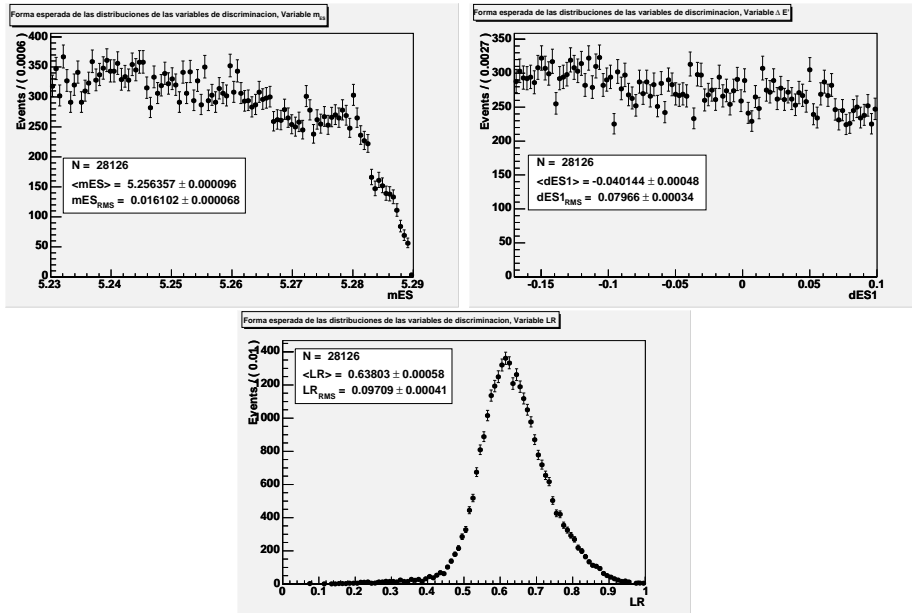


Figura 4.43: Forma esperada de las distribuciones de m_{ES} (arriba izquierda), $\Delta E'$ (arriba derecha) y LR (abajo).

$B\bar{B}$ de 120 millones, y el número de eventos $B\bar{B}$ con los que en realidad se cuenta son 230 millones aproximadamente.

4.3.1. Ajuste de los Datos *On Peak*.

Las proyecciones del resultado del ajuste de los datos *On Peak* en m_{ES} , $\Delta E'$ y LR se muestra en la figura 4.45, y los valores de los parámetros ajustados a continuación.

$$\begin{aligned}
 N_S &= 1665 \pm 78 \\
 N_{QQB} &= 57087 \pm 346 \\
 N_{BB} &= 5489 \pm 270 \\
 \xi &= -17,3 \pm 0,8 \\
 c_0 &= -0,67 \pm 0,06
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

Las otras curvas de colores distintos al azul en la figura 4.45 son las componentes de señal (en rojo), de Fondo QQB (en amarillo) y Fondo BB (en verde). Se analizaran los resultados del ajuste. El número de eventos de señal que han obtenido es un poco más del doble del número de eventos que ha estimado, pero este estimado está basado en una muestra de 120 millones de mesones B^0 y el ajuste ha sido realizado en una muestra que cuenta con aproximadamente el doble de esta cantidad. Ahora, se comparan los valores de los parámetros obtenidos en el ajuste y los valores obtenidos durante la construcción del modelo. Para esto, veanse las correlaciones entre los parámetros ajustados. Primero que nada, N_S no está muy fuertemente correlacionados con los demás parámetros. Esto es una buena noticia, ya que los demás parámetros tienen que ver con la modelación

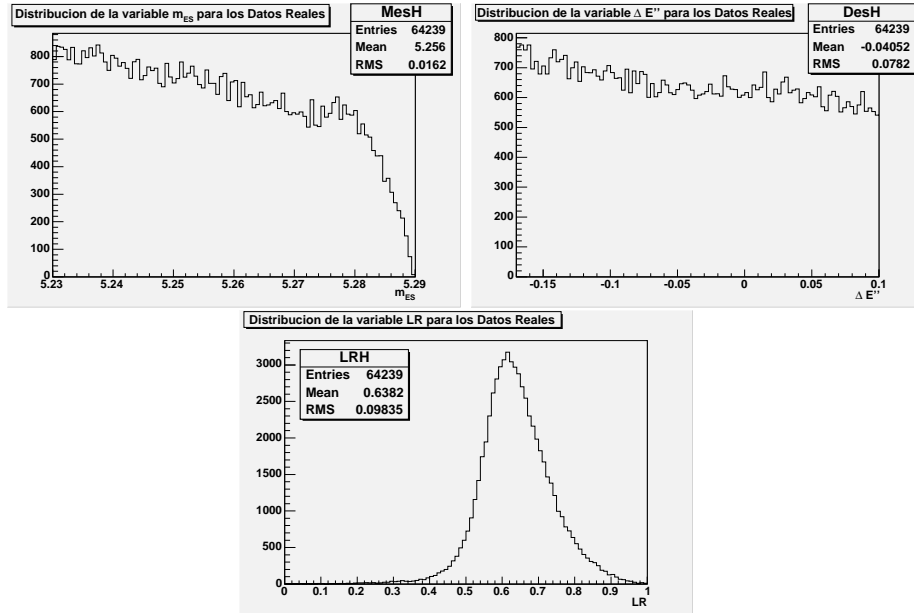


Figura 4.44: Forma de las distribuciones de m_{ES} (arriba izquierda), $\Delta E'$ (arriba derecha) y LR (abajo) para los datos *On Peak*.

de las especies de Fondo, y cualquier sesgo cometido durante la construcción de las pdf del Fondo QQB y BB se espera que no tenga un efecto muy marcado en el número de señal, de manera que el modelo es robusto en este sentido. Por otra parte, el número de eventos de Fondo QQB está fuertemente correlacionando con el número de eventos de Fondo BB, esto lo que indica es que el modelo no es lo suficiente fino como para separar a los eventos de Fondo QQB de los eventos de Fondo BB. Esta correlación trae como consecuencia una pequeña sobrestimación del número de eventos de Fondo BB, ya que con una muestra de 230 millones de mesones B el número esperado de eventos de Fondo BB es de 4124 ± 728 , que es casi compatible con el valor obtenido en el ajuste, pero un poco menor. La sobrestimación del Fondo BB trae consigo a una desestimación del número de eventos de Fondo QQB. Debido a que los parámetros de la pdf del Fondo QQB están correlacionados con estos dos números, esto último de lugar a la diferencia entre los valores de los parámetros resultados del ajuste nominal y los valores obtenidos con las muestras de control.

	N_S	N_{QQB}	N_{BB}	ξ	c_0
N_S	100 %	0.17 %	-21.68 %	26.33 %	-14.46 %
N_{QQB}	0.17 %	100 %	-67.22 %	-9.29 %	-20.84 %
N_{BB}	-21.68 %	-67.22 %	100 %	4.2 %	30.95 %
ξ	26.33 %	-9.29 %	4.2 %	100 %	-1.4 %
c_0	-14.46 %	-20.84 %	30.95 %	-14. %	100 %

Las variables que mejor discriminan entre la especie de señal y las de Fondo son m_{ES} y $\Delta E'$. Aunque LR no es muy discriminante entre la señal y las otras especies,

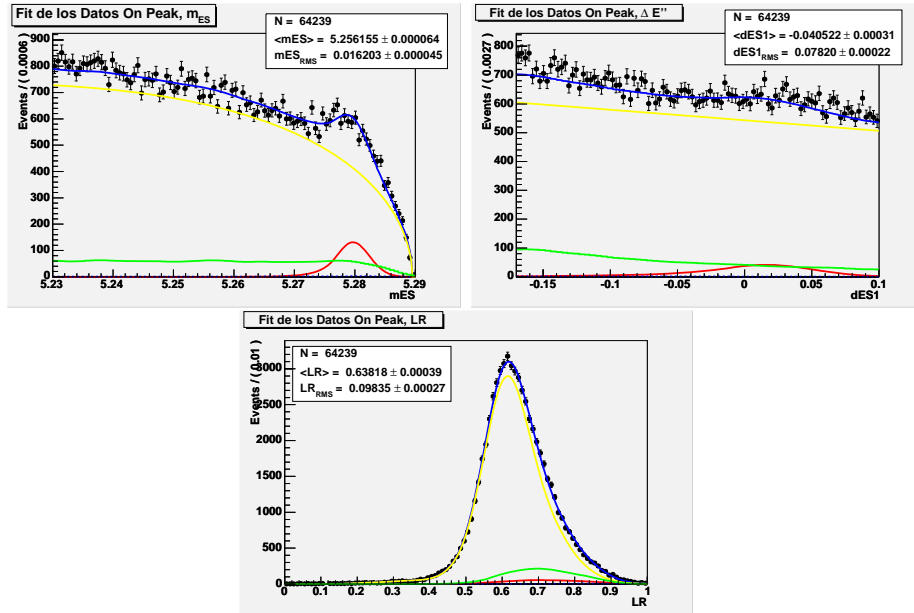


Figura 4.45: Proyecciones del ajuste nominal en las direcciones de m_{ES} (arriba izquierda), $\Delta E'$ (arriba derecha) y LR (abajo).

su presencia ayuda a separar entre las especies de Fondo y mejora los resultados del ajuste. Para ver esto, se ha realizado un ajuste solo con m_{ES} y $\Delta E'$ como variables de discriminación, el resultado del cual se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 N_S &= 1605 \pm 98 \\
 N_{QQB} &= 61061 \pm 1529 \\
 N_{BB} &= 1572 \pm 1506 \\
 \xi &= -19,2 \pm 0,9 \\
 c_0 &= -0,95 \pm 0,12
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

Nótese que la incertidumbre estadística de las cantidades ajustadas es mayor. El número de eventos de Fondo BB es casi consistente con el número esperado, pero a su vez también casi consistente con cero, indicando que el modelo, sin la presencia de la variable LR , le es bastante difícil discriminar entre los eventos de Fondo QQB y los de Fondo BB. El lo que sigue se haran estudios de la validación de los resultados del ajuste con la ayuda de los experimentos *Toy*.

4.3.2. Estudios de Validación de los resultados del Ajuste.

Para estudiar que tan significativo son los resultados del ajuste, se han realizado 1000 experimentos *Toy*. En estos experimentos *Toy* se han dejado libres a N_S , N_{QQB} , N_{BB} , ξ y c_0 , los valores esperados de los cuales son los obtenidos en el ajuste nominal. El *Pull* del número de eventos señal se muestran en la figura 4.46 y los sezgos a continuación:

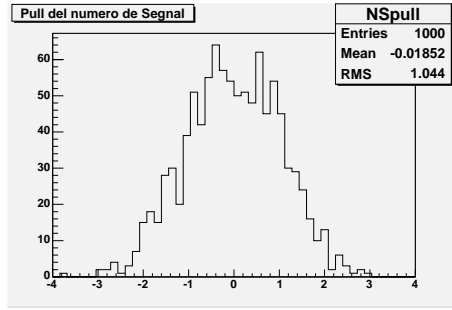


Figura 4.46: Distribución del $Pull$ de N_S para los experimentos *Toy* utilizando los valores esperados obtenidos del ajuste nominal.

$$sezgo_{N_S} = 0,02 \pm 0,03 \quad Esezgo_{N_S} = 0,04 \pm 0,02 \quad (4.74)$$

El sezgo en el número de señal es consistente con cero. El sezgo en el error es un número que está a una distancia de 2 desviaciones estándar de cero, esta es una posibilidad que tiene 5% de probabilidad de ocurrir, de manera que no podemos concluir que el error del número de señal esté sezgado. Se concluye entonces que el número de eventos señal obtenido por el ajuste es un estimado significativo, y de igual manera su error, del número de eventos de señal en la ventana V_2 .

4.3.3. Correcciones por eficiencia al Número de Señal y Cálculo del *Branching Ratio*.

El *Branching Ratio* semi-inclusivo sin *charm* está definido como:

$$\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0) = \frac{N_{Stot}}{N_{B^0}} \quad (4.75)$$

en donde N_{Stot} es el número de mesones B^0 producidos en PEP-II durante sus cinco años de operación, desde septiembre de 1999 hasta septiembre de 2004 que han decaído al estado final $K^+ \pi^- \pi^0$ sin pasar por los estados resonantes D^0 y D^- , y N_{B^0} es el número total de mesones B^0 producidos. El número que se ha obtenido en el ajuste nominal, N_S , es la fracción de N_{Stot} que fueron detectados por *BaBar* y tenían los valores de sus observables en la ventana V_2 . Para calcular N_{Stot} se hará una corrección por eficiencia de los procesos de preselección y selección final de la manera que se describe en el apéndice A.

Se ha construido una función eficiencia en el plano $h_{K\pi} M_{K\pi}$ utilizando los eventos Monte Carlo no-resonantes. De una generación Monte Carlo de eventos se tiene absoluto conocimiento de los eventos generados. Por cada evento generado se tiene el valor de $h_{K\pi}$ y $M_{K\pi}$ de los hijos del decaimiento del mesón B^0 . De cada evento seleccionado también se cuenta con el conocimiento de estas variables. Para construir la función eficiencia se ha cuadrículado el plano $h_{K\pi} M_{K\pi}$, y en cada subintervalo han calculado la eficiencia de la siguiente manera:

$$\epsilon_i = \frac{N_{sel_i}}{N_{gen_i}} \quad (4.76)$$

en donde ϵ_i , N_{sel_i} y N_{gen_i} son la eficiencia, el número de eventos seleccionados y el número de eventos generado en el subintervalo i . La distribución de la eficiencia en el plano $h_{K\pi} M_{K\pi}$ se muestra en la figura 4.47. Con esta función eficiencia se procede a calcular N_{Stot} a través de la expresión A.9.

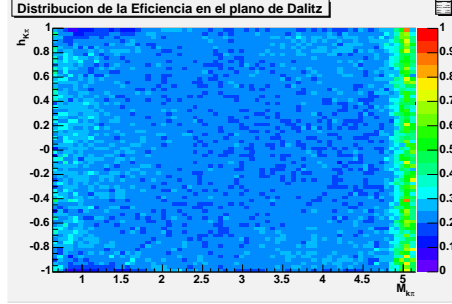


Figura 4.47: Eficiencia en el Plano $h_{K\pi} M_{K\pi}$.

$$N_{Stot} = \sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{s\mathcal{P}_S(y_e)}{\epsilon(y_e)} \quad (4.77)$$

de lo que resulta,

$$N_{Stot} = 7047 \quad (4.78)$$

En la muestra el número total de mesones B^0 es de,

$$N_{B^0} = (226,6 \pm 2,5)10^6 \quad (4.79)$$

de manera que el *Branching Ratio* semi inclusivo sin *charm* está dado por:

$$\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0) = 3,110 \times 10^{-5} \quad (4.80)$$

Para completar la medida faltaría dar la incertidumbre sobre la misma, este es un tema que se tratará en la sección siguiente.

4.3.4. Incertidumbres en la Medida.

Toda cantidad medida, x , viene aunada con una incertidumbre sobre su valor. Esta incertidumbre, el error ($\sigma(x)$), tiene dos componentes: una estadística ($\sigma_{Est}(x)$) y otra sistemática ($\sigma_{Sis}(x)$). Por lo general la cantidad x se calcula sobre una muestra. La componente estadística del error tiene que ver con la estimación de x con una muestra particular. La componente sistemática es debida a incertidumbres en la validez de las hipótesis sobre las cuales el modelo de cálculo de x se basa. Estas dos componentes del

error, proveniente de fuentes independientes, se consideran también independientes, de manera que el error total se escribe como suma en cuadratura de estas dos componentes (ver expresión 3.26),

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_{Est}(x)^2 + \sigma_{Sis}(x)^2} \quad (4.81)$$

El *Branching Ratio* que se ha calculado está definido por la relación 4.75. De manera que la incertidumbre está dada por:

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial N_{Stot}}\right)^2 \sigma(N_{Stot})^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial N_{B^0}}\right)^2 \sigma(N_{B^0})^2} \quad (4.82)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma(N_{Stot})}{N_{B^0}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{B}\sigma(N_{B^0})}{N_{B^0}}\right)^2} \quad (4.83)$$

La incertidumbre en N_{B^0} viene de la fábrica B PEP-II y es debida prácticamente a componentes sistematicas, y como se ve en 4.79 esta dada por:

$$\sigma(N_{B^0}) = 2,5 \times 10^6 \quad (4.84)$$

La incertidumbre en N_{Stot} se calculará haciendo la siguiente hipótesis:

$$N_{Stot} = \frac{N_S}{\langle \epsilon \rangle} \quad (4.85)$$

en donde N_S es el número de señal en la ventana V_2 obtenido por el ajuste, y $\langle \epsilon \rangle$ es el valor promedio de la eficiencia en el plano $h_{K\pi}M_{K\pi}$. La variación de la incertidumbre en la eficiencia y de N_S en cada subintervalo del plano $h_{K\pi}M_{K\pi}$ no se cree que supere a la incertidumbre de $\langle \epsilon \rangle$ y de N_S , de esta manera se sobrestima a la incertidumbre de N_{Stot} pero no con un grado muy alto. La razón por la cuál se hace esta aproximación es que se simplifican sobremanera los cálculos. Dicho todo esto, la estimación de la incertidumbre de N_{Stot} se escribe como,

$$\sigma(N_{Stot}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma(N_S)}{\langle \epsilon \rangle}\right)^2 + \left(\frac{N_S \sigma(\langle \epsilon \rangle)}{\langle \epsilon \rangle^2}\right)^2} \quad (4.86)$$

Las incertidumbres de las cantidades N_S y $\langle \epsilon \rangle$ tienen componentes estadísticas y sistemáticas que se tratarán de estimar.

Estimación de $\sigma(N_S)$

- **La componente estadística.** La componente estadística de $\sigma(N_S)$ viene dada por el error obtenido por el ajuste nominal.

- **La componente Sistemática.** Ya que se han dejado gran cantidad de parámetros fijos en el ajuste, se está cometiendo un error sistemático. La estimación de errores sistemáticos no es una ciencia exacta y tiene una buena parte de subjetividad y arbitrariedad. Los métodos que se decidieron aplicar para calcular los errores sistemáticos en N_S se resumen a continuación:

- **La Señal.** Se considerarán solamente a los sistemáticos de la pdf de señal TM, ya que la componente SCF es muy pequeña.

- Los sistemáticos en la pdf de m_{ES} son debidos principalmente a la media y la desviación estándar de la función *Crystal Ball*. Para estimarlos se calcularán las variaciones en N_S al variar la desviación estándar en $\pm 0,15 MeV$, el valor medio debe ser el correcto. Esta variación se debe a la incertidumbre en la masa del B^0 .
- Los sistemáticos debidos a la pdf de $\Delta E'$ son, al igual que para la pdf de m_{ES} , debido a la media y a la desviación estándar de la distribución. Para estimarlos se variará la media en $\pm 3 MeV$ y a la anchura en $\pm 2 MeV$. Esta variación es especialmente la incertidumbre en la escala de energía del dispositivo calorímetro (ver capítulo 2), y por tanto en la energía del π^0 .
- Los eventos generados por Monte Carlo no son una muestra de control 100 % significativa de los eventos del tipo $B\bar{B}$, por esta razón se tiene una componente de sistemático. Se ha demostrado que [11] los eventos generados por Monte Carlo subestiman la energía del resto del evento. Para la estimación del sistemático por la pdf de LR se ha utilizado una muestra de control conocida como *BReco*. Esta muestra son eventos $B\bar{B}$ muy bien reconstruidos, caracterizados por el decaimiento de uno de los mesones B en un canal específico. Estos eventos tienen una muestra de control que son eventos generados por Monte Carlo. Para distinguir entre ambos se designarán como *BReco Data* a los eventos reconstruidos y como *BReco MC* a su muestra de control. Comparando las distribuciones de las variables L_0 y L_2 para las muestras *BReco Data* y *BReco MC*, se ha encontrado que esta última subestima los valores medios y sobrestima las desviaciones estándar de las variables ya mencionadas. Estas diferencias son debidas a sesgos en los protocolos de reconstrucción de las trazas cargadas y neutras. Por esto, es razonable pensar que estas diferencias no dependan del modo de decaimiento del evento $B\bar{B}$ considerado. Se propondrá entonces la siguiente hipótesis: Las diferencias encontradas para la muestra *BReco* son las mismas diferencias entre los eventos de señal de la muestra y los eventos de señal generados por Monte Carlo. Se corregirán las distribuciones de L_0 y L_2 de los eventos de señal generados por Monte Carlo por los mismos factores de corrección que en la muestra *BReco*, de manera que las distribuciones de L_0 y L_2 reponderadas tengan los mismos valores medios y desviaciones estándar que la muestra *BReco Data*. Para esto se definen unas

variables L'_0 y L'_2 , reponderaciones de L_0 y L_2 , de la siguiente manera:

$$L'_i = \langle L_i \rangle_{Data} + \frac{\sigma(L_i)_{Data}}{\sigma(L_i)_{MC}} (L_i - \langle L_i \rangle_{MC}) \quad (4.87)$$

en donde $i = 0, 2$. $\langle L_i \rangle_{Data}$ y $\sigma(L_i)_{Data}$ son el valor medio y la desviación estándar de la variable L_i para la muestra *BReco*, y $\langle L_i \rangle_{MC}$ y $\sigma(L_i)_{MC}$ son el valor medio y la desviación estándar de la variable L_i para la muestra de control de la señal TM. Con las variables L'_0 y L'_2 se construye a LR' , la reponderación de LR . Se ha ajustado a la distribución de LR' con una pdf de la misma estructura que para LR TM. Se ha realizado el ajuste nominal con esta nueva pdf de LR TM. El error sistemático se estima como la variación del valor de N_S .

- **El Fondo QQB.**

- En cuanto a las pdf de m_{ES} y $\Delta E'$, sus parámetros se dejaron libres en el ajuste, de manera que no se tiene componente de error sistemático por esta parte.
- Para el cálculo del sistemático en la pdf de LR se ha utilizado una muestra control que se ha denominado como *Side Band*. El *Side Band* es un conjunto de eventos de los datos *On Peak* en una región del plano $m_{ES}\Delta E'$ en la cual se encuentran practicamente sólo eventos del tipo Fondo QQB. Esta región se ha definido como

$$Side\ Band(5,20 < m_{ES} < 5,23) \times (0 < \Delta E' < 0,3) \quad (4.88)$$

Se ha dividido el *Side Band* en cuatro cuadrantes de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \text{Cuadrante}_1 &= (5,20 < m_{ES} < 5,215) \times (0,15 < \Delta E' < 0,3) \\ \text{Cuadrante}_2 &= (5,215 < m_{ES} < 5,23) \times (0,15 < \Delta E' < 0,3) \\ \text{Cuadrante}_3 &= (5,20 < m_{ES} < 5,215) \times (0 < \Delta E' < 0,15) \\ \text{Cuadrante}_4 &= (5,215 < m_{ES} < 5,23) \times (0 < \Delta E' < 0,15) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Para cada uno de estos cuadrantes se ha ajusta una pdf para LR con un combinación lineal de tres Gaussianas. Con los resultados de cada cuadrante se ha realizado el ajuste nominal, y como el error sistemático se ha tomado a la peor variación.

- **El Fondo BB.**

- El sistemático debido a la pdf bidimensional de m_{ES} y $\Delta E'$ se ha calculado realizando ajustes variando el contenido de las tres subespecies del Fondo BB. La variación en las componentes Exclusivo (+) y Exclusivo (-) ha sido de $\pm 10\%$, y la variación en la eventos genéricos ha sido de $\pm 20\%$. Estas variaciones son debidas a la incertidumbre en los *Branching Ratios* y en las eficiencias de estas componentes.

- El sistemático en la pdf de *LR* Fondo BB es por la misma razón que en el caso de la pdf de *LR* TM, por esté motivo estos están muy correlacionados. Lo que se hará es hacer el mismo procedimiento para *LR* Fondo que para *LR* TM y tomar como sistemático el pero de los casos.

Estimación de $\sigma(\langle\epsilon\rangle)$.

- **La componente estadística.** La incertidumbre estadística en la eficiencia está dada por

$$\sigma(\langle\epsilon\rangle)_{Est} = \sqrt{\frac{\langle\epsilon\rangle(1 - \langle\epsilon\rangle)}{Ngen}} \quad (4.90)$$

en donde *Ngen* es el número de eventos generados por Monte Carlo. Debido a que *Ngen* es muy grande, aproximadamente unos 2 millones y medio de eventos, la componente estadística del error en la eficiencia queda apantallada por las componentes sistemáticas que se verán a continuación, de manera que no se considerará esta componente para lo que sigue.

- **La componente sistemática.** Es componente de la incertidumbre en la eficiencia tiene varias partes que se describen a continuación.
 - Existe un error sistemático debido a la eficiencia en la reconstrucción de partículas neutras, esta incertidumbre es de 3 %.
 - Existe también un error sistemático en la eficiencia de reconstrucción de trazas cargadas, esta incertidumbre está dada por 0,8 %.
 - La eficiencia en la identificación de partículas cargadas tiene una incertidumbre de 1,4 %. Estos reportes sobre los dispositivos de *BaBar*.
 - En la realización del análisis, se han definido ciertos cortes en las variables m_{ES} , $\Delta E'$ y *Onn* que han eliminado eventos de señal. La realización de estos cortes estuvieron basados en el análisis de las muestras de control, de manera que por esta parte se tiene una componente de error sistemático sobre la eficiencia. Para estimarla se recalculará la eficiencia variando la ventana en la que se ha cortado. El corte que se ha realizado sobre m_{ES} es un corte que prácticamente no elimina eventos de señal, ya que se ha realizado bastante lejos del núcleo de la distribución. Se onsiderará que este corte no aporta un sistemático significativo a la eficiencia. Para estimar el sistemático en el corte en $\Delta E'$ se variará la ventana sobre esta variable con las mismas variaciones que se han ralizado sobre la anchura de la pdf de $\Delta E'$ TM. En cuanto al corte en *Onn* se hace la siguiente suposición: el error sobre la eficiencia del corte en *Onn* es el mismo error que se hubiese obtenido al evaluar a la eficiencia con la muestra *Breco*, debido a que la muestra *BReco*, luego de que se sustrajo todos los eventos de fondo, es de 2609 eventos, el error en la eficiencia del corte en *Onn* se cálcula de la siguiente manera:

$$\sigma(Efic(Onn > 0,4)) = \sqrt{\frac{Efic(Onn > 0,4)(1 - Efic(Onn > 0,4))}{2609}} \quad (4.91)$$

en donde $Efic(Onn > 0,4)$ es la eficiencia del corte que se ha hecho en la red de neuronas.

En las tablas que se muestran abajo están todas las componentes de error sobre N_S y $\langle \epsilon \rangle$. En las últimas filas de estas tablas se muestra la suma en cuadratura de todas estas componentes.

Componente sistemática sobre N_S	
Componente	sistemático
Anchura de m_{ES} TM	2.7 %
Media de $\Delta E'$ TM	0.5 %
Anchura de $\Delta E'$ TM	2.6 %
pdf de LR TM o Fondo BB	3.1 %
pdf de LR QQB	1.1 %
Exclusivo (+) BB	0.5 %
Exclusivo (-) BB	0.1 %
Genérico BB	1.2 %
Componente sistemático Total	5.2 %

Componente sistemática sobre $\langle \epsilon \rangle$	
Componente	sistemático
Reconstrucción Trazas Neutras	3.0 %
Reconstrucción Trazas Cargadas	0.8 %
Identificación Trazas Cargadas	1.4 %
Corte en $\Delta E'$	1.1 %
Corte en Onn	1.1 %
Componente sistemático Total	3.7 %

La incertidumbre estadística en N_S es 4,7 % (ver resultado 4.72), de manera que la incertidumbre total en N_S está dada por

$$\sigma(N_S) = \sqrt{(4,7\%)^2 + (5,2\%)^2} = 7,0\% \quad (4.92)$$

Entonces, se tiene que

$$N_S = 1665 \pm 7,0\% \quad \langle \epsilon \rangle = 0,2 \pm 3,7\% \quad (4.93)$$

Utilizando la ecuación 4.86 se calcula la incertidumbre en N_{Stot} y se obtiene:

$$N_{Stot} = 7047 \pm 8,3\%. \quad (4.94)$$

Por último, utilizando la expresión 4.82 se calcula la incertidumbre en el *Branching Ratio* y se obtiene

$$\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0) = (3,11 \pm 0,17 \pm 0,19) \times 10^{-5}. \quad (4.95)$$

en donde el primer valor del error es la componente estadística y el segundo es la componente sistemática.

Capítulo 5

Conclusiones.

A través de la medida de *Branching Ratio* que se ha realizado se ha puesto en evidencia la factibilidad de obtener observables de los eventos de señal a través del modelo construido. Para optimizar un poco más el modelo convendría realizar estudios sobre la distribución de las variables LR para tener un mejor control sobre esta, y estudiar si algunos de los parámetros de la pdf de la señal pueden ser dejados libres en el ajuste, ya que parámetros como las anchuras de las pdf de m_{ES} y ΔE influyen notablemente al error sistemático total.

El trabajo realizado es sólo un análisis preliminar de canales del tipo $B \rightarrow K\pi\pi$, es decir, el conjunto de canales en los cuales se cuenta en el estado final con un kaón y dos piones, con todas las combinaciones de carga eléctrica posibles (la carga eléctrica total de las partículas en el estado final debe ser la carga eléctrica del mesón B , que puede tomar los valores 0, +1 o -1). El número de canales posibles es ocho, y para cada canal se tienen estados resonantes y no resonantes. Un análisis de Dalitz para cada modo resonante permite realizar medidas de *Branching Ratios*, asimetrías CP directas y dependientes del tiempo. Se tiene entonces que, el número de observables que se pueden obtener en un estudio combinado de los canales $B \rightarrow K\pi\pi$ es bastante grande. Todos estos observables están correlacionados, debido a que se caracterizan por los mismos vértices CKM , y por consiguiente, por los mismos parámetros de la matriz CKM . De manera que, con el estudio de estas correlaciones se puede, si la estadística lo permite, acceder a los parámetros del triángulo unitario, y por consiguiente a los parámetros de la matriz CKM .

Apéndice A

Los *sPlot* y el Cálculo de *Branching Ratios*.

Lo que se pretende con este apéndice es dar a conocer una técnica que será utilizada en el corazón del documento para la corrección del número de señal obtenido en un ajuste de Verosimilitud Máxima extendida. Solamente se darán las propiedades de cantidades conocidas como *sWeights* y su utilización para la corrección al número de eventos de señal. Para un tratado más completo sobre el formalismo de los *sPlots* ver referencia [12]. Se considera un análisis, basado en N_{obs} eventos observados, el cual está tratando con N_{es} especies de eventos: estas son varias componentes de señal y Fondo las cuales en conjunto dan cuenta de los N_{obs} eventos observados. Se asume que el análisis está basado en la aplicación del método de verosimilitud Máxima extendida, con la función de verosimilitud dada por:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{e=1}^{N_{obs}} \ln \left(\sum_{i=1}^{N_{es}} N_i f_i(y_e) \right) - \sum_{i=1}^{N_{es}} N_i \quad (\text{A.1})$$

en donde f_i es la pdf de la especie i con respecto a un conjunto de variables discriminantes y : $f_i(y_e)$ denota el valor tomado por la pdf f_i en el evento e , el cual está asociado con un valor y_e del conjunto de variables discriminantes.

Los *sWeights* están definidos de la siguiente manera:

$$s\mathcal{P}_n(y_e) = \frac{\sum_{j=1}^{N_{es}} V_{nj} f_j(y_e)}{\sum_{k=1}^{N_{es}} N_k f_k(y_e)} \quad (\text{A.2})$$

en donde V_{nj} es la matriz de covariancia obtenida en el ajuste de Verosimilitud extendida, la inversa de esta está dada por

$$V_{nj}^{-1} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial N_n \partial N_j} = \sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{f_n(y_e) f_j(y_e)}{\left(\sum_{k=1}^{N_{es}} N_k f_k(y_e) \right)^2} \quad (\text{A.3})$$

Lo que intereza sobre los *sWeights* es una propiedad sobre su suma de todos los eventos, esta se deduce de la siguiente manera.

- La función de verosimilitud, expresión A.1, siendo extrema para el valor de N_j obtenido en el ajuste, se debe entonces satisfacer que:

$$\sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{f_j(y_e)}{\sum_{k=1}^{N_{es}} N_k f_k(y_e)} = 1, \forall j \quad (\text{A.4})$$

- De las relaciones A.3 y A.4 se deriva que:

$$\sum_{i=1}^{N_{es}} N_i V_{ij}^{-1} = \sum_{i=1}^{N_{es}} N_i \sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{f_n(y_e) f_j(y_e)}{\left(\sum_{k=1}^{N_{es}} N_k f_k(y_e)\right)^2} = \sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{f_j(y_e)}{\sum_{k=1}^{N_{es}} N_k f_k(y_e)} = 1 \quad (\text{A.5})$$

- Multiplicando ambos lados de A.5 y sumando sobre j se obtiene la relación:

$$\sum_{j=1}^{N_{es}} V_{jl} = \sum_{j=1}^{N_{es}} V_{jl} \sum_{i=1}^{N_{es}} N_j V_{ij}^{-1} = \sum_{i=1}^{N_{es}} \left(\sum_{j=1}^{N_{es}} V_{ij}^{-1} V_{jl} \right) N_i = \sum_{i=1}^{N_{es}} \delta_{il} N_i = N_l \quad (\text{A.6})$$

Se sigue entonces que los *sWeights* satisfacen la siguiente relación

$$\sum_{e=1}^{N_{obs}} s\mathcal{P}_n(y_e) = \sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{\sum_{j=1}^{N_{es}} V_{nj} f_j(y_e)}{\sum_{k=1}^{N_{es}} N_k f_k(y_e)} = \sum_{j=1}^{N_{es}} V_{nj} = N_n \quad (\text{A.7})$$

Se utilizará esta misma suma pesada en eficiencia para calcular al número de eventos de señal corregido. Considerese el plano $h_{K\pi} M_{K\pi}$, y asumase que este ha sido cuadrículado, dividiendolo así en m subintervalos $\{B_i\}$. Entonces, el número de eventos seleccionados de la especie n en el subintervalo B_i está dados por

$$N_n(i) = \sum_{y_e \in B_i} s\mathcal{P}_n(y_e) \quad (\text{A.8})$$

si en este subintervalo la eficiencia es $\epsilon(i)$, eso quiere decir que de cada $\frac{1}{\epsilon(i)}$ eventos producidos uno es seleccionado. Esto implica a su vez que de cada $N_n(i)$ seleccionados en el subintervalo B_i , se han producido $\frac{N_n(i)}{\epsilon(i)}$. De manera que, el número total de eventos de la especie n producidos es la suma siguiente:

$$N_{n\text{tot}} = \sum_{i=1}^m N_n(i) = \sum_{i=1}^m \frac{\sum_{y_e \in B_i} s\mathcal{P}_n(y_e)}{\epsilon(i)} \quad (\text{A.9})$$

$$= \sum_{e=1}^{N_{obs}} \frac{s\mathcal{P}_n(y_e)}{\epsilon(y_e)} \quad (\text{A.10})$$

Es esta última expresión la que será utilizada para la corrección del número de eventos de señal.

Bibliografía

- [1] Christenson et al., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **11**, 310 (1964).
- [2] Melfo A., *Notas para un curso introductorio al MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES*. <http://webdelprofesor.ula.ve/melfo>. Se dispone de copia impresa.
- [3] S. Henry, *Phys. Rev.*, **125**, Iss 6, 2139-2162, (1962).
- [4] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 351, (1963).
- [5] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.*, **49**, 652, (1973).
- [6] L.L. Chau and W.Y. Keung, *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1802 (1984).
- [7] Particle Data Group (K. Hagiwara et al.), *Phys. Rev.*, **D66**, 010001 (2002 and 2003 update).
- [8] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1945 (1983).
- [9] *THE BABAR PHYSICS BOOK: PHYSICS AT AN ASYMETRIC B FACTORY*. By BaBar Collaboration (P. Harrison et al). SLAC-R-504, Cap1 and Cap2,(1998).
- [10] Charles J. et al, *CP Violation and the CKM Matrix: Assesing the impact of the Asymetric B Factories*. **arXiv:hep-ph/0406184v2**, Part I and Part III, <http://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/slac-r-504.html> , (2004).
- [11] Chavez C. et al, *Measurement of the Branching fractions and direct CP asymetries of the decays $B^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$ and $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^0$* , BABAR Analysis Document # 952, Version 5, (2004).
- [12] Pivk M. and Le Diberder F., *sPlots: a statistical tool to unfold data distributios*. **arXiv:physics/040283v1**, (2004).
- [13] Eidelman S. et al., *Kinetics, cross-section formulea, and plots*, *Phys. Lett.* **B592**, Issues 1-4, pp. 298-320, (2004).
- [14] Arnaud A. et al, *Measurentes of CP-Violating Asymetries in $B^0 \rightarrow (\rho\pi)^0$ Using a Time-Dependent Dalitz Plot Analysis.*, BaBar Analysis Document #637, Version 8, (2004).

- [15] Eidelman S. et al., *Mathematical tools or statistics, Monte Carlo, Group Theory*, *Phys. Lett.* **B592**, Issues 1-4, pp. 275-297, (2004).
- [16] Rosner J. and Slezak S., *Classical illustrations of CP violation in kaon decays*, *Am. J. Phys.* **69** (1), (2001).
- [17] Barlow R. et al., *Recommended Statistical Procedures for BaBar, BABAR Analysis Document # 318, Version 1*, (2002).
- [18] QUEEN MARY university of London, *EPP Lectures*.
<http://hepwww.ph.qmw.ac.uk/epp/lectures.html>, Last updated 2004.