NOTAS DE MATEMATICA

Nº 6

"UN TEOREMA DE DISCONJUGACION PARA ECUACIONES CUASIDIFERENCIALES"

POR

R. MANASEVICH A. TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

1976

Objetivo: Este trabajo tiene por finalidad extender a Operadores Cuasidiferenciales (definidos más adelante), la descomposición de Polya para un operador diferencial

$$L_y = y^{(n)} + p_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots + p_0 y$$

en "productos" de operadores diferenciales de primer orden de la forma

$$L_y = r_n\, (r_{n-1} \; . \; . \; . \; (r_1\, (r_0 y)'\,)' \; . \; . \; . \;)'.$$

Se estudia también esta descomposición en relación al concepto de disconjugancia y en relación a la no anulación de ciertos wronskianos generalizados.

Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x \tag{1}$$

donde x es un vector $(x_1,\ldots,x)$ y $A(t)$ es una matriz $n \times n$ definida continua en un intervalo (a,b) y tal que

$$a_{i,i+1}(t) > 0 \quad \text{para} \quad i = 1,\ldots,n-1$$

$$a_{ij}(t) \equiv 0 \qquad \text{para} \quad j \geq i+2,\ i = 1,\ldots,n-1.$$

Sea ahora una función $f: (a,b) \to R$. Diremos que esta función es admisible si se le pueden aplicar los operadores $L_0,\ldots,L_n$, $n \geq 1$, definidos por

$$\begin{aligned}
L_0 f &= f \\
L_1 f &= \frac{1}{a_{12}} \left[(L_0 f)' - a_{11} (L_0 f) \right] \\
&\vdots \\
L_n f &= \frac{1}{a_{n,n+1}} \left[(L_{n-1} f)' - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} (L_{k-1} f) \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

donde a_{ij}, $i,j = 1,n$, son los coeficientes de la matriz $A(t)$, $a_{n,n+1} = 1$ y donde suponemos que cada operador L_i, $i=0,n$, envia una función definida en (a,b) en otra función también definida en (a,b) y tal que $L_i f$, $i=0,n-1$ es diferenciable.

Sea ahora $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ una solución de (1). Entonces $x_1(t)$ satisface $L_n x_1(t) = 0$, $t \in (a,b)$. Inversamente si $f:(a,b) \to R$ es una función admisible tal que $L_n f(t) = 0$, $t \in (a,b)$ se tendrá que el vector $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ donde $x_i(t) = L_{i-1}f(t)$ $i=1,n$, es una solución de (1).

La ecuación $L_n f = 0$ la llamaremos una ecuación cuasidiferencial de orden n. Por el problema de una ecuación cuasidiferencial de orden n con condiciones iniciales entenderemos el buscar soluciones de $L_n f = 0$ que en un punto $c \in (a,b)$ satisfacen $L_j f(c) = A_j$, $j=0,\ldots,n-1$ y donde las A_j, $j=0 \ldots, n-1$, son constantes. Por lo dicho anteriormente es claro que la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones para este problema se sigue de la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones del sistema (1) con condiciones iniciales.

DEFINICION.- Decimos que la ecuación $L_n f = 0$ o equivalentemente el operador L_n, es disconjugado en (a,b) si ninguna solución, no trivial, de $L_n f = 0$ tiene más de $n-1$ ceros en (a,b). En esta definición los ceros se cuentan con sus multiplicidades. (Una solución $f(t)$ tiene un cero de orden $m, 1 \leq m < n$, en $c \in (a,b)$ si $L_0 f(c) = \ldots = L_{m-1}f(c) = 0$ y $L_m f(c) \neq 0$). De ahora en adelante por una solución entenderemos una solución no trivial.

Sean a continuación $f(t)$, $f_1(t),\dots,f_m(t)$, $1\le m\le n$, $m+1$ funciones admisibles de (2). Por convención denotamos por $W_j = W(f_1,\dots,f_j)$ y por $W(f_1,\dots,f_j,f)$ a los siguientes determinantes, $1\le j\le m$:

$$W_j=W(f_1,\dots,f_j)=\begin{vmatrix} L_0f_1 & \dots & L_0f_j \\ \vdots & & \\ L_{j-1}f_1 & \dots & L_{j-1}f_j \end{vmatrix} \qquad W(f_1,\dots,f_j,f)=\begin{vmatrix} L_0f_1 & \dots & L_0f_j & L_0f \\ & & & \\ L_jf_1 & \dots & L_jf_j & L_jf \end{vmatrix} \tag{3}$$

y por $F(f_1,\dots,f_{j-1},f)$, $2\le j\le m$ al determinante

$$F(f_1,\dots,f_{j-1}f) = \begin{vmatrix} L_0f_1 & \dots\dots & L_0f_{j-1} & L_0f \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{j-2}f_1 & \dots\dots & L_{j-2}f_{j-1} & L_{j-2}f \\ L_j\,f_1 & \dots\dots & L_jf_{j-1} & L_jf \end{vmatrix} \tag{4}$$

El propósito de este artículo es demostrar el siguiente Teorema:

TEOREMA 1.- Sea el operador L_n definido en (2). Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) Existen soluciones $f_1(t),\dots,f_n(t)$ de $L_nf = 0$ tal que los determinantes $W_1,\dots,W_n$ son distintos de cero en (a,b).

b) Existen funciones reales $\sigma_0,\ldots,\sigma_n$ continuas en (a,b) y que no se anulan en ningun punto de este intervalo tal que

$$L_n f = \sigma_n(\sigma_{n-1}(\ldots(\sigma_0 f)')'\ldots)'$$

para todo f admisible.

c) El operador L_n es disconjugado en (a,b).

Este Teorema constituye una extensión de algunos resultados dados por Nehari [3] , para un operador cuasidiferencial menos general que el nuestro. Para demostrar el TEOREMA 1, enunciaremos y probaremos algunos Lemas y Teoremas preliminares.

LEMA 1.- Si C_j denota el determinante

$$C_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} \qquad j \geq 1 \qquad (5)$$

y $C_0 = 1$, entonces se tiene que

$$C_{j-2}\, C_j = \begin{vmatrix} A_{j-1,j-1} & A_{j-1,j} \\ A_{j,j-1} & A_{j,j} \end{vmatrix} \qquad j \geq 2 \qquad (6)$$

donde $A_{\ell,m}$ denota el menor (no cofactor) correspondiente a $a_{\ell m}$ en C_j.

LEMA 2.- Sean $f_1,\ldots,f_n,f$, n+1 funciones admisibles en (a,b). Supongamos que los determinantes $W_1,\ldots,W_n$ correspondientes a estas funciones son distintos de cero en (a,b). Entonces las si guientes identidades son ciertas:

a) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{W_1}\right] = a_{12}\,\frac{W(f_1,\ f)}{W_1^{\,2}} \qquad (7)$$

b) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{W(f_1,\ldots,f_{j-1},f)}{W_j}\right] = a_{j,j+1}\,\frac{W_{j-1}}{W_j^{\,2}}\,W(f_1,\ldots,f_j,f), \qquad (8)$$

para $2 \leq j \leq n$.

DEMOSTRACION.-

Ya que las funciones $f_1,\ldots,f_n,f$ son admisibles se -

tiene que los determinantes $W_1 = f_1$, $W(f_1, \ldots, f_{j-1}, f)$, W_j, $2 \leq j \leq n$, son diferenciables. Asi tenemos que a) se sigue de -

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{W_1}\right] = \frac{f'f_1 - f\,f_1'}{W_1^2} = a_{12}\,\frac{\left[L_1 f\,.\,f_1 - L_1\,f_1\,.\,f\right]}{W_1^2} = a\,\frac{W(f_1,f)}{W_1^2}\,,$$

donde se ha utilizado la expresión para el operador L_1 dada - por (2).

Para demostrar b) se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{W(f_1,\ldots,f_{j-1},f)}{W_j}\right] = \frac{W_j W'(f_1,\ldots,f_{j-1},f) - W(f_1,\ldots,f_{j-1},f)W_j'}{W_j^2}\,. \tag{9}$$

Haciendo uso de (2) y de propiedades de los determinantes se - puede demostrar que :

$$W'(f_1,\ldots,f_{j-1},f) = \left(\sum_{i=1}^{j} a_{ii}\right).W(f_1,\ldots,f_{j-1},f) + a_{j,j+1}F(f_1,\ldots,f_{j-1},f)\,. \tag{10}$$

De (10) con $f=f_j$ se puede obtener W_j'. Reemplazando entonces las expresiones para $W'(f_1,\ldots,f_{j-1}, f)$ y W_j' en (9) se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{W(f_1,\dots,f_{j-1},f)}{W_j}\right]=\frac{a_{j,j+1}}{W_j}\left[W_j\cdot F(f_1,\dots,f_{j-1},f)-W(f_1,\dots,f_{j-1},f)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot F(f_1,\dots,f_{j-1},f_j)\right]. \qquad (11)$$

Por otra parte aplicando LEMA 1 al determinante

$$C_{j+1}=W(f_1,\dots,f_j,\ f) \qquad j\geq 2$$

se puede demostrar que el paréntesis de la derecha de (11) es igual a

$$W_{j-1}\ W(f_1,\dots,f_j,f)\ .$$

Así (11) finalmente queda como:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{W(f_1,\dots,f_{j-1},f)}{W_j}\right]=a_{j,j+1}\cdot\frac{W_{j-1}\ W(f_1,\dots,f_j,f)}{W_j^{\,2}} \qquad (12)$$

LEMA 3.- Bajo las hipótesis del LEMA 2, existen funciones reales σ_0 , σ_1 ,....,σ_{n-1} diferenciables y distintas de cero en (a,b) tal que

$$W(f_1,\dots,f_n,f)=\frac{W_n^{\,2}}{W_{n-1}}\ \frac{d}{dx}\ \sigma_{n-1}\ \frac{d}{dx}\ \sigma_{n-2}\ \cdots\ \frac{d}{dx}\ \sigma_2\frac{d}{dx}\ \sigma_1\ \frac{d}{dx}\ (\sigma_0 f)$$

(13)

DEMOSTRACION.-

Las fórmulas (7) y (8) se pueden reescribir como

$$W(f_1, f) = \frac{W_1^2}{a_{12}} \frac{d}{dx}\left[\frac{f}{W_1}\right] \tag{14}$$

$$W(f_1,\ldots,f_j,f) = \frac{W_j^2}{a_{j,j+1}\, W_{j-1}} \frac{d}{dx}\left[\frac{W(f_1,\ldots,f_{j-1},f)}{W_j}\right], \tag{15}$$

$2 \leq j \leq n$. Entonces por aplicación de (14) y aplicación reiterada de (15) se obtiene:

$$W(f_1,\ldots,f_n,f) = \frac{W_n^2}{W_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{W_{n-1}^2}{a_{n-1,n}\, W_{n-2}\, W_n} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{W_2^2}{a_{2,3}\, W_1\, W_3} \frac{d}{dx}$$

$$\frac{W_1^2}{a_{12}\, W_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{W_1}\right). \tag{16}$$

Definiendo, para todo $x \in (a,b)$,

$$\sigma_{m-1}(x) = \frac{W_{m-1}^2}{a_{m-1,m}\, W_{m-2}\, W_m} \qquad m = 3, \ldots, n$$

$$\sigma_1(x) = \frac{W_1^2}{a_{12}\, W_2} \tag{17}$$

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{W_1}$$

se tiene que σ_0, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ son funciones derivables y distintas de cero en (a,b). La fórmula (16) queda entonces

$$W(f_1,\ldots,f_n,f) = \frac{W_n^2}{W_{n-1}} \frac{d}{dx} \sigma_{n-1} \frac{d}{dx} \sigma_{n-2} \cdots \frac{d}{dx} \sigma_2 \frac{d}{dx} \sigma_1 \frac{d}{dx} (\sigma_0 f) . \quad (18)$$

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente

TEOREMA 2.- Si $f_1,\ldots,f_n$ son n soluciones de $L_n Y = 0$ tal que $W_1,\ldots,W_n$ son distintos de cero y si f es cualquier función admisible, entonces existen funciones σ_0, $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ diferenciables y distintas de cero en (a,b) tal que

$$L_n f = \sigma_n \frac{d}{dx} \sigma_{n-1} \cdots \frac{d}{dx} \sigma_1 \frac{d}{dx} (\sigma_0 f).$$

DEMOSTRACION .

Por LEMA 3 se tiene que existen funciones $\sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}$ diferenciables y distintas de cero tal que (13) es cierta. Ahora ya que $L_n f_i = 0$ $i = 1, n$, se tiene que

$$W(f_1,\ldots,f_n,f) = W_n \cdot L_n f . \quad (19)$$

Substituyendo (19) en (13) y definiendo $\sigma_n(x) = \dfrac{W_n}{W_{n-1}}$

se obtiene:

$$L_n f = \sigma_n \frac{d}{dx} \sigma_{n-1} \cdots\cdots \frac{d}{dx} \sigma_1 \frac{d}{dx} (\sigma_0 u) \ . \tag{20}$$

TEOREMA 3.- Si existen funciones $\sigma_i(x)$, $i= 0,\ldots,n$, continuas en (a,b) y distintas de cero $\forall\ x \in (a,b)$ y tal que para cualquier f admisible

$$L_n f = \sigma_n \frac{d}{dx} \sigma_{n-1} \cdots\cdots \frac{d}{dx} \sigma_1 \frac{d}{dx} (\sigma_0 f), \tag{21}$$

entonces el operador L_n es disconjugado en (a,b).

DEMOSTRACION. Supongamos que existe una solución $u(x)$ (no trivial) de $L_n Y = 0$, que se anula n veces en (a,b). Para el caso que estos n ceros sean ceros simples, una aplicación reiterada del TEOREMA de ROLLE conduce a la contradicción de que u debe ser la solución nula. A continuación consideramos el caso en que u tiene un cero múltiple para algún $c \in (a,b)$. Por simplicidad supondremos que c es un cero de orden $n-1$ y que $d \neq c$, $d \in (a,b)$ es un cero simple.

Para demostrar este caso haremos uso de un caso particular de PROPOSICION 1 [2].

PROPOSICION 1.- Si c es un cero de orden $n-1$ de una solución $u(x)$

de $L_n Y = 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{u(x)-u(c)}{(x-c)^i} = 0, \quad 0 \leq i \leq n-2. \tag{22}$$

AFIRMACION 1.- Si $u(x)$ tiene un cero de orden $n-1$ en $x=c$ entonces

$$\frac{d}{dx} \sigma_j \frac{d}{dx} \sigma_{j-1} \cdots\cdots\cdots \frac{d}{dx} (\sigma_0 u)=0, \text{ en } x=c, \ 0 \leq j \leq n-3. \tag{23}$$

Aqui suponemos $n>3$. Si $n=1$ o 2 se trata de ceros simples, caso ya visto, o de un cero doble, caso que no tiene dificultad. Si $n=3$, la AFIRMACION 2 que sigue y que sirve para determinar la demostración también es cierta.

DEMOSTRACION.- Definiendo los operadores $M_0, M_1, \ldots, M_j$ por

$$M_0 u = \sigma_0 u$$

$$M_\ell u = \sigma_\ell \frac{d}{dx} (M_{\ell-1} u) \quad , \quad \ell = 1, \ldots, j, \tag{24}$$

entonces (23) se escribe

$$\frac{d}{dx} (M_j u) = 0, \text{ en } x=c, \quad 0 \leq j \leq n-3 . \tag{25}$$

Seguimos con inducción. Para $j=0$, de (22) con $i=1$ se tiene

$$\lim_{x \to c} \frac{u(x) - u(c)}{x - c} = 0. \tag{26}$$

Ya que $u(c)=0$, $\sigma_0(x)\neq 0$, $x \in (a,b)$, σ_0 continua y $\sigma_0(x)$. .$u(x)$ diferenciable se obtiene

$$\frac{d}{dx}(\sigma_0 u) = \frac{d}{dx}(M_0 u) = 0 \quad \text{en} \quad x = c\,.$$

Supongamos ahora que

$$\frac{d}{dx}(M_\ell u) = 0 \quad \text{en} \quad x = c, \quad \text{para} \quad 0\leq \ell \leq j, \quad 0\leq j\leq n-4.$$

Queremos mostrar que $\frac{d}{dx}(M_{j+1}u) = 0$ en $x=c$. De (22) con $i=j+2$, se tiene

$$\lim_{x \to c} \frac{u(x) - u(c)}{(x-c)^{j+2}} = 0\,. \tag{27}$$

De ecuación (27) se sigue que $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{\sigma_0(x)u(x)}{(x-c)^{j+2}} = 0$.

Aplicando L'Hopital a esta expresión se obtiene $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{(\sigma_0 u)'}{(x-c)^{j+1}} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{(M_0 u)'}{(x-c)^{j+1}} = 0$. De aqui ya que $\sigma_1(x)\neq 0$, $x \in (a,b)$, σ_1 continua $\sigma_1(M_0 u)'$

diferenciable, se tiene que $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{\sigma_1(M_0 u)'}{(x-c)^{j+1}} = 0$. Considerando la hipótesis de inducción aplicamos L'Hopital a esta expresión, se obtiene $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{(M_1 u)'}{(x-c)^j} = 0$. Prosiguiendo de esta forma se sigue que

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{(M_j\, u)'}{(x-c)^{j-(j-1)}} = 0$, y de aqui que

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{\sigma_{j+1}(M_j u)'}{x - c} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\sigma_{j+1} M_j u) = 0$ en $x=c$. Esto termina la inducción y la demostración de la AFIRMACION 1.

Notemos que con la notación de (24), ecuación (23) se puede escribir como

$$M_{j+1} u = 0 \quad \text{en} \quad x = c, \qquad 0 \leq j \leq n-3 \tag{28}$$

AFIRMACION 2.- Existe un conjunto de puntos t_i, $i=0,\ldots,n-1$ $t_i \neq t_k$, $i \neq k$, contenidos en (a,b) tal que

$$(M_i u) = 0 \quad \text{en} \quad x = t_i, \quad 0 \leq i \leq n-2 .$$

DEMOSTRACION.- Tomemos $t_0=c$. Suponemos que $c<d$. De $(M_0 u)_c=0$ y de $(M_0 u)_d=0$ y por aplicación del TEOREMA de ROLLE se tiene que exis te un t_1 en (t_0,d) tal que $(M_0 u)'_{t_1}=0$. Es decir $(M_1 u)_{t_1}=0$. Ya que $(M_1 u)_{t_0}=0$, por una nueva aplicación del TEOREMA de ROLLE se sigue que existe un t_2 en (t_0, t_1) tal que $(M_2 u)_{t_2}=0$. Prosiguiendo

de esta manera se obtiene finalmente que existe un $t_{n-1} \varepsilon (c,d)$ tal que $(M_{n-1}u)t_{n-1} = 0$- Esto termina la demostración de la AFIRMACION 2.

Con la notación de (24), la ecuación (21) se escribe

$$L_n y = \sigma_n \frac{d}{dx} (M_{n-1} y). \tag{29}$$

Vamos ahora a terminar con la demostración del TEOREMA 3. Para $u(x)$ solución de $L_n Y = 0$ se tiene $(M_{n-1}u)'=0 \quad \forall\, x \,\varepsilon\, (a,b) \Rightarrow M_{n-1}u = A_{n-1}$ = constante, $\forall\, x \,\varepsilon\, (a,b)$. Evaluando $M_{n-1}u$ en t_{n-1} se obtiene que $A_{n-1} = 0. \Rightarrow (M_{n-2}u) = A_{n-2}$ constante, $\forall\, x \,\varepsilon\, (a,b)$. Evaluando en t_{n-2} se obtiene que $A_{n-2} = 0$. Prosiguiendo de esta manera finalmente se tiene $M_0 u = A_0$ = constante $\forall\, x \,\varepsilon\, (a,b)$. Evaluando en c se obtiene que $M_0 u=0 \quad \forall\, x \,\varepsilon\, (a,b)$.
Pero $M_0 u = \sigma_0 u$ y $\sigma_0 \neq 0 \quad \forall\, x \,\varepsilon\, (a,b) \Rightarrow u(x) = 0 \quad \forall\, x \,\varepsilon\, (a,b)$.
Esto es una contradicción y por lo tanto si el operador L_n admite la representación (21) es disconjugado.

NOTA. El caso en que $u(x)$ tiene un cero de orden m_1 en c y de orden m_2 en d, donde $m_1 + m_2 = n$ se prueba de una forma similar al que hemos probado, con pequeñas modificaciones técnicas.

TEOREMA 4.- Si el operador L_n es disconjugado en (a,b) entonces existen soluciones $u_1,\dots,u_n$ de la ecuación $L_n Y = 0$ tal que los determinantes $W_1,\dots,W_n$ correspondientes a estas soluciones son distintos de cero.

Para una demostración de este TEOREMA, ver [1].

Estamos ahora en condiciones de probar TEOREMA 1.-

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.-

Se tiene que a) $\Longrightarrow$ b) por TEOREMA 2. Ahora b) $\Longrightarrow$ c) por TEOREMA 3. Finalmente c) $\Longrightarrow$ a) por TEOREMA 4.

B I B L I O G R A F I A

[1] D.B. Hinton. "Disconjugate Properties of a System of Differential Equations ". J. Differential Equations 2 (1.966), 420-437.

[2] A. Tineo, R.F. Manasevich. " On the First Conjugate. Point of a Quasidifferential Equation of Order N ". Sometido a publicación.

[3] Z. Nehari. "Disconjugate Linear Differential Operators ". Transactions of the American Mathematical Society, 129, 3, 1.967.