Revista Notas de Matemática
Vol.3(1), No. 249, 2007, pp.13-31
http://www.matematica/ula.ve
Comisión de Publicaciones
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Digrafos no-derogatorios

Diego Bravo and Juan Rada

Abstract

Un digrafo D es no-derogatorio si su matriz de adyacencia es no-derogatoria, i.e, el polinomio característico de A es igual al polinomio minimal de A. Analizamos el problema de si la coalescencia de diabanicos y dirruedas es no-derogatoria. Se presenta una expresión para el polinomio característico de la coalescencia de dos digrafos. Encontramos una caracterización de los digrafos unicíclicos no-derogatorios en términos de condiciones de hamiltoniedad.

key words. nonderogatory digraphs, coalescence of digraphs

AMS(MOS) subject classifications. 05C50

1 Introducción

Un grafo dirigido o digrafo D es un conjunto no vacío de objetos llamados vértices, junto con un conjunto (posiblemente vacío) de pares ordenados de vértices diferentes de D, llamados arcos. El conjunto de vértices se denota por $V(D)$ y el conjunto de arcos por $E(D)$. Si $a = (x, y)$ es un arco de D entonces decimos que existe un arco desde x hasta y. Dos vértices x, y son adyacentes si existe un arco desde x hasta y o un arco desde y hasta x. Un camino de longitud l en un digrafo D desde el vértice u hasta el vértice v, es una sucesión de vértices

$$u = u_0, u_1, \ldots, u_l = v$$

(a veces denotada por $u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_l$), donde (u_{t-1}, u_t) es un arco de D para todo $1 \leq t \leq l$. Si $u = v$ decimos que el camino es cerrado y si además $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$, entonces el camino cerrado es un ciclo. Una trayectoria es un camino sin vértices repetidos.

Si A es la matriz de adyacencia de D entonces el polinomio característico de D es el polinomio característico de A y usualmente se denota por $\Phi_D(x)$. Es decir,

$$\Phi_D(x) = |xI - A|$$

donde I es la matriz identidad.

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, $\Phi_D(A) = 0$. El polinomio mónico de menor grado que anula a A se llama el polinomio minimal de D y lo denotaremos por $\mu_D(x)$. Recordamos que si

$$\Phi_D(x) = (x - \lambda_1)^{q_1} (x - \lambda_2)^{q_2} \cdots (x - \lambda_r)^{q_r}$$

donde $q_1, \ldots, q_r$ son enteros positivos entonces

$$\mu_D(x) = (x - \lambda_1)^{p_1} (x - \lambda_2)^{p_2} \cdots (x - \lambda_r)^{p_r}$$

donde $1 \leq p_i \leq q_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Si $\Phi_D(x) = \mu_D(x)$ entonces decimos que el digrafo D es no-derogatorio. En caso contrario, D es derogatorio.

Uno de los primeros artículos sobre el estudio de los digrafos no-derogatorios apareció en la literatura a principios de los años 70. El matemático A. Mowshowitz [6] demostró que el grupo de automorfismos $\Gamma(D)$ de un digrafo es abeliano y, como es bien sabido, $\Gamma(D)$ está relacionado con las simetrías del digrafo.

Los dicaminos P_n, los diciclos C_n y los molinos de viento $M_h(r)$ (con $r = 2$) son ejemplos de digrafos no-derogatorios ([2] y [7]). Otros ejemplos son los diabanicos F_n y las dirruedas W_n, que son considerados por Lam y Lim ([4] y [5]). En particular ellos trataron el problema de si el producto completo de digrafos no-derogatorios es no-derogatorio. Más recientemente ([3]), C.S. Gan mostró que el producto completo de diabanicos y dirruedas es no-derogatorio. Motivados por estos resultados, consideramos una operación bien conocida para digrafos, la llamada coalescencia de digrafos y, analizamos el problema de si la coalescencia de diabanicos y dirruedas es no-derogatoria.

Aunque el polinomio característico de la coalescencia de diabanicos y dirruedas se puede calcular directamente usando el Teorema de los Coeficientes para Digrafos ([1, Teorema 1.2]), presentamos en la Sección 2 una fórmula general para el polinomio característico de la coalescencia de dos digrafos.

Con el fin de estudiar el problema general, en las Secciones 4 y 5 nos proponemos investigar sobre posibles caracterizaciones de los digrafos no-derogatorios. El caso más sencillo es cuando el digrafo es acíclico, es decir, cuando el digrafo no tiene ciclos. Si D es un digrafo acíclico con n vértices entonces demostramos que D es no-derogatorio si, y sólo si, la matriz de adyacencia A satisface $A^{n-1} \neq 0$. Teniendo en cuenta que la entrada ij de la matriz A^{n-1} es precisamente el número de caminos en D de longitud $n - 1$, entonces llegamos a una primera caracterización de digrafos acíclicos no-derogatorios: D es no-derogatorio si, y sólo si, D contiene una trayectoria hamiltoniana.

2 Coalescencia de digrafos

Si D es un digrafo, denotamos el conjunto de vértices de D por V_D y el conjunto de arcos por E_D. Dado $u \in V_D$, el digrafo $D - u$ es el digrafo obtenido de D al eliminar el vértice u junto con los arcos conectados a u.

La definición de coalesencia de grafos (no dirigidos) ([1]) se puede extender a digrafos como sigue. La coalescencia de los digrafos D y H con respecto a los vérices $u \in V_D$ y $v \in V_H$, es el digrafo obtenido a partir de D y H identificando los vértices u y v como w. Más formalmente,

Definición 2.1 *Sean D y H dos digrafos tales que $u \in V_D$ y $v \in V_H$. La coalescencia de los digrafos D y H con respecto a los vértices u, v, denotada por $D \cdot H$ es el digrafo obtenido a partir de D y H que tiene como conjunto de vértices*

$$V_{D \cdot H} = V_{D-u} \cup V_{H-v} \cup \{w\}$$

y dos vértices en $D \cdot H$ son adyacentes, si son adyacentes en D ó H, o si uno es w y el otro es adyacente a u o v en D ó H.

La fórmula para calcular el polinomio característico de la coalescencia de dos grafos no dirigidos [1, P. 159] también se cumple para digrafos, como lo podemos ver en el Teorema 2.3. Primero necesitamos un resultado técnico acerca del determinante de una matriz por bloques.

Lema 2.2 *Sea $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Considere la matriz por bloques*

$$D = \begin{pmatrix} A & y & 0 \\ \widetilde{y} & r & \widetilde{w} \\ 0 & w & B \end{pmatrix}$$

donde y es un vector columna de $\mathbb{C}^p$, $\widetilde{y}$ es un vector fila de $\mathbb{C}^p$, w es un vector columna de $\mathbb{C}^q$, $\widetilde{w}$ es un vector fila de $\mathbb{C}^q$ y $r \in \mathbb{C}$. Si

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & y \\ \widetilde{y} & r \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{B} = \begin{pmatrix} r & \widetilde{w} \\ w & B \end{pmatrix}$$

entonces

$$|D| = \left|\widetilde{A}\right| |B| + \left|\widetilde{B}\right| |A| - r\,|A|\,|B|$$

Demostración. Asumimos que $D = (d_{ij})$. Por la expansión Laplaciana por menores, a lo largo de la primera fila,

$$|D| = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j}\, d_{1j} M_{1j}$$

donde para cada $1 \leq j \leq p$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} A_j^* & y^* & 0^* \\ \widetilde{y}_j & r & \widetilde{w} \\ 0_j & w & B \end{vmatrix} \text{ y } M_{1,p+1} = \begin{vmatrix} A^* & 0^* \\ \widetilde{y} & \widetilde{w} \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^* \\ \widetilde{y} \end{vmatrix} |B|$$

donde "*" significa que eliminamos la primera fila y el subíndice j significa que eliminamos la j-ésima columna. Un argumento inductivo implica que

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} A_j^* & y^* \\ \widetilde{y}_j & r \end{vmatrix} \left| \, B \, \right| + \left|\widetilde{B}\right| \left| \, A_j^* \, \right| - r \left| \, A_j^* \, \right| \left| \, B \, \right|$$

El resultado se sigue del hecho que

$$\left|\widetilde{A}\right| = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{1+j} d_{1j} \begin{vmatrix} A_j^* & y^* \\ \widetilde{y}_j & r \end{vmatrix} + (-1)^{2+p} d_{1,p+1} \begin{vmatrix} A^* \\ \widetilde{y} \end{vmatrix}$$

y

$$|A| = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{1+j} d_{1j} \left|A_j^*\right|$$

■

Ahora podemos calcular el polinomio característico de la coalescencia $D \cdot H$ de los digrafos D y H.

Teorema 2.3 *Sean D y H dos digrafos tales que $u \in V_D$ y $v \in V_H$. Si $D \cdot H$ es la coalescencia de los digrafos D y H con respecto a los vértices u, v entonces*

$$\Phi_{D \cdot H} = \Phi_D \Phi_{H-v} + \Phi_H \Phi_{D-u} - x \Phi_{D-u} \Phi_{H-v}$$

Demostración. Ordenamos los vértices de $D \cdot H$ como

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_p = u = v = v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q-1}\}$$

donde $V_D = \{u_1, \ldots, u_p = u\}$ and $V_H = \{v = v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q-1}\}$. Sea $\mathbf{0}_{j,k}$ la $j \times k$ matriz con 0 en todas las entradas. Entonces la matriz de adyacencia de $D \cdot H$ con respecto a u, v es de la forma

$$A_{D \cdot H} = \begin{pmatrix} A_{D-u} & y & \mathbf{0}_{p-1,q-1} \\ \widetilde{y} & 0 & \widetilde{w} \\ \mathbf{0}_{q-1,p-1} & w & A_{H-v} \end{pmatrix}$$

donde

$$A_D = \begin{pmatrix} A_{D-u} & y \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A_H = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{w} \\ w & A_{H-v} \end{pmatrix}$$

son las matrices de adyacencia de$D$ y H, respectivamente. Notemos que $y \in \mathbb{C}^{p-1}$ es un vector columna cuya j-ésima coordenada es 1 si existe un arco de u_j a u y 0 en otro caso. Por otra parte, $\widetilde{y} \in \mathbb{C}^{p-1}$ es un vector fila cuya j-ésima coordenada es 1 si existe un arco de u a u_j y 0 en otro caso. Similarmente para $w, \widetilde{w} \in \mathbb{C}^{q-1}$. Se sigue del Lema 2.2 que

$$
\begin{aligned}
|xI - A_{D\cdot H}| &= \begin{vmatrix} xI - A_{D-u} & -y & 0 \\ -\widetilde{y} & x & -\widetilde{w} \\ 0 & -w & xI - A_{H-v} \end{vmatrix} \\
&= |xI - A_D|\,|xI - A_{H-v}| + |xI - A_H|\,|xI - A_{D-u}| \\
&\quad -x\,|xI - A_{D-u}|\,|xI - A_{H-v}| \\
&= \Phi_D \Phi_{H-v} + \Phi_H \Phi_{D-u} - x\Phi_{D-u}\Phi_{H-v}
\end{aligned}
$$

■

3 Coalescencia de diabanicos y dirruedas

En esta sección consideramos el problema de si la coalescencia de diabanicos y dirruedas es no-derogatorio. Recordemos las siguientes definiciones:

- **Dicamino** P_n
  El *dicamino* P_n es el digrafo con conjunto de vértices $\{1, ..., n\}$ y arcos $(i, i+1)$ para $i = 1, ...n-1$.

- **Diciclo** C_n
  El *diciclo* C_n es el digrafo con conjunto de vértices $\{1, ..., n\}$ y arcos $(i, i+1)$ para $i = 1, ...n-1$, y $(n, 1)$.

- **Diabanico** F_n
  El *diabanico* F_n es el digrafo que consiste de un dicamino P_{n-1} de $n-1$ vértices $1, 2, ..., n-1$ y un vértice adicional n, desde el cual hay un arco hasta cada uno de los vértices de P_{n-1}. El vértice n se llama foco del diabanico F_n y los vértices con etiquetas $i = 1, ..., n-1$ son llamados vértices rin del diabanico.

- **Dirrueda** W_n
  La *dirrueda* W_n consiste del diciclo C_{n-1} con arcos adicionales desde un vértice adicional n hasta cada uno de los vértices en C_{n-1}. El vértice n se llama foco de la dirrueda W_n y los vértices con etiquetas $i = 1, ..., n-1$ son llamados vértices rin de la dirrueda.

Los polinomios característicos de estos digrafos son bien conocidos:

$$\begin{aligned}\Phi_{P_n}(x) &= x^n\\ \Phi_{C_n}(x) &= x^n-1\\ \Phi_{F_n}(x) &= x^n\\ \Phi_{W_n}(x) &= x^n-x\end{aligned}$$

Nos apoyaremos fuertemente en el siguiente resultado bastante conocido de la teoría algebraica de grafos. ([1, Teorema 1.9]).

Teorema 3.1 *Sea A la matriz de adyacencia del digrafo D con conjunto de vértices $V(D) = \{1,\ldots,n\}$. Si $a_{ij}^{(k)}$ denota la entrada ij de la matriz A^k, entonces $a_{ij}^{(k)}$ es igual al número de caminos de longitud k desde el vértice i hasta el vértice j.*

Teorema 3.2 *La coalescencia $F_r \cdot W_s$ con respecto al foco u del diabanico y al foco v de la dirrueda es no-derogatoria.*

Demostración. Se sigue, del ejemplo anterior que el polinomio característico de $F_r \cdot W_s$ es,

$$\Phi_{F_r\cdot W_s} = x^r(x^{s-1}-1)$$

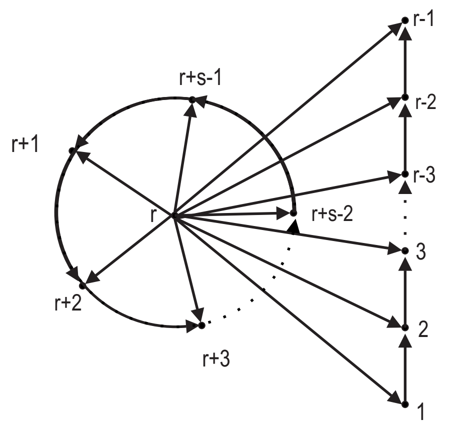
Por lo tanto, el polinomio minimal es de la forma

$$\mu_{F_r\cdot W_s} = x^k\left(x^{s-1}-1\right)$$

para algún $1 \leq k \leq r$. Mostraremos que $A^{r-1}\left(A^{s-1}-I\right) \neq 0$ o equivalentemente, $A^{r+s-2} \neq A^{r-1}$. Para ver esto, notemos que existe un único camino

$$r \to 1 \to 2 \to \cdots \to r-2 \to r-1$$

de longitud $r-1$ en $F_r \cdot W_s$ desde el vértice r a $r-1$. Así, $a_{r,r-1}^{(r-1)} = 1$. Por otro lado, es claro que no hay caminos de r a $r-1$ de longitud $r+s-2$. Por tanto, $a_{r,r-1}^{(r+s-2)} = 0$. En consecuencia, $\mu_{F_r\cdot W_s} = \Phi_{F_r\cdot W_s}$ y $F_r \cdot W_s$ es no-derogatorio. ∎



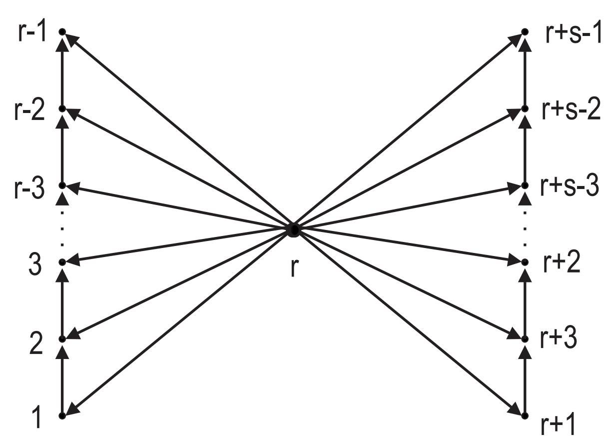
Coalescencia $F_r \cdot W_s$

Teorema 3.3 *La coalescencia $F_r \cdot F_s$ con respecto al foco r de F_r y al foco s de F_s es derogatoria.*

Demostración. El polinomio característico de $F_r \cdot F_s$ esta dado por

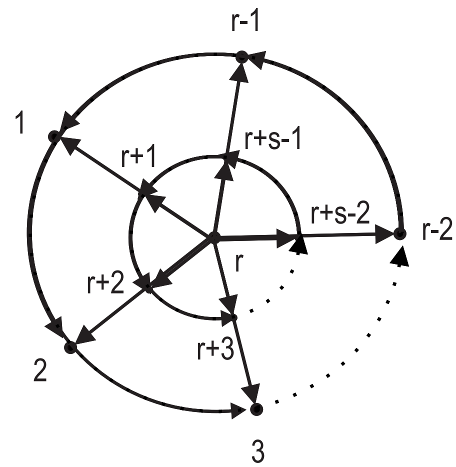
$$\begin{aligned}\Phi_{F_r \cdot F_s} &= \Phi_{F_r}\Phi_{P_{s-1}} + \Phi_{F_s}\Phi_{P_{r-1}} - x\Phi_{P_{s-1}}\Phi_{P_{r-1}} \\ &= x^r x^{s-1} + x^s x^{r-1} - x x^{s-1} x^{r-1} = x^{r+s-1}\end{aligned}$$

Como el camino de mayor longitud en $F_r \cdot F_s$ tiene longitud $\gamma = \max\{r-1, s-1\}$ entonces $A^\gamma \neq 0$ and $A^{\gamma+1} = 0$. En consecuencia, $\mu_{F_r \cdot F_s} = x^{\gamma+1} \neq x^{r+s-1} = \Phi_{F_r \cdot F_s}$ y $F_r \cdot F_s$ es derogatorio. ■



Coalescencia $F_r \cdot F_s$

Teorema 3.4 *La coalescencia $W_r \cdot W_s$ con respecto a los focos r y s de W_r y W_s, respectivamente es derogatoria.*



Coalescencia $W_r \cdot W_s$

Demostración. El polinomio característico de $W_r \cdot W_s$ esta dado por

$$\begin{aligned}
\Phi_{W_r \cdot W_s} &= \Phi_{W_r}\Phi_{C_{s-1}} + \Phi_{W_s}\Phi_{C_{r-1}} - x\Phi_{C_{s-1}}\Phi_{C_{r-1}} \\
&= (x^r - x)\left(x^{s-1} - 1\right) + (x^s - x)\left(x^{r-1} - 1\right) - x\left(x^{s-1} - 1\right)\left(x^{r-1} - 1\right) \\
&= x\left(x^{r-1} - 1\right)\left(x^{s-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

Introduzcamos alguna notación: denotamos por X e Y las matrices de adyacencia de los ciclos C_{r-1} y C_{s-1}, respectivamente. Sea J_k que denota la matriz $1 \times k$ con 1 en todas las entradas. Entonces la matriz de adyacencia A de $W_r \cdot W_s$ esta dada por la matriz por bloques

$$A = \begin{pmatrix} 0 & J_{r-1} & J_{s-1} \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & X & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & Y \end{pmatrix}$$

Como $J_{r-1}X = J_{r-1}$ y $J_{s-1}Y = J_{s-1}$, se puede ver fácilmente, usando inducción, que para todo entero $k \geq 1$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & J_{r-1} & J_{s-1} \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & X^k & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & Y^k \end{pmatrix} \tag{1}$$

Considere los dos casos:

(a) $r = s$. En este caso $\Phi_{W_r \cdot W_r} = x\left(x^{r-1} - 1\right)^2$. Sea $f(x) = x\left(x^{r-1} - 1\right)$. Como $X^{r-1} = I$ se sigue que

$$A^r = A^{r-1}A = \begin{pmatrix} 0 & J_{r-1} & J_{s-1} \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & I & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & I \end{pmatrix} A = A$$

y así

$$f(A) = A\left(A^{r-1} - I\right) = A^r - A = 0$$

lo que implica que $\mu_{W_r \cdot W_r} = x\left(x^{r-1} - 1\right)$.

(b) $r \neq s$. Supongamos $r < s$. Claramente,

$$\Phi_{W_r \cdot W_s} = x\left(x^{r-1} - 1\right)(x - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{s-2}\right)$$

Sea $g(x) = x\left(x^{r-1} - 1\right)\left(1 + x + \cdots + x^{s-2}\right)$. Como $Y^{s-1} = I$ se sigue que

$$Y^{r-1}\sum_{k=1}^{s-1} Y^k = Y^r + Y^{r+1} + \cdots + Y^{s-1} + Y + Y^2 + \cdots + Y^{r-1} = \sum_{k=1}^{s-1} Y^k$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & A^{r-1}\sum_{k=1}^{s-1} A^k = \\ = \; & \begin{pmatrix} 0 & J_{r-1} & J_{s-1} \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & I & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & Y^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (s-1)J_{r-1} & (s-1)J_{s-1} \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & \sum_{k=1}^{s-1} X^k & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & \sum_{k=1}^{s-1} Y^k \end{pmatrix} \\ = \; & \begin{pmatrix} 0 & J_{r-1}\sum_{k=1}^{s-1} X^k & J_{s-1}\sum_{k=1}^{s-1} Y^k \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & \sum_{k=1}^{s-1} X^k & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & Y^{r-1}\sum_{k=1}^{s-1} Y^k \end{pmatrix} \\ = \; & \begin{pmatrix} 0 & (s-1)J_{r-1} & (s-1)J_{s-1} \\ \mathbf{0}_{r-1,1} & \sum_{k=1}^{s-1} X^k & \mathbf{0}_{r-1,s-1} \\ \mathbf{0}_{s-1,1} & \mathbf{0}_{s-1,r-1} & \sum_{k=1}^{s-1} Y^k \end{pmatrix} \\ = \; & \sum_{k=1}^{s-1} A^k \end{aligned}$$

Luego,

$$g(A) = \left(A^{r-1} - I\right)\left(\sum_{k=1}^{s-1} A^k\right) = A^{r-1}\left(\sum_{k=1}^{s-1} A^k\right) - \sum_{k=1}^{s-1} A^k = 0$$

y así, $\mu_{W_r \cdot W_s} \neq \Phi_{W_r \cdot W_s}$. En ambos casos, $W_r \cdot W_s$ es derogatotio. ■

Observación 3.5 *En la demostración del Teorema 3.4 se mostró que* $\mu_{W_r \cdot W_s} \neq \Phi_{W_r \cdot W_s}$ *en el caso* $r \neq s$. *En realidad, podemos determinar el polinomio minimal de* $W_r \cdot W_s$ *en este caso. Si* $d = mcd(r-1, s-1)$ *entonces* $\Phi_{W_r \cdot W_s}$ *tiene exactamente* d *raices repetidas. En particular, si* $d = 1$ *entonces*

$$\mu_{W_r \cdot W_s} = g(x) = x\left(x^{r-1} - 1\right)\left(1 + x + \cdots + x^{s-2}\right)$$

Suponga que $d \geq 2$. *Claramente* $\Phi_{W_r \cdot W_s}$ *tiene exactamente* $r+s-1-d$ *raices distintas. Considere el polinomio de grado* $(r+s-1-d)$

$$h(x) = -\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{d}-1} x^{1+id} + \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{d}-1} x^{r+s-1-d(1+j)}$$

No es dificil mostrar que para cada $0 \leq i \leq \frac{r-1}{d} - 1$ *existe un único* $0 \leq j \leq \frac{r-1}{d} - 1$ *tal que*

$$X^{1+id} = X^{r+s-1-d(1+j)}$$

Similarmente para Y. *En consecuencia,* $h(X) = h(Y) = 0$ *lo que implica de la relación (1), que* $h(A) = 0$. *Así* $h(x) = \mu_{W_r \cdot W_s}$.

Por ejemplo,

$$\Phi_{W_9 \cdot W_{13}} = x\left(x^8 - 1\right)\left(x^{12} - 1\right)$$

y

$$\mu_{W_9 \cdot W_{13}} = -x - x^5 + x^{13} + x^{17}$$

Como $r = 9$ *y* $s = 13$, $X^8 = I$ *y* $Y^{12} = I$, *donde* X *y* Y *son las matrices de adyacencia de* C_8 *y* C_{12}, *respectivamente. Notemos que*

$$X^{13} = X^5\ ,\ X^{17} = X$$

y

$$Y^{13} = Y\ ,\ Y^{17} = Y^5$$

4 Digrafos acíclicos no-derogatorios

El grado de salida de un vértice x, denotado por $od\,(x)$, es el número de arcos en D de la forma (x, y). Análogamente, el grado de entrada de x es el número de arcos de la forma (y, x) en D. Usualmente se denota por $id\,(x)$. Un subdigrafo lineal L de D es un subdigrafo de D en el que $id\,(x) = od\,(x) = 1$ para todo vértice x de D; en otras palabras, sus componentes son ciclos. El teorema de los coeficientes para digrafos, relaciona los coeficientes del polinomio característico de un digrafo D con el conjunto de subdigrafos lineales de D. ([1, Teorema 1.2]).

Teorema 4.1 *Sea*

$$\Phi_D\,(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

el polinomio característico del digrafo D. Entonces para cada $i = 1, \ldots, n$

$$a_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)} \tag{2}$$

donde $\mathcal{L}_i$ es el conjunto de todos los subdigrafos lineales L de D con exactamente i vértices; $p\,(L)$ denota el número de componentes de L (i.e., el número de ciclos que tiene L)

Si D es un digrafo acíclico (i.e. un digrafo sin ciclos) con n vértices entonces por el Teorema 4.1, el polinomio característico de D es simplemente $\Phi_D = x^n$. Por lo tanto, D es no-derogatorio si, y sólo si, $A^{n-1} \neq 0$. Ahora bien, como la entrada uv de la matriz potencia A^{n-1} es precisamente el número de caminos en D de longitud $n-1$ de u a v (por el Teorema 3.1), se tiene la siguiente

Proposición 4.2 *Sea D un digrafo acíclico con n vértices. Los siguientes son equivalentes:*

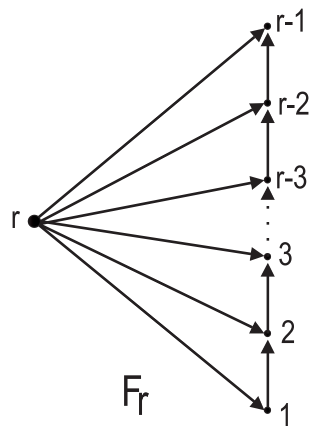
1. *D es un digrafo no-derogatorio*
2. *Existe un camino π en D de longitud $n-1$*

Una trayectoria generadora en un digrafo D se llama *trayectoria hamiltoniana* . Un digrafo *hamiltoniano por trayectorias*, es un digrafo que contiene una trayectoria hamiltoniana.

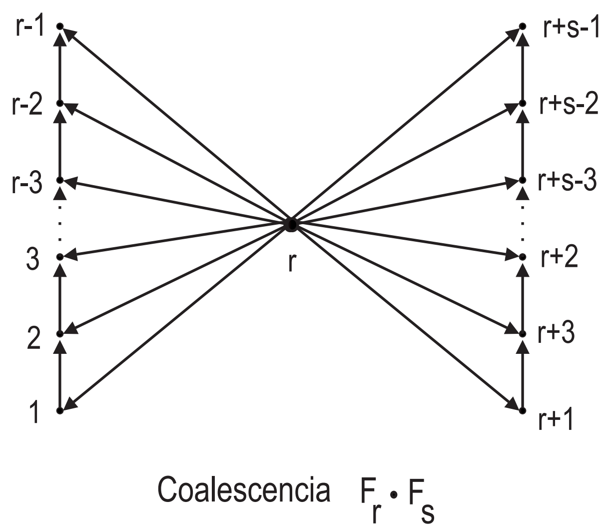
Notemos que un camino de longitud $n-1$, en un digrafo D acíclico de n vértices, es una trayectoria hamiltoniana. Luego, como consecuencia de la proposición 4.2, obtenemos el siguiente

Corolario 4.3 *Sea D un digrafo acíclico. Entonces D es no-derogatorio si, y sólo si, D es hamiltoniano por trayectorias.*

Ejemplo 4.4 *(i) Considere el diabanico F_r. Este digrafo es acíclico. Notemos que $r \to 1 \to 2 \to \cdots \to r-2 \to r-1$ es una trayectoria hamiltoniana de F_r. Por el corolario 4.3, F_r es no-derogatorio, como se obtuvo en la sección 2.1.*



(ii) Ahora, considere la coalescencia $F_r \cdot F_s$



Este digrafo acíclico no contiene trayectorias hamiltonianas. Luego, de nuevo por el corolario 4.3, $F_r \cdot F_s$ es derogatorio, tal como se obtuvo en el Teorema 3.3.

Es natural preguntarse cuándo un digrafo que tenga ciclos es no-derogatorio. El objetivo de la siguiente sección es caracterizar los digrafos ***unicíclicos*** no-derogatorios, (i.e., digrafos no-derogatorios que tienen exactamente un ciclo).

5 Digrafos unicíclicos no-derogatorios

Recordemos que un ciclo C de longitud r en un digrafo D, es una sucesión de vértices $v_1, \ldots, v_r$ de D y arcos (v_i, v_{i+1}), $i = 1, \ldots, r-1$, y (v_r, v_1).

En lo que sigue, D es un digrafo con n vértices y ciclo único C de longitud $r \geq 2$. Del teorema 4.1 el polinómio caracterísitico de D esta dado por

$$\Phi_D = x^n - x^{n-r} = x^{n-r}(x^r - 1)$$

Como $x^r - 1$ es un producto de factores lineales distintos, el polinomio minimal μ_D tiene la forma

$$\mu_D = x^p (x^r - 1)$$

donde $1 \leq p \leq n - r$. Por lo tanto, D es un digrafo no-derogatorio si y sólo si

$$A^{n-r-1}(A^r - I) \neq 0$$

o en forma equivalente,

$$A^{n-1} \neq A^{n-r-1}$$

Sea $D_p(u,v)$ el conjunto de caminos en D de longitud p desde el vértice u al vértice v. Sabemos por el Teorema 3.1 que la entrada uv de la matriz potencia A^p es precisamente $|D_p(u,v)|$, donde $|X|$ denota la cardinalidad del conjunto X. Así, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 5.1 *Sea D un digrafo con n vértices y ciclo único C de longitud $r \geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *D es un digrafo no-derogatorio;*
2. *Existen $u, v \in V_D$ tales que $|D_{n-1}(u,v)| \neq |D_{n-r-1}(u,v)|$.*

En los siguientes resultados se presenta una descripción más clara de la condición 2 en la proposición 5.1.

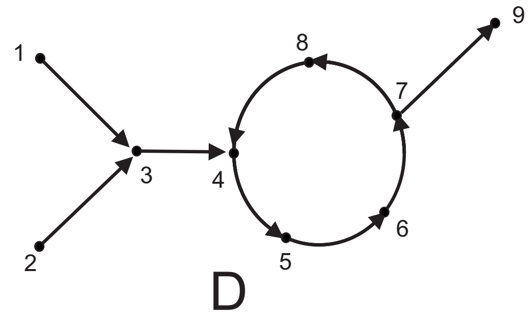
Supongamos que $\{x_1, \ldots, x_r\}$ son los vértices de C, (x_i, x_{i+1}), $i = 1, \ldots, r-1$, y (x_r, x_1) son los arcos de C. Para cada $1 \leq j \leq r$, sea $C(x_j)$ un camino cerrado $x_j \cdots x_r x_1 \cdots x_j$. Definamos

$$D_{n-1}^{\circ}(u,v) = \{\pi \in D_{n-1}(u,v) : \pi \text{ contiene } C(x_j) \text{ para algún } x_j \ (1 \leq j \leq r)\}$$

y

$$D_{n-r-1}^{*}(u,v) = \{\pi \in D_{n-r-1}(u,v) : \pi \text{ contiene } x_j \text{ para algún } x_j \ (1 \leq j \leq r)\}$$

Ejemplo 5.2 *Considere el digrafo D con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y arcos $E = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 4), (7, 9)\}$.*



D es un digrafo con único ciclo $C = 4, 5, 6, 7, 8, 4$ de longitud 5. Notemos además que, no existen trayectorias hamiltonianas en D. Sea $\pi = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 4, 5$. π tiene longitud 8, comienza en el vértice 1, termina en el vértice 5 y contiene a $C(4)$ y $C(5)$. Luego, $\pi \in D_8^{\circ}(1, 5)$. Mientras que por ejemplo, $D_8^{\circ}(8, 9) = \emptyset$. Por otra parte, sea $\sigma = 2, 3, 4, 5$. σ tiene longitud 3, contiene a los vértices 4 y 5, que están en C, comienza en el vértice 2 y termina en el vértice 5. Asi, $\sigma \in D_3^{\circ}(2, 5)$. Cualquier camino de longitud 3 entre vértices u y v de D pertenece a $D_3^{\circ}(u, v)$.

Lema 5.3 *Sea D un digrafo con n vértices y ciclo único C de longitud $r \geq 2$. Entonces $\left|D_{n-1}^{\circ}(u, v)\right| = \left|D_{n-r-1}^{*}(u, v)\right|$ para todo $u, v \in V_D$.*

Demostración. Notemos que $\pi = u \cdots x_j \cdots v \in D_{n-r-1}^{*}(u, v)$ si y sólo si $\overline{\pi} = u \cdots C(x_j) \cdots v \in D_{n-1}^{\circ}(u, v)$, donde j es un entero tal que x_j es el primer vértice de π que está en C.

Por lo tanto, la función $\Phi : D_{n-r-1}^{*}(u, v) \rightarrow D_{n-1}^{\circ}(u, v)$ definida como $\Phi(\pi) = \overline{\pi}$, está bien definida y claramente es biyectiva. ■

En particular, $D_{n-r-1}^{*}(u, v) = \emptyset$ si y sólo si $D_{n-1}^{\circ}(u, v) = \emptyset$ y en este caso,

$$\left|D_{n-1}^{\circ}(u, v)\right| = \left|D_{n-r-1}^{*}(u, v)\right| = 0.$$

Sea $D - C$ el digrafo obtenido de D al eliminar los vértices de C y los arcos incidentes a el. Si $D - C$ es hamiltoniano por trayectorias, entonces su estructura es muy simple, como se puede ver en el siguiente resultado.

Proposición 5.4 *Sea Ω un digrafo hamiltoniano por trayectorias acíclico con n vértices. Entonces, Ω se obtiene de $P_n : u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_n$ al añadir algunos arcos de la forma $u_j \rightarrow u_k$, donde $k > j$.*

Demostración. Sea $\pi : u_1 \overset{a_1}{\to} u_2 \overset{a_2}{\to} \cdots \overset{a_{n-1}}{\to} u_n$ una trayectoria generadora de Ω y supongamos que $u_j \overset{b}{\to} u_k$ pertenece a Ω, donde $k < j$. Entonces,

$$u_k \overset{a_k}{\to} \cdots \overset{a_{j-1}}{\to} u_j \overset{b}{\to} u_k$$

es un ciclo en Ω, lo cual es una contradicción. ■

En particular, un digrafo hamiltoniano por trayectorias acíclico Ω tiene una única trayectoria hamiltoniana: comienza en el único vértice de grado incidente 0 y termina en el único vértice con grado salida 0 de Ω.

Lema 5.5 *Sea D un digrafo con n vértices y ciclo único C de longitud $r \geq 2$. Entonces,*

1. *$D_{n-1}(u,v) \setminus D^{\circ}_{n-1}(u,v)$ es el (posiblemente vacio) conjunto de trayectorias hamiltonianas de D desde u a v;*

2. *$D_{n-r-1}(u,v) \setminus D^{*}_{n-r-1}(u,v)$ es el (posiblemente vacio) conjunto de trayectorias hamiltonianas de $D - C$ de u a v.*

Demostración.
1. Claramente, una trayectoria hamiltoniana de D desde u a v es una trayectoria de longitud $n-1$ que no contiene C. Por el contrario, suponga que $\pi \in D_{n-1}(u,v) \setminus D^{\circ}_{n-1}(u,v)$. Entonces π es la trayectoria de longitud $n-1$ desde u a v que no contiene al ciclo C. Ya que C es un ciclo único de D, entonces claramente π es una trayectoria generadora de D desde u a v. 2. Primero nótese que $D - C$ es un digrafo con $n - r$ vértices. Es claro que cada trayectoria hamiltoniana en $D - C$ pertenece a $D_{n-r-1}(u,v) \setminus D^{*}_{n-r-1}(u,v)$. Por el contrario, si $\sigma \in D_{n-r-1}(u,v) \setminus D^{*}_{n-r-1}(u,v)$ entonces, σ es una trayectoria en $D - C$ de longitud $n - r - 1$. Ya que $D - C$ es acíclico se sigue que σ es una trayectoria hamiltoniana en $D - C$. ■

Para todo $u, v \in V_D$ definimos

$$h^{\circ}(u,v) = \left| D_{n-1}(u,v) \setminus D^{\circ}_{n-1}(u,v) \right|$$

y

$$h^{*}(u,v) = \left| D_{n-r-1}(u,v) \setminus D^{*}_{n-r-1}(u,v) \right|$$

Por el lema 5.5, $h^{\circ}(u,v)$ (resp. $h^{*}(u,v)$) es el número de trayectorias hamiltonianas en D (resp. $D - C$) desde el vértice u al vértice v.

Ahora, podemos caracterizar los digrafos unicíclicos no-derogatorios en términos de condiciones de hamiltoniedad. Se distinguen dos casos: (a) $D - C$ es hamiltoniano por trayectorias y, por lo tanto, $D-C$ tiene la forma dada en la Proposición 5.4; (b) $D-C$ no es hamiltoniano por trayectorias.

Teorema 5.6 *Sea D un digrafo con n vértices y ciclo único C de longitud $r \geq 2$.*

1. *Si $D-C$ no es hamiltoniano por trayectorias entonces*

$$D \text{ es no-derogatorio} \Leftrightarrow D \text{ es de hamiltoniano por trayectorias}$$

2. *Si $D-C$ es hamiltoniano por trayectorias con un única trayectoria hamiltoniana de u a v entonces,*

$$D \text{ es no-derogatorio} \Leftrightarrow h^{\circ}(u,v) \neq 1$$

Demostración. Por la Proposición 5.1, D es no-derogatorio si, y sólo si, existen $u,v \in V_D$ tales que $|D_{n-1}(u,v)| \neq |D_{n-r-1}(u,v)|$. Notemos que $D_{n-1}(u,v)$ y $D_{n-r-1}(u,v)$ pueden ser expresados como uniones disjuntas

$$D_{n-1}(u,v) = D^{\circ}_{n-1}(u,v) \cup \left[D_{n-1}(u,v) \backslash D^{\circ}_{n-1}(u,v)\right]$$

y

$$D_{n-r-1}(u,v) = D^{*}_{n-r-1}(u,v) \cup \left[D_{n-r-1}(u,v) \backslash D^{*}_{n-1}(u,v)\right]$$

Se sigue del Lema 5.3 que

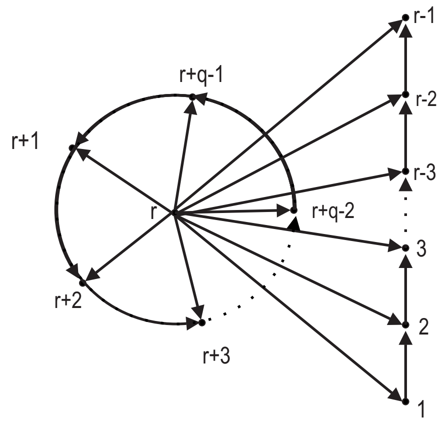
$$D \text{ es no-derogatorio} \Leftrightarrow \ h^{\circ}(u,v) \neq h^{*}(u,v) \ \text{ para algunos } u,v \in V_D \tag{3}$$

1. Asuma que $D-C$ no es hamiltoniano por trayectorias. Entonces, $h^{*}(u,v)=0$ para todo $u,v \in V_D$. Se sigue de (3) y el lema 5.5 que

$$\begin{aligned} D \text{ es no-derogatorio} \quad &\Leftrightarrow \quad h^{\circ}(u,v) \neq 0 \text{ para algunos } u,v \in V_D \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ es una trayectoria hamiltoniana} \end{aligned}$$

2. Asuma que $D-C$ es hamiltoniano por trayectorias con un única trayectoria hamiltoniana desde el vértice u al vértice v. Entonces, $h^{*}(u,v)=1$ y $h^{*}(w,z)=0$ para todos los otros vértices w y z en V_D. Se sigue de (3) que si $h^{\circ}(u,v) \neq 1$ entonces D es no-derogatorio. Ahora, asuma que $h^{\circ}(u,v)=1$. Demostraremos que $h^{\circ}(w,z)=0$ para todos los demas vértices w y z en V_D, lo que implica que D es derogatorio. En efecto, sea π una trayectoria hamiltoniana en D de u a v y σ una trayectoria hamiltoniana en D de w a z. Si $w \neq u$, existe un arco $w' \to u$ en D. Como π induce un camino de u a w', entonces se forma un ciclo en D diferente de C. Esto es una contradicción. De manera similar, $z=v$. ■

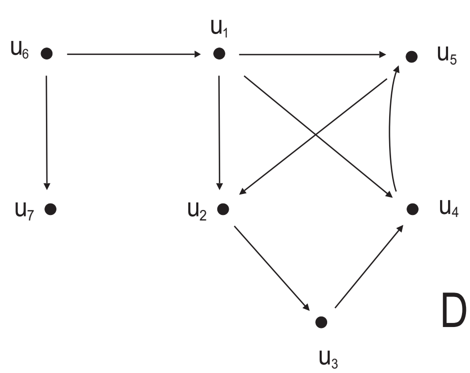
Ejemplo 5.7 *Considere la coalescencia $F_r \cdot W_q$ de los digrafos F_r y W_q por el foco de ambos.*



Coalescencia $F_r \cdot W_q$

$F_r \cdot W_q$ es unicíclico con único cíclo $C = r+1, r+2, \cdots, r+q-2, r+q-1, r+1$. Notemos que, $F_r \cdot W_q - C = F_r$, el cual es hamiltoniano por trayectorias. Además, $h^\circ(u, v) = 0$. Por tanto, por el Teorema 5.6, $F_r \cdot W_q$ es no-derogatorio, resultado obtenido en el Teorema 3.2.

Ejemplo 5.8 *Considere el digrafo D con vértices $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ y arcos $E(D) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_5), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_6, u_1), (u_6, u_7)\}$.*



Por el Teorema 4.1, el polinomio característico de D es,

$$\Phi(x) = x^7 - x^3$$

Después de hacer cálculos algo tediosos, resulta que el polinomio minimal es,

$$\mu(x) = x^6 - x^2$$

Mostrando que D es derogatorio. Notemos, por otra parte, que D tiene un único ciclo $C = u_5, u_2, u_3, u_4, u_5$ de longitud 4. Fácilmente se observa que $D - C$ no es hamiltoniano por trayectorias y tampoco lo es D. Luego, por el Teorema 5.6, D es derogatorio.

Agradecimientos

Apoyo financiero fue recibido por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad de Los Andes (CDCHT, C-13490505B).

References

[1] D.M. Cvetković, M. Doob y H. Sachs, *Spectra of graphs.* Academic Press, New York 1980.

[2] C.S. Gan y V.C. Koo, On annihilating uniqueness of directed windmills, Proceedings of the ATCM (ATCM 2002), Melaka, Malaysia.

[3] C.S. Gan, The complete product of annihilatingly unique digraphs, Int. J. Math. Math. Sci. 2005, no. 9, 1327-1331.

[4] K.S. Lam, On digraphs with unique annihilating polynomial, Ph.D. Thesis, University of Malaya, Kuala Lumpur, 1990.

[5] K.S. Lam y C.K. Lim, The characteristic polynomial of ladder digraph and an annihilating uniqueness theorem, Discrete Mathematics 151, (1996) 161-167.

[6] A. Mowshowitz, Graphs, groups and matrices. Proc. Canad. Math. Congr., 1971. 509-522.

[7] J. Rada, Nonderogatory directed windmills, submitted.

[8] N. Biggs, *Algebraic graph theory.* Cambridge University Press, 1993.

[9] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra.* SIAM (2000)

DIEGO BRAVO
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: dbravo@ula.ve

JUAN RADA
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: juanrada@ula.ve