NOTAS DE MATEMATICA

Nº 54

CATEGORIA DE LOS A-MODULOS CUADRATICOS

POR

JOSE SANTODOMINGO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1982

CATEGORIA DE LOS A-MODULOS CUADRATICOS

POR

JOSE SANTODOMINGO

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR A LA CATEGORIA DE PROFESOR AGREGADO, EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS.

RESUMEN

El presente trabajo está dividido en tres capítulos. En el primero se demuestra que los A-módulos de las aplicaciones cuadráticas, cuasi-cuadráticas y semi-cuadráticas, forman unas categorías, denotadas respectivamente $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$. Después de ver algunos ejemplos de cuando éstas categorías son iguales. Se demuestran dos resultados, que para el cuerpo $\mathbb{R}$ establecen comparaciones entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$.

En el segundo capítulo, se da un contraejemplo que muestra que el teorema de extensión de los escalares para las aplicaciones cuadráticas, no puede ser extendido al caso de las aplicaciones semi-cuadráticas.

Por último en el tercer capítulo, se presenta un A-módulo, denotado $F_1(A,M,N)$ y un resultado que sirve para la comparación de las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$.

NOTACIONES

A	Anillo conmutativo con elemento unidad.
Z	Anillo de los enteros.
Q	Cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	Cuerpo de los números reales.
Z_2	Anillo de los enteros módulo 2.
$C_1(A,M,N)$	A-módulo de las aplicaciones A-cuadráticas de M en N.
$C(A,M,N)$	A-módulo de las aplicaciones A-semi-cuadráticas de M en N.
$\mathcal{C}$	Categoría de los módulos cuadráticos.
$\mathcal{C}_0$	Categoría de los A-módulos cuasi-cuadráticos.
$\mathcal{C}_1$	Categoría de los A-módulos semi-cuadráticos.
$\mathcal{C}(A)$	Categoría de los módulos cuadráticos con A fijo.
$\mathcal{C}_0(A)$	Categoría de los módulos cuasi-cuadráticos con A fijo.
$\mathcal{C}_1(A)$	Categoría de los módulos semi-cuadráticos con A fijo.

CAPITULO 1

En lo que sigue A denotará un anillo conmutativo con elemento unidad. Designaremos por $\underline{A_n}$ la categoría de los anillos, por <u>Mod</u> la categoría de los módulos y por Mod(A) la categoría de los A-módulos, donde A es un anillo fijo.

1) APLICACIONES CUADRATICAS

Sean M y N dos A-módulos, una aplicación $q: M \to N$ es una aplicación A-cuadrática si las condiciones siguientes se verifican:

C1) Para todo $(a,x) \in A \times M$, $q(ax) = a^2 q(x)$.

C2) La aplicación $\phi: M \times M \longrightarrow N$ definida por $\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ es A-bilineal, necesariamente simétrica y que llamaremos la aplicación asociada con q.

El par (M,q) es llamado A-módulo cuadrático.

<u>PROPOSICION 1.1</u>: Los A-modulos cuadráticos forman una categoría denotada $\mathcal{C}$.

En efecto, los objetos de la categoría son las cuaternas (A,M,q,N), donde (A,M) y (A,N) son objetos de <u>Mod</u> y $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación A-cuadrática, los morfismos son los triples $(f,g,h): (A,M,q,N) \longrightarrow (A',M',q',N)$, donde

$(f,g)\colon (A,M) \longrightarrow (A',M)$ y $(f,h)\colon (A,N) \longrightarrow (A',N')$ son los morfismos de <u>Mod</u> que dejan conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "h"] \\ M' \arrow[r, "q'"] & N' \end{tikzcd}$$

Es claro que si $(f,g,h)\colon (A,M,q,N) \longrightarrow (A',M',q',N')$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g \times g"'] & N \arrow[d, "h"] \\ M' \times M' \arrow[r, "\phi'"] & N' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ϕ (resp ϕ') es la aplicación A-bilineal (resp A'-bilineal) simétrica asociada con q (resp q').

Si fijamos el anillo A, notaremos $\mathcal{C}(A)$ la subcategoría de $\mathcal{C}$ cuyos morfismos son de la forma

$$(Id_A,\ g,h)\colon (A,M,q,N) \longrightarrow (A,M',q',N)$$

donde g y h son aplicaciones A-lineales dejando conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d] \\ M' \arrow[r, "q'"] & N' \end{tikzcd}$$

Si además fijamos el A-módulo N, notaremos (A,N) la subcategoría de $\mathcal{C}(A)$ cuyos morfismos son de la forma

$$(Id_A,\ g,\ Id_N):\ (A,M,q,N) \longrightarrow (A,M',q',N)$$

esto es, g es una aplicación A-lineal que deja conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "q"'] & & M' \arrow[dl, "q'"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

<u>DEFINICION 1.2</u>: Sea M y N dos A-módulos. Diremos que una aplicación $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación A-semi-cuadrática si verifica la ley del paralelogramo, a saber, $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$ cualesquiera sean x,y en M.

A toda aplicación A-semi-cuadrática asociaremos la aplicación $\phi: M \times M \longrightarrow N$ definida por $\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$.

Si M y N son A-módulos y $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación A-semi-cuadrática, el par (M,q) se llamará un A-módulo semi-cuadrático.

<u>PROPOSICION 1.3</u>: Los A-módulos semi-cuadráticos forman una categoría denotada $\mathcal{C}_1$.

(Ver Proposición 1.1.).

<u>LEMA 1.4</u>: Sean M y N dos A-módulos, $q: M \longrightarrow N$ una

aplicación A-semi-cuadrática y ϕ la aplicación asociada con q y supongamos que la homotecia definida por 2 en N sea inyectiva. Entonces ϕ es biaditiva y verifica para todo x en M, $\phi(x,x) = 2q(x)$ y $q(-x) = q(x)$. Cf. [1].

<u>DEFINICION 1.5</u>: Si M y N son A-módulos una aplicación $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación A-cuasi-cuadrática si las condiciones siguientes se verifican:

CC1) Para todo $(a,x) \in A \times M$, $q(ax) = a^2q(x)$;

CC2) Cualesquiera sean x,y en M, $q(x+y) + q(x-y) =$
$= 2q(x) + 2q(y)$.

Es evidente que una condición necesaria y suficiente para que $q: M \longrightarrow N$ sea una aplicación A-cuasi-cuadrática es que:

1) Para todo $(a,x) \in A \times M$, $q(ax) = a^2q(x)$;

2) La aplicación $\phi: M \times M \longrightarrow N$ definida por $\phi(x,y) =$
$= q(x+y) - q(x) - q(y)$ sea Z-bilineal.

Si M y N son A-módulos y $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación A-cuasi-cuadrática, el par (M,q) se llamará un módulo cuasi-cuadrático.

<u>PROPOSICION 1.6</u>: Los A-módulos cuasi-cuadráticos forman una categoría, denotada $\mathcal{C}_0$.

(Demostración similar a Proposición 1.1.).

Si denotamos $\mathcal{C}_1(A)$ y $\mathcal{C}_0(A)$ las subcategorías de $\mathcal{C}_1$ (resp $\mathcal{C}_0$) que resultan de fijar el anillo A, es claro que $\mathcal{C}_0(A)$ es una subcategoría de $\mathcal{C}_1(A)$ y a su vez $\mathcal{C}(A)$ es una subcategoría de $\mathcal{C}_0(A)$. Si embargo, en general $\mathcal{C}_1(A)$ no es una subcategoría de $\mathcal{C}_0(A)$, como se puede ver en los siguientes ejemplos.

<u>EJEMPLO 1.7</u>: Si M es un Z_2-espacio vectorial, la aplicación $q: M \longrightarrow Z_2$ definida por $q(x) = 1$ para todo x en M, es una aplicación Z_2-semi-cuadrática, pero no, una aplicación Z_2-cuasi-cuadrática. Más generalmente, tenemos la siguiente proposición.

<u>PROPOSICION 1.8</u>: Toda aplicación $q: M \longrightarrow Z_2$, donde M es un Z_2-espacio vectorial, es una aplicación Z_2-semi-cuadrática.

En efecto, para todo $x \in M$, tenemos $x = -x$. Luego, $q(x+y) + q(x-y) = q(x+y) + q(x+y) = 0$ y. $2q(x) + 2q(y) = 0$, para todo x,y en M. En el ejemplo anterior q no es una aplicación Z_2-cuasi-cuadrática porque $q(0) \neq 0$. En efecto, la proposición 1.8, es más general, a saber.

<u>PROPOSICION 1.9</u>: Sean A un anillo de característica 2 y M un A-módulo. Toda aplicación $q: M \longrightarrow A$ es una aplicación A-semi-cuadrática.

La demostración es análoga a la de la proposición 1.8. El ejemplo dado puede entonces, también ser generalizado de la manera siguiente; si A es un anillo de característica 2 y M un A-módulo, una aplicación $q: M \longrightarrow A$ tal que $q(0) \neq 0$ es una aplicación A-semi-cuadrática, pero no una aplicación A-cuasi-cuadrática.

<u>EJEMPLO 1.10</u>: Seàn B un anillo conmutativo con elemento unidad y A el anillo de las matrices de orden 2 de la forma

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad \text{con } x,y \text{ en } B.$$

Es claro que A es un anillo conmutativo con elemento unidad y consideremos la aplicación $q: A \longrightarrow A$ definida por

$$q\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que q es una aplicación A-semi-cuadrática.En efecto, si

$$u = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad y \quad u' = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$$

son dos elementos de A, tenemos $q(u + u') + q(u - u') =$

$$= \begin{pmatrix} 2(xy + x'y') & 0 \\ 0 & 2(xy + x'y') \end{pmatrix} = 2q(u) + 2q(u').$$

Sin embargo,la aplicación $q: A \longrightarrow A$ no es A-cuasi-cuadrática. En efecto, $q(u,u') =$

$$= \begin{pmatrix} xy\ x'y & 0 \\ 0 & xy\ x'y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'y' & 0 \\ 0 & x'y' \end{pmatrix} = q(u)q(u')$$

Es decir, q es una aplicación A-semi-cuadrática multiplicativa.

Pero

$$q(u) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \text{ y } \quad u^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

luego tenemos, en general, $q(u) \neq u^2$, o todavía $q(u\ u') \neq$ $\neq u^2\ q(u')$.

Nos preguntamos para que anillos A, estas categorías son iguales. Se puede ver que si $A = \mathbb{Z}$ (anillo de los enteros) ó $A = \mathbb{Q}$ (cuerpo de los números racionales) la igualdad se verifica. Cf [1]. Nos proponemos el problema de saber si un resultado análogo es verdadero si $A = \mathbb{R}$ (cuerpo de los números reales). Más precisamente, si $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación $\mathbb{R}$-semi-cuadrática, donde M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces ¿$q: M \longrightarrow N$ es una aplicación $\mathbb{R}$-cuadrática?. En general esto no es cierto, aún si suponemos que $q: M \longrightarrow N$ sea una aplicación A-cuasi-cuadrática (ver cf [1], donde se muestra que si A es una extensión trascendente de Q, existe una aplicación $q: M \longrightarrow N$ A-cuasi-cuadrática que no es A-cuadrática). Sin embargo, bajo las hipótesis señaladas en las proposiciones 1.12 y 1.14, la pregunta tiene una respuesta afirmativa.

<u>LEMA 1.11</u>: Supongamos que la homotecia definida por 2 en N sea inyectiva. Si (A,M,q,N) es un objeto de $\mathscr{C}_1(A)$, una condición necesaria y suficiente para que (A,M,q,N) sea

un objeto de $\mathscr{C}(A)$ es que para todo $(x,y) \in M \times M$ y para todo $a \in A$, tengamos $\phi(ax,y) = a\,\phi(x,y)$, donde ϕ es la aplicación simétrica asociada con q.

En efecto, solo nos falta ver que $q: M \longrightarrow N$ verifica la condición C1), es decir $q(ax) = a^2 q(x)$, pero

$$2q(ax) = \phi(ax,\ ax) = a^2\ \phi(x,x) = 2\ a^2 q(x),$$

luego

$$q(ax) = a^2 q(x).$$

Para cualesquiera a en A, x en M.

<u>PROPOSICION 1.12</u>: $\mathscr{C}_1(\mathbb{R}) = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ si para todo objeto $(\mathbb{R}, M, q, N)$ de $\mathscr{C}_1(\mathbb{R})$, $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación contínua para la topología producto de M y de N. Y donde M y N son espacios vectoriales de dimensión finita.

Sea $\phi: M \times M \longrightarrow N$, la aplicación asociada con q, solo falta ver que para todo $(x,y) \in M \times M$ y para todo $a \in \mathbb{R}$, $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$. Pero $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_n \in Q$, luego

$$\phi(ax,y) = \phi(\lim_{n\to\infty} a_n\ x,y) = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n x,y) = \lim_{n\to\infty} a_n\ \phi(x,y) =$$

$$= a\ \phi(x,y).$$

En el caso de los cuerpos, se conoce el siguiente resultado.

<u>LEMA 1.13</u>: Sean k un cuerpo de característica diferente de 2, M un k-espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 2 y $q: M \longrightarrow N$ una aplicación k-semi-cuadrática. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación k-cuadrática.

ii) Para todo sub-k-espacio vectorial W de M de dimensión 2, $q/W: W \longrightarrow N$ es una aplicación k-cuadrática.

i $\Longrightarrow$ ii) Es claro que si $q: M \longrightarrow N$ es una aplicación k-cuadrática, entonces q es k-cuadrática sobre todos los sub-k-espacios vectoriales sobre todos los sub-k-espacios vectoriales de M y en particular aquellos de dimensión 2.

ii $\Longrightarrow$ i) En efecto, sean x,y dos elementos no nulos de M y W el sub-k-espacio vectorial de M engrendrado por x e y, supongamos que q/W sea una aplicación A-cuadrática. Entonces para todo $a \in K$, $2\phi(ax,y) = q(ax+y) - q(ax-y) =$

$$= q/W(ax+y) - q/W(ax-y) = \phi/_{W\times W}(ax,y) + q/W(ax) +$$

$$+ q/W(y) + \phi/_{W\times W}(ax,y) - q/W(ax) - q/W(y) = 2\phi/_{W\times W}(ax,y) =$$

$= 2a\phi/_{W\times W}(x,y)$, entonces para todo $a \in K$, $\phi(ax,y) =$

$= a\phi/_{W\times W}(x,y) = a\phi(x,y)$, para todo sub-$k$-espacio vectorial W de dimensión 2, esto es, para todo par $(x,y) \in M \times M$. En consecuencia ϕ es k-bilineal y entonces q es k-cuadrática.

<u>PROPOSICION 1.14</u>: $\mathscr{C}_1(\mathbb{R}) = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ si todo objeto

$(\mathbb{R}, M, q, N)$ de $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ cumple las siguientes condiciones:

i) M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 2.

ii) La restricción de q, a todo sub-$\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 2 es una función contínua.

En efecto, solo es necesario verificar que si $q:M \to N$ es una aplicación $\mathbb{R}$-semi-cuadrática contínua, donde M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, con la topología producto, entonces q es una aplicación $\mathbb{R}$-cuadrática y aplicar el lema anterior. Ahora bién si $a \in \mathbb{R}$, podemos escribir $u = \lim_{n\to\infty} a_n$ donde los a_n son números racionales, entonces

$$\phi(ax,y) = \phi(\lim_{n\to\infty} a_n\, x)y) = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n x,y) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n\, \phi(x,y) = a\, \phi(x,y).$$

CAPITULO 2

Un resultado conocido es el teorema de extensión de los escalares para las aplicaciones cuadráticas. En el presente capítulo se dan las nociones previas para llegar a ese resultado y se demostrará que este teorema no puede ser extendido al caso de las aplicaciones semi-cuadráticas.

2.1. EXTENSION DE LOS ESCALARES

Sean A un anillo, $q: M \longrightarrow N$ una aplicación A-cuadrática, $\phi: M \times M \longrightarrow N$ la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q y $\mathbb{R}$ un sub-A-módulo de M. Diremos que q es constante módulo $\mathbb{R}$ si la relación $x \equiv y \pmod{\mathbb{R}}$ con x,y en M, implica $q(x) = q(y)$. Las afirmaciones siguientes se verifican inmediatamente:

i) q es constante módulo $\mathbb{R}$ si y solamente si cualesquiera sean $x \in M$, $y \in \mathbb{R}$, tenemos $q(x + y) = q(x)$.

ii) Si q es constante módulo $\mathbb{R}$, entonces $q(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

iii) Si q es constante módulo $\mathbb{R}$ tenemos $\phi(x,y) = 0$ cualesquiera sean $x \in M$ e $y \in \mathbb{R}$.

iv) Si $\phi(x,y) = 0$ cualesquiera sean $x \in M$ e $y \in \mathbb{R}$, y si la homotecia definida por 2 en N es inyectiva, entonces q es constante módulo $\mathbb{R}$.

Sea $q: M \longrightarrow N$ constante módulo $\mathbb{R}$ y definimos $\overline{q}: M/R \longrightarrow N$ por $\overline{q}(\overline{x}) = q(x)$, donde $\overline{x} \in M/R$ designa la clase de $x \in M$ módulo $\mathbb{R}$. Es claro qu $\overline{q}$ está bién definida y es una aplicación A-cuadrática, $\overline{q}$ es la única aplicación A-cuadrática que deja conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d] & N \\ M/R \arrow[ur, dashed, "\overline{q}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación A-lineal canónica. Si $\overline{\phi}: M/R \times M/R \longrightarrow N$ es la aplicación A-bilineal simétrica asociada con $\overline{q}$, entonces $\overline{\phi}(\overline{x}, \overline{y}) = \phi(x,y)$ cualesquiera sean $\overline{x}, \overline{y}$ en M/R.

Para todo aplicación A-cuadrática $q: M \longrightarrow N$, definimos el *núcleo* de q como el sub-A-módulo de M definido por

$$\mathrm{Ker}(q) = \{x \mid x \in M, \quad q(x) = 0 \quad y \quad \phi(x,y) = 0, \forall\ y \in M\}$$

donde ϕ es la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q. Para cada $y \in M$, consideremos la aplicación A-lineal $\phi_y: M \longrightarrow N$ definido por $\phi_y(x) = \phi(x,y)$. Es claro que

$$\mathrm{Ker}(q) = \{x \mid x \in M, q(x) = 0\} \cap \bigcap_{y \in M} \mathrm{Ker}(\phi_y) .$$

Si la homotecia definida por 2 en N es inyectiva, la ecuación $2q(x) = \phi_x(x) = 0$ implica $q(x) = 0$, esto es

$$\mathrm{Ker}(q) = \bigcap_{y \in M} \mathrm{Ker}(\phi_y) .$$

Las condiciones siguientes se pueden todavía establecer facilmente.

v) $q: M \longrightarrow N$ es constante módulo $\mathbb{R}$ si y solamente si $\mathbb{R} \subset \mathrm{Ker}(q)$.

vi) Si $q: M \longrightarrow N$ es constante módulo $\mathbb{R}$ y si $q: M/R \to N$ es la aplicación A-cuadrática obtenida por *pase al cociente*, entonces $\mathrm{Ker}(\overline{q}) = \mathrm{Ker}\, q/R$.

<u>LEMA 2.2</u>: Sean $q: M \longrightarrow N$ una aplicación A-cuadrática y $\phi: M \times M \longrightarrow N$ la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q. Para toda familia $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de M y para toda familia $(a_i)_{i \in I}$ con soporte finito de elementos de A, tenemos

$$q\left(\sum_{i \in I} a_i\, x_i\right) = \sum_{i \in I} a_i^2\, q(x_i) + \sum_{\{i,j\}} a_i\, a_j\, \phi(x_i, x_j) ,$$

donde $\sum_{\{i,j\}}$ designa la suma extendida a los subconjuntos $\{i,j\}$ de I con dos elementos.

Podemos suponer, en la demostración que I es un conjunto finito y por recurrencia sobre el número de elementos de I, que I tiene dos elementos. Pero en este caso, tenemos trivialmente

$$q(a_1 x_i + a_2 x_2) = a_1^2 q(x_1) + a_2 q(x_2) + a_1 a_2 \phi(x_1,x_2).$$

LEMA 2.3: Sean L un A-módulo libre, $(e_i)_{i\in I}$ una base de L y N un A-módulo. Para toda familia $(y_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$ de elementos de N tal que $y_{ij} = y_{ji}$ cualesquiera sean $i,j \in I$, existe una única aplicación A-cuadrática $q: L \longrightarrow N$ verificando las condiciones $q(e_i) = y_{ii}$ para todo $i \in I$ y $\phi(e_i,e_j) = y_{ij}$. Para todo $(i,j) \in I\times I$, donde $\phi: L\times L \longrightarrow N$ es la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q.

DEMOSTRACION: En efecto, para todo $x = \sum_{i\in I} a_i e_i \in L$ tenemos

$$q(x) = \sum_{i\in I} a_i^2 q(e_i) + \sum_{\{i,j\}} a_i a_j \phi(e_i,e_j) = \sum_{(i,j)\in I\times I} a_i a_j y_{ij},$$

de donde la unicidad de q.

En lo que concierne a la existencia de q, comenzamos por dar a I una estructura de conjunto totalmente ordenado. Para toda familia (y_{ij}) de elementos de N tal que $y_{ij} = y_{ji}$ $(i,j) \in I\times I$, existe una familia (y'_{ij}) de elementos de N que verifican las condiciones $y'_{ii} = y_{ii}$ para todo $i \in I$ y $y'_{ij} + y'_{ji} = y_{ij}$ para todo $(i,j) \in I\times I$, $i\neq j$. En efecto, es suficiente elegir $y'_{ij} = y_{ij}$ si $i<j$, $y'_{ij} = 0$

si $i > j$ y $y'_{ii} = y_{ii}$.

Consideremos ahora la aplicación A-bilineal $\psi: L\times L \longrightarrow N$ definida por $(e_i, e_j) \longrightarrow y'_{ij}$ y sea $q: L \longrightarrow N$ la aplicación A-cuadrática definida por $q(x) = \psi(x,x)$. Es evidente que $q(e_i) = \psi(e_i, e_i) = y'_{ii} = y_{ii}$ para todo $i \in I$ y que $\psi(e_i, e_j) = q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j) = \psi(e_i, e_j) + \psi(e_j, e_i) = $
$= y'_{ij} + y'_{ji} = y_{ij}$, para todo $(i,j) \in I\times I$, $i \neq j$.

<u>TEOREMA 2.4</u>: Sean $f: A \longrightarrow A'$ un morfismo de anillos y $q: M \longrightarrow N$ una aplicación A-cuadrática. Existe una única aplicación A-cuadrática $q': A'\otimes_A M \longrightarrow A'\otimes_A N$ dejando conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f\otimes Id_M"'] & N \arrow[d, "f\otimes id_N"] \\ A'\otimes_A M \arrow[r, dashed, "q'"] & A'\otimes_A N \end{tikzcd}$$

La unicidad de q' es trivial. En lo que concierne la existencia, la demostración será realizada en dos etapas, donde examinaremos para comenzar el caso libre.

Supongamos entonces que M sea un A-módulo libre de base $(e_i)_{i\in I}$ y pongamos $y_{ii} = q(e_i)$ para todo $i \in I$ e $y_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ para todo $(i,j) \in I\times I$, $i \neq j$, donde ϕ es la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q. Por el lema anterior, existe una única aplicación A'-cuadrática

$q': A' \otimes_A M \longrightarrow A' \otimes_A N$ verificando las condiciones $q'(1' \otimes e_i) = 1' \otimes y_{ii}$ para todo $i \in I$ y $\phi'(1' \otimes e_i, 1' \otimes e_j) = 1' \otimes y_{ij}$ para todo $(i,j) \in I \times I$, $i \neq j$, donde ϕ' es la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q'. Si $x = \sum_{i \in I} a_i e_i \in M$, tenemos $1' \otimes x = \sum_{i \in I} f(a_i)(1' \otimes e_i)$, luego $q'(1' \otimes x) =$

$$= \sum_{(i,j) \in I \times I} f(a_i) f(a_j) (1' \otimes y_{ij}) = 1' \otimes \sum_{(i,j) \in I \times I} a_i a_j y_{ij} =$$

$= 1' \otimes q(x)$, esto es, $q'(1' \otimes x) = 1' \otimes q(x)$ para todo $x \in M$.

Sea M ahora un A-módulo cualquiera y escribamolo como cociente de un A-módulo libre L

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "q_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 0 \\ & N & \end{tikzcd}$$

Después del *caso libre*, existe una única aplicación A'-cuadrática $q_0': A' \otimes_A L \longrightarrow A' \otimes_A N$ dejando conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "f \otimes id_L"'] & N \arrow[d, "f \otimes id_N"] \\ A' \otimes_A L \arrow[r, "q_0'"] & A' \otimes_A N \end{tikzcd}$$

Si ahora notamos $\mathbb{R}' = \mathrm{Ker}(A' \otimes_A L \xrightarrow{1' \otimes g} A' \otimes_A M)$, es claro que q_0' es constante módulo $\mathbb{R}'$, o todavía $\mathbb{R}' \subset \mathrm{Ker}(q_0')$. Por pase al cociente, existe una única aplicación A'-cuadrática $q': A' \otimes_A M \longrightarrow A' \otimes_A N$ que deja conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & A'\otimes_A L \arrow[r, "id_{A'}\otimes g"] \arrow[d, "q'_0"'] & A'\otimes_A M \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "q'"] & 0 \\
 & & A'\otimes_A N & &
\end{tikzcd}$$

Se sigue que para todo $x \in M$, $q'(1'\otimes x) = 1'\otimes q(x)$.

El resultado anterior no puede ser generalizado para las aplicaciones semi-cuadráticas.

<u>EJEMPLO 2.5:</u> Sean A' el anillo de los enteros de Gauss, esto es, el conjunto $Z \times Z$ con las operaciones

$$(x,y) + (x',y') = (x + x',\ y + y')$$

y

$$(x,y).(x',y') = (xx' - yy',\ xy' + yx')$$

y A el sub-anillo de A' formado por los elementos de la forma (x,ny), donde $n > 2$ es un entero fijo, A' es unitario y el elemento unidad $(1,0)$ pertenece a A. Sean $\psi: A \longrightarrow A$ la aplicación definida por $\psi(x,ny) = (y,nx)$ y $q: A \longrightarrow A$ definida por

$$q(x,ny) = \psi((x,ny)^2) = (2xy,n(x^2,n^2y^2)).$$

Se puede ver que ψ es una aplicación aditiva y es claro que q es una aplicación A-semi-cuadrática pués q es la composición de la aplicación aditiva ψ y la aplicación

A-cuadrática $Q: A \longrightarrow A$ definida por $Q(u) = u^2$. Sea ψ la aplicación asociada con q, tenemos

$$2\phi((x,ny), (x',ny') = q((x,ny) + (x',ny')) - q((x,ny) -$$

$$-(x',ny')) = 4(xy' + x'y, n(xx' - n^2 yy')),$$

luego

$$\phi((x,ny), (x',ny')) = 2(xy' + yx', n(xx' - n^2 yy'))'$$

Si existe $q': A' \longrightarrow A'$ una aplicación A-semi-cuadrática que deja conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\;q\;} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{\;q'\;} & A' \end{array}$$

entonces, si ϕ' es la aplicación asociada con q', el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{\;\phi\;} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' \times A' & \xrightarrow{\;\phi'\;} & A' \end{array}$$

es conmutativo y debemos tener $\phi(x,ny), (x',ny')) =$

$= \phi'((x,ny), (x',ny'))$ para todo x,y,x',y' en Z.

Ahora bién si tomamos $(x,ny) = (1,0)$ y $(x',ny') = (0,n)$, tenemos:

$$\phi'((1,0),\ (0,n)) = \phi'((1,0),\ n(0,1)) = n\phi'(1,0),\ (0,1))$$

y también

$$\phi'((1,0),\ (0,n)) = \phi((1,0),\ (0,n)) = 2(1,0).$$

En consecuencia, debemos tener $n\phi'((1,0),\ (0,1)) = 2(1,0)$ lo que es imposible pués n es un entero estrictamente superior a 2.

CAPITULO 3

En el presente capítulo presentamos un resultado que sirve para la comparación de las categorías $\mathcal{C}_1(A)$ y $\mathcal{C}(A)$. Para empezar definimos un A-módulo de aplicaciones denotado $F_1(A,M,N)$ y establecemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C(A,M,N) \longrightarrow C_1(A,M,N) \longrightarrow F_1(A,M,N)$$

donde

$$C(A,M,N) \quad y \quad C_1(A,M,N)$$

son respectivamente el A-módulo de las aplicaciones A-cuadráticas de M en N (respectivamente A-Semi-cuadráticas de M en N).

Para cierto tipo de A-módulos, se tiene además la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C(A,M,N) \longrightarrow C_1(A,M,N) \longrightarrow F_1(A,M,N) \longrightarrow 0$$

de donde

$$F_1(A,M,N) \cong C_1(A,M,N) \ / \ C(A,M,N)$$

y es claro que si: $F_1(A,M,N) = 0$, entonces $C_1(A,M,N) = C(A,M,N)$.

<u>DEFINICION 3.1</u>: Sea $F_1(A,M,N)$ el conjunto de las

aplicaciones $f: AxMxM \longrightarrow N$ que son aditivas en sus tres variables y que verifican la igualdad:

$$f(ab, x,y) = f(a,bx,y) + af(b,x,y),$$

cualesquiera sean a,b en A y $(x,y) \in MxM$.

Es claro que podemos dotar a $F_1(A,M,N)$ de una estructura de A-módulo.

PROPOSICION: Existe una aplicación A-lineal $\gamma: C_1(A,M,N) \longrightarrow F_1(A,M,N)$ cuyo núcleo es $C(A,M,N)$, es decir, la sucesión $0 \longrightarrow C(A,M,N) \longrightarrow C_1(A,M,N) \longrightarrow F_1(A,M,N)$ es exacta.

Si $q \in C_1(A,M,N)$, notamos $\gamma_q: AxMxM \longrightarrow N$ la aplicación definida por $\gamma_q(a,x,y) = \phi(ax,y) - a\phi(x,y)$ para toda a en A y (x,y) en MxM, donde ϕ es la aplicación asociada con q.

Es evidente que $\gamma_q \in F_1(A,M,N)$, esto es, que γ_q es aditiva en sus tres variables y que γ_q verifica

$$\gamma_q(ab,x,y) = \gamma_q(a,bx,y) + a\, \gamma_q(b,x,y),$$

cualesquiera sean a,b en A y x,y en M. Por otra parte es claro que la aplicación $\gamma: C_1(A,M,N) \longrightarrow F_1(A,M,N)$ definida por $q \longrightarrow \gamma_q$ es A-lineal y $q \in Ker(\gamma)$ si y solamente si $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$ para todo a en A y (x,y) en MxM , esto es, la aplicación ϕ asociada con q es A-bilineal. Luego $\mathrm{Ker}(\gamma) = C(A,M,N)$ lo que termina la demostración de la proposición.

Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y M, un A-módulo. Notamos con G, el A-módulo de las aplicaciones aditivas de M en A. Y con $D(A,M)$ el A-módulo de las aplicaciones de $A\times M$ en A que verifican:

(i) $d \in D(A,M)$ es bi-aditiva

(ii) $d(ab,x) = d(a,bx) + ad(b,x)$

para todo a,b en A y todo x en M.

La proposición siguiente nos muestra como estos A-módulos están ligados al A-módulo $F_1(A,M,N)$,

<u>PROPOSICION</u>: Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y M un A-módulo. Existe un isomorfismo de A-módulos

$$D(A,M) \otimes_{Z} G \cong F_1(A,M,A).$$

En efecto, la aplicación

$$D(A,M) \times G \longrightarrow F_1(A,M,A)$$

definida por $(d,g) \longrightarrow \langle d,g \rangle$ es Z-bilineal, donde

$$\langle d,g \rangle \in F_1(A,M,N)$$

es la única aplicación Z-lineal que deja conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A\times M \arrow[lld, "d"'] \arrow[d, "i"] \\
A & & A\times M\times M \arrow[ll, dashed, "<d,g>"'] \\
 & & M \arrow[llu, "g"] \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

donde i,j son las inyecciones canónicas.

Para todo $(a,x,y) \in A\times M\times M$ tenemos

$$< d,g > (a,x,y) = d(a,x)\, g(y).$$

Se sigue que

$$< d,g > o\ i = d \quad y \quad < d,g > o\ j = g.$$

La aplicación $D(A,M) \times G \longrightarrow F_1(A,M,N)$ se prolonga entonces en una aplicación Z-lineal única

$$\psi\left(\sum_i \phi oi \otimes gi \right) = \sum_i < d_i, g_i > .$$

Por otra parte, la aplicación

$$\psi' : F_1(A,M,N) \longrightarrow D(A,M) \underset{Z}{\otimes} G$$

definida por $f \longrightarrow (foi) \otimes (foj)$ es Z-lineal y es claro que ψ y ψ' son isomorfismos recíprocos.

Sea $q \in C_1(A,M,N)$ y ϕ la aplicación asociada con q. La aplicación $d:AxM \longrightarrow A$ definida por $d(a,x) = \phi(ax,y)-$ $- a\,\phi(x,y)$ pertenece al A-módulo $D(A,M)$, para todo y en M.

Si A es una Q-algebra conmutativa, asociativa y separable entonces $D(A,M) = 0$ [Referencia 1] y entonces $\phi(ax,y) = a\,\phi(x,y)$ para todo $a \in A$ y para todo $(x,y) \in MxM$, es decir $q \in C(A,M,N)$. Por otra parte según la última proposición, $D(A,M) \otimes_Z G \cong F_1(A,M,N)$, es decir que $F_1(A,M,N)=0$ si A es una Q-algebra conmutativa asociativa y separable.

El anillo A de los enteros algebraicos es un ejemplo de una Q-algebra separable. Cf [1].

BIBLIOGRAFIA

|1| J. Santodomingo, "La loi du parallelograme et le theoreme de Gleason", these pour obtenir le grade de Docteur de 3eme cycle (Matematiques Pures) 1979.

|2| A.M. Gleason, the definition of quadratic form, Amer. Math. Monthey 73 (1966), 1049-1056.

|3| O. Zariski. P. Samuel, Conmutative Algebra, Vol. 1, Van Nostrand, Princeton 1958.

|4| N. Bourbaki, Algebre chap 9, Hermann, Paris 1959.

|5| A. Micali, Estructuras Algebraicas VI, serie publicaciones O.E.A.