

Fórmula de Conteo para un Dominó de tres Caras

Hanzel Lárez

Abstract

In this article we obtain a formula that calculates the number of points that is obtained when adding the points of all pieces from a domino game of any size, based on its greatest double piece. Also we found the number of pieces of the mentioned domino. This result is obtained from elementary relations that involve only finite sums. Similar results have been obtained using Combinatorial Theory. Additionally, we study a domino game of three faces of any size and we found a formula that that calculates its number of pieces based on its highest trio.

key words. Dominoes, multi-set, finite sums, Combinatorial Theory.

Resumen

En este trabajo daremos técnicas, usando relaciones básicas de sumas finitas, para resolver problemas de determinados tipos, como por ejemplo, se calcula el número de puntos que se obtiene al sumar los puntos de todas las fichas de un juego de dominó de cualquier tamaño, en función de su ficha doble mayor. También encontramos el número de fichas de dicho dominó. Resultados similares han sido obtenidos usando Teoría Combinatoria. Adicionalmente, estudiamos un juego de dominó de tres caras, de cualquier tamaño y encontramos una fórmula que calcula su número de fichas en función de su terna más alta. Además, desarrollaremos técnicas para realizar tabas de multiplicar.

Palabras Claves: Dominó, multiconjuntos, sumas finitas, Teoría Combinatoria.

1 Introducción

En este artículo, encontramos dos fórmulas, a partir de identidades conocidas, que permiten, hallar el número de fichas y el número de puntos de un dominó, en función del doble más alto, de cualquier tamaño y se hace a través de sumas básicas, sin utilizar herramientas de Teoría Combinatoria, ver [1], pág. 34. Así como también se estudia un dominó de tres caras, de cualquier tamaño y encontramos una fórmula que permite calcular el número de fichas de este dominó en función de la terna más alta.

2 Notación y Resultados Básicos

Definición 2.1 Un multiconjunto M sobre un conjunto $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es un par (S, f) , donde f es una función de S en \mathbb{N} , \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y para cada $s \in S$, $f(s)$ se define como la multiplicidad de s en M .

Si $f(s) < \infty$ para todo $s \in S$, entonces

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

se denomina cardinalidad o número de elementos de M y se denota por $|M|$.

Comentario. Un multiconjunto es un objeto parecido a un conjunto. En este “conjunto” los elementos pueden repetirse.

Ejemplo 1. En el multiconjunto $M = \{2, 2, a, b, 1, a, 1, 3, 2\}$ el conjunto asociado a M es $S = \{2, a, b, 1, 3, \}$. En este caso $f(2) = 3$, $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(1) = 2$, $f(3) = 1$.

Definición 2.2 Dado $M = (S, f)$ un multiconjunto, un submulticonjunto M' de M es un par S, f' tal que f' es una función de S en \mathbb{N} y $f'(s) \leq f(s)$, para todo $s \in S$.

Definición 2.3 Un k -submulticonjunto de un multiconjunto M es un submulticonjunto de M con k elementos.

Definición 2.4 $\binom{M}{k}$ es la colección de todos los k -submulticonjuntos del multiconjunto M .

Definición 2.4 Sea $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Denotaremos por $M = \{a_1^\infty, a_2^\infty, \dots, a_n^\infty\}$ el multiconjunto donde cada elemento a_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) aparece repetido infinitas veces.

Definición 2.4 $\binom{n}{k}$ denota la cardinalidad de $\binom{M}{k}$ cuando $M = \{a_1^\infty, a_2^\infty, \dots, a_n^\infty\}$.

Proposición 2.5

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

3 Un Dominó cuya Ficha de Mayor Tamaño es Doble n.

El Dominó convencional, que se juega en Venezuela y en algunos otros países, consta de 28 fichas, cartas o piedras, combinadas a base de puntos, con un total de 168 puntos, con siete unos, siete doses, siete tres, siete cuatro, siete cinco, siete seis y siete blancos; y repartidos estos 168 puntos entre las 28 fichas dan un promedio de 6 puntos por ficha, teniendo cada una su complementaria y entre ambas por consiguiente han de sumar 12 puntos. Cada una de estas 28 fichas se puede asociar a un multiconjunto, $\{x, y\}$, con $x, y \in N_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En general, consideraremos $N_k = \{0, 1, 2, \dots, k : k \in \mathbb{N}\}$. Sea

$$D_6 = \{\{x, y\} : x, y \in N_6\},$$

definamos

$$S : D_6 \rightarrow N_{12}; S(\{x, y\}) = x + y.$$

Así,

$$\sum_{\{x, y\} \in D_6} S(\{x, y\}) = 168 = 6 \cdot 28.$$

Esto lo que nos está diciendo es que el número de puntos de un dominó convencional, es proporcional al producto del número de fichas y el número del doble mayor, es decir, el doble seis. Una pregunta curiosa que sale de esto, es: ¿qué pasa si agregamos a este dominó, las fichas correspondientes a los multiconjuntos, $\{0, 7\}$, $\{1, 7\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 7\}$, $\{6, 7\}$, $\{7, 7\}$? Obviamente, hemos agregado 8 piezas al dominó convencional. Así, el nuevo dominó tendría 36 fichas. En nuestra notación anterior tendríamos:

$$D_7 = \{\{x, y\} : x, y \in N_7\}.$$

Así,

$$\sum_{\{x, y\} \in D_7} S(\{x, y\}) = 252 = 7 \cdot 36.$$

Nuevamente, vemos que el número de puntos de un dominó D_7 , es proporcional al producto del número de fichas y el número del doble mayor, es decir, en este caso, el doble siete.

En general, si denotemos al dominó que llega hasta el doble n ; $n \in \mathbb{N}$ por

$$D_n = \{\{x, y\} : x, y \in N_n\}.$$

Luego, tenemos la siguiente afirmación, la cual se prueba, fácilmente por inducción.

AFIRMACIÓN 1.

El número de fichas de D_n , denotado por $N_{fichs.}(D_n)$ es $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, es decir,

$$N_{fichs.}(D_n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Una segunda afirmación, la cual también se prueba por inducción, es la siguiente:

AFIRMACIÓN 2. El número de puntos de D_n , denotado por $N_{punts.}(D_n)$

$$N_{punts.}(D_n) = \sum_{\{x,y\} \in D_n} S(\{x,y\}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

En general, hemos obtenido que el número de puntos de un dominó D_n , es proporcional al producto del número de fichas y el número del doble mayor, es decir, en este caso, el doble n .

Una idea para llegar a esta última fórmula es la siguiente:

Examinemos las fichas del dominó convencional, donde solamente aparecen aquellas asociadas a los multiconjuntos que poseen el seis, es decir,

$$\{0, 6\}, \{1, 6\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{6, 6\}.$$

Cada ficha consta de dos partes con puntos, así el 6 aparece en 8 de ellas luego, el 6 aporta la cantidad de

$$8 \cdot 6 \text{ puntos.}$$

De la misma manera el 5 aparece en 8 partes, luego, el 5 aporta la cantidad de

$$8 \cdot 5 \text{ puntos.}$$

Con el mismo análisis al 4, al 3 al 2, al 1 obtenemos:

$$\sum_{\{x,y\} \in D_6} S(\{x,y\}) = 8 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1,$$

equivalentemente,

$$\sum_{\{x,y\} \in D_6} S(\{x,y\}) = 8(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = (6 + 2) \sum_{i=1}^6 i = \frac{6(6+1)(6+2)}{2}.$$

4 Un Dominó de Tres Caras

Un dominó con tres caras puede ser generado al considerar algunas combinaciones de lanzar tres dados. Así, obtenemos los multiconjuntos asociados a cada ficha donde aparece el seis.

$$\begin{aligned} &\{6, 6, 6\}, \{6, 6, 5\}, \{6, 6, 4\}, \{6, 6, 3\}, \{6, 6, 2\}, \{6, 6, 1\}, \{6, 6, 0\} \\ &\{6, 5, 5\}, \{6, 5, 4\}, \{6, 5, 3\}, \{6, 5, 2\}, \{6, 5, 1\}, \{6, 5, 0\} \\ &\{6, 4, 4\}, \{6, 4, 3\}, \{6, 4, 2\}, \{6, 4, 1\}, \{6, 4, 0\} \\ &\{6, 3, 3\}, \{6, 3, 2\}, \{6, 3, 1\}, \{6, 3, 0\} \\ &\{6, 2, 2\}, \{6, 2, 1\}, \{6, 2, 0\} \\ &\{6, 1, 1\}, \{6, 1, 0\} \\ &\{6, 0, 0\}. \end{aligned}$$

El número de fichas donde aparece el 6 el es

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{7(7+1)}{2}.$$

Con el mismo análisis obtenemos que el número de fichas donde aparece el 5, el 4, el 3, el 2, el 1 y el 0 es $\frac{7(7+1)}{2}$. Nos interesa saber cuántas fichas posee en total este dominó. Observemos lo

siguiente, las fichas restantes donde aparece el 5, son:

$$\begin{aligned} &\{5, 5, 5\}, \{5, 5, 4\}, \{5, 5, 3\}, \{5, 5, 2\}, \{5, 5, 1\}, \{5, 5, 0\} \\ &\{5, 4, 4\}, \{5, 4, 3\}, \{5, 4, 2\}, \{5, 4, 1\}, \{5, 4, 0\} \\ &\{5, 3, 3\}, \{5, 3, 2\}, \{5, 3, 1\}, \{5, 3, 0\} \\ &\{5, 2, 2\}, \{5, 2, 1\}, \{5, 2, 0\} \\ &\{5, 1, 1\}, \{5, 1, 0\} \\ &\{5, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Y hay

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6(6+1)}{2}.$$

De manera análoga, el número restantes que involucran al 4, al 3, al 2, al 1, al 0, es

$$\frac{5(5+1)}{2}, \frac{4(4+1)}{2}, \frac{3(3+1)}{2}, \frac{2(2+1)}{2}, \frac{1(1+1)}{2}$$

respectivamente.

Luego el total de fichas es:

$$\begin{aligned} &\frac{7(7+1)}{2} + \frac{6(6+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{1(1+1)}{2} \\ &= 1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 84. \end{aligned}$$

Afirmación 3. Si denotamos por $D_n(3)$ un dominó de tres caras de tamaño n , entonces en número de fichas de dicho dominó, el cual denotaremos por $N_{fichs.}(D_n)$, viene dado por:

$$N_{fichs.}(D_n(3)) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\frac{n+2}{2}} (2j-1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} (2j)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como corolario de esta afirmación obtenemos

Corolario 4.1.

$$\binom{n}{3} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\frac{n+2}{2}} (2j-1)^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} (2j)^2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

5 Conclusión

El aporte de este trabajo es la obtención de otra fórmula para $\binom{n}{3}$, en función de identidades conocidas, sin usar Teoría Combinatoria, la cual está expresada en el corolario anterior.

Agradecimiento

Mis más sincero agradecimiento a los profesores José Radríguez y Roy Quintero por sus sugerencias y colaboración en la revisión de este trabajo.

Referencias

- 1.- J. Rodríguez , El Arte de Contar, Primera Edición, Kariña Editores, Mérida, Venezuela 1995.
- 2.- A. Tucker, Applied Combinatorics, Segunda Edición, Wwiley, New York,1984.
- 3.- H. Simosa, Ciencia y Arte en el Dominó, Séptima Edición, Publicaciones Seleven, Caracas Venezuela 1987.
- 4.- T.W. Hungerford, Algebra, Holt, Rhinehart and Winston,Inc.,1974

HANZEL LÁREZ

Departamento de Cálculo, Escuela Básica
 Facultad de Ingeniería,
 Universidad de Los Andes
 Mérida 5101, Venezuela
 e-mail: larez@ula.ve