KOSA ANDRAS Y SZIGETI FERENC

NOTAS SOBRE

TEORIA DE CONTROL OPTIMO

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 41

TEORIA DE CONTROL OPTIMO

POR

KOSA ANDRAS Y SZIGETI FERENC

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA-VENEZUELA

1980

AGRADECIMIENTO

ESTAS NOTAS RESUMEN UN CURSO BREVE SOBRE TEORIA DE CONTROL OPTIMO DICTADAS EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA UNIVESIDAD DE LOS ANDES POR EL DOCTOR FERENC SZIGETI, PROFESOR DE LA UNIVERSIDAD EÖTVÖS LORAND DE BUDAPEST, DURANTE EL PRIMER SEMESTRE DEL AÑO 1980.

AGRADECEMOS A LOS PROFESORES KOSA ANDRAS Y SZIGETI FERENC POR SU COLABORACION.

AGRADECEMOS TAMBIEN A LA SEÑORITA ELIDE RAMIREZ POR SU DEDICACION Y EXCELENTE TRABAJO DE DACTILOGRAFIADO.

I N D I C E

TEORIA DE CONTROL OPTIMO

INTRODUCCION

En el control automático, la Economía y los problemas de estadística matemática, en general, en los problemas de tipo inverso surgieron muchos problemas de optimización los cuales no han podido ser resueltos por medio de los métodos clásicos del Cálculo Variacional. Para resolver problemas de esta índole L. Pontriaguin y su escuela - creó una nueva teoría, llamada "Teoría de Control Optimo".

El esquema de los procesos considerados es el siguiente: hay una ley de la "naturaleza", con la posibilidad de la "intervención humana", es decir, se pueden controlar los procesos considerados. Evidentemente, una intervención humana en la naturaleza tiene ciertos objetivos. Estos - objetivos pueden ser de carácter cualitativo, por ejemplo, el objetivo de la actividad humana es trasferir el sistema de una posición a otra posición deseada.

En general el objetivo primario de la actividad humana - tiene caracter cualitativo. Pero, además tenemos también otro tipo de interés, por ejemplo: producir bienes en una cantidad maximal, o con un precio mínimo. Luego, el objetivo secundario tiene un carácter cualitativo.

El teorema fundamental es el principio de Máximo de Pontria guin con el cual se pueden resolver, muchos de los proble - mas planteados, por ejemplo:

a) La estabilidad de los reactores,

b) La observación de los reactores,

c) La determinación del funcionamiento más económico de los reactores, los procesos controlados,

d) La identificación de los procesos mediante filtración,

e) La determinación de la forma de los estratos, utilizando los métodos sísmicos (es decir, el problema inverso de la sísmica).

f) La determinación de la estrategia optimal en un mercado,

g) La automatización optimal de sistemas industriales.

La teoría de control óptimo utiliza de la matemática profundamente: el análisis, el análisis funcional, las ecuaciones diferenciales, la geometría convexa, la teoría de probabilidad, etc. Así, la teoría de control óptimo ha llegado a ser una rama muy importante de las matemáticas desde el punto de vista práctico y teórico.

NOTACIONES

$:=$ - Utilizado para definir conjuntos, funciones, etc. Los dos puntos "apuntan" hacia el objeto que se define.

$f:A \to B$ - Denota una función o aplicación; el dominio de f es $D_f := A$, y el rango de f es $R_f := B$.

$\mathbb{R}$ - El conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^+$ - El conjunto de los números reales no negativos.

$\mathbb{R}^n$ - El espacio de los vectores reales de dimensión n.

$\|x\| = (\sum |x_i|)^{1/2}$ - Norma de $\mathbb{R}^n$.

$f \circ g$ - Función compuesta de la función g con f

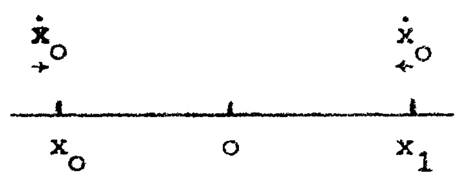
$\dot{x} = f \circ (t, x, u)$ - ecuación iferencial, donde t es la función idéntica sobre el dominio común de la trayectoria x y el control u.

A^T - Transpuesta de la matriz A.

I. EL PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRIAGUIN

1.- EJEMPLO INTRODUCTORIO:

Consideremos un punto material de masa 1 que se mueve en una recta; supongamos que se conoce que en los instantes t_o y t_1, el punto ocupa las posiciones x_o y x_1, y tiene velocidades $\dot{x}_o$ y $\dot{x}_1$ respectivamente:



Supongamos que la ecuación del movimiento de este punto está dada por $\ddot{x} = u$, donde u es una función que "controla" o "regula" dicho movimiento. Supongamos que $u \in T_1$ y está sujeta a la condición $|u| \leq 1$, entonces debe ser una función:

$$u:[t_o,t_1] \longrightarrow [-1,1]$$

Resolviendo la ecuación diferencial $\ddot{x} = u$ se ve que hay una infinidad de funciones que la satisfacen; es decir, existen soluciones u definidas sobre un cierto intervalo $[t_o^u, t_1^u]$ con valores en $[-1,1]$, de las que se obtienen funciones x, satisfaciéndose que $\ddot{x} = u$.

De consideraciones de tipo físico, se sabe también que existen funciones u de dicho tipo, tales que las soluciones de la ecuación $\ddot{x} = u$ satisfacen también las condiciones:

$$x(t_o^u) = x_o, \; x(t_1^u) = x_1, \dot{x}(t_o^u) = \dot{x}_o, x(t_1^u) = \dot{x}_1.$$

El problema más sencillo en la teoría del control optimal consiste, por ejemplo, en encontrar la función u para la cual el funcional

$$T(u) := t_1^u - t_o^u \quad ,$$

toma su valor mínimo; a este problema, lo llamaremos: Problema de la minimización del tiempo o problema del tiempo mínimo.

2.- NOTACIONES Y DEFINICIONES.

2.1. Demos dos números naturales arbitrarios n y r. Sea $U \subset R^m$ un conjunto arbitrario no vacío, con más de un elemento (generalmente es un conjunto compacto, un poliedro convexo, etc).

Sean $x_o, x_1 \in R^n$ dos puntos fijos y sea una función

$$f: R^n \times U \longrightarrow R^n$$

con $f(x,u) = Ax + Bu$, donde $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxk}$ son matrices.

En el ejemplo dado en (1), tenemos que:

$$r = 1,\ n = 2,\ U = [-1,1]$$

$$f: R^2 \times [1,1] \longrightarrow R^2 ,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

<u>DEFINICION</u>: Sea C_u el subconjunto de la clase de funciones de $R \longrightarrow U$, definido de la manera siguiente:

$$u \in C_u : \Longleftrightarrow (i)\ D_u$$

es un intervalo compacto, y $t_o^u := \min D_u$,

$$t_1^u := \max D_u \qquad (D_u = [\, t_o^u \, , \, t_1^u \,]) .$$

(ii) u es continua a trozos (en los puntos de discontinuidad se define como alguno de los límites laterales).

A una función u que satisface las condiciones (i) y (ii) la llamaremos CONTROL.

2.2. Tomemos $u \in C_u$ y consideremos el problema con valor inicial:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t_o^u) = x_o . \qquad (*)$$

Consideremos la función:

$$F(t,y) := Ay + Bu(t) \qquad (t \in [t_o^u, \, t_1^u])$$

entonces el problema (*) es equivalente a:

$$\dot{x} = Fo(I,x), \qquad x(t_o^u) = x_o .$$

DEFINICIONES: Si x^u es la solución del problema (*), entonces x^u es la TRAYECTORIA correspondiente al control u; y a la pareja ordenada (x^u, u) se le llama <u>PROCESO</u>.

Sea (x^u, u) un proceso; entonces sabemos que:

(1) $x^u(t_o^u) = x_o$

(2) $D_{x^u} = [\, t_o^u \,,\, t_1^u]$,

Además, generalmente no ocurre que:

$$x^u(t_1^u) = x_1 .$$

<u>DEFINICIONES</u>: Si (x^u, u) es un proceso tal que:

$$x^u(t_1^u) = x_1 \ ,$$

entonces diremos que (x^u, u) es un <u>PROCESO ADMISIBLE</u>, y al control u lo llamaremos un <u>CONTROL ADMISIBLE</u>.

<u>NOTACION</u>: Denotaremos por Ω_u a la clase de controles admisibles; o sea:

$$\Omega_u := \left\{ u \in C_u / u \ \text{ es admisible} \right\} .$$

Sea J el funcional definido como sigue:

$$J: \Omega_u \longrightarrow R$$

$$u \longrightarrow J(u) := t_1^u - t_o^u \quad .$$

Cuando J alcanza el mínimo absoluto; es decir cuando existe $\bar{u} \in \Omega_u$ tal que:

$$J(\bar{u}) = \min_{u \in \Omega_u} J(u),$$

diremos que $\bar{u}$ es un CONTROL OPTIMAL , y al proceso correspondiente PROCESO OPTIMAL.

DEFINICION. Sea el subconjunto $\sum_T \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$\sum_T = \{x_o \in \mathbb{R}^n : \exists\, u \in \Omega_u \ ; \ x_o \overset{u}{\rightsquigarrow} 0, \ t_1^u - t_o^u \leq T\}$$

NOTACION. El símbolo $x_o \overset{u}{\rightsquigarrow} x_1$ quiere decir que u es un control admisible para los puntos x_o y x_1; en otras palabras, u "lleva" un punto desde la posición inicial x_o hasta la posición final x_1.

Hemos definido Σ_T como el conjunto de puntos en R^n desde los cuales se puede llegar al origen durante un tiempo no mayor que T; se puede demostrar que cuando se llega al origen en un tiempo $T^* < T$, se puede llegar también en el tiempo T.

<u>LEMA 1</u>:

$$\sum_T = \left\{ x \in R^n \,/\, \exists \quad u \in \Omega_U, \quad x \overset{u}{\rightsquigarrow} 0 \ , \ t_1^u - t_o^u = T \right\}$$

<u>PRUEBA</u>: Sea dado un punto en $\sum_T$, y sea v el control que lleva dicho punto al origen de manera que:

$$t_1^v - t_o^v = T^* < T .$$

Definamos el control $u: [0,T] \to U$, como sigue:

$$u(t) := \begin{cases} v(t) & \text{si} \quad t \in [0,T^*] \\ 0 & \text{si} \quad t \in [T^*,T] \ ; \end{cases}$$

este control u es admisible, ya que u es continua a trozos y $0 \in U$.

Para este control, se tiene que la trayectoria después del instante T^* está gobernada por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x,o) = Ax + Bo \ ,$$

o sea, tenemos el siguiente problema con valor inicial:

$$\dot{x} = Ax ,$$

$$x(T^*) = 0,$$

cuya solución es:

$$x(t) = 0 \qquad (t \in [T^*,T]).$$

Este resultado significa que si u es el control y $t \in [T^*,T]$ el punto quedará en el origen.

<u>LEMA 2</u>. $\sum_T$ es convexo, $\forall\, T \in R^+$.

<u>PRUEBA</u>. Sean los puntos iniciales x_o^1 y x_o^2 en $\sum_T$, tenemos que demostrar que el segmento que une a estos dos puntos está contenido en $\sum_T$; o sea, si elegido $\lambda \in [0,1]$ y μ: $1-\lambda$, el punto:

$$x_o^3 := \lambda x_o^1 + \mu\, x_o^2$$

debe pertenecer a $\sum_T$.

Como $x_o^i \in \sum_T$ $(i = 1,2)$, entonces en virtud del LEMA 1 existen controles u_i:

$$u_i\colon [0,T] \longrightarrow U \qquad (i=1,2),$$

tal que la trayectoria x_i correspondiente a u_i lleva el punto x_o^i al origen.

Por otra parte, x_i satisface la ecuación diferencial:

$$x_i = Ax_i + Bu_i \qquad (i = 1,2);$$

luego:

$$(\lambda x_1 + \mu\, x_2)' = A(\lambda x_1 + \mu x_2) + B(\lambda u_1 + \mu u_2)$$

lo que es correcto plantear ya que x_1 y x_2 están definidas sobre el mismo intervalo. Por otra parte:

$$u_2\colon = \lambda u_1 + \mu u_2$$

es un control admisible, ya que es una función continua a trozos y

$$R_{\lambda u_1 + u_2} \subset U,$$

ya que U es convexo.

Llamando $x_3\colon = \lambda x_1 + \mu x_2$, se tiene que:

si $t := 0$, entonces:

$$x_3(0) = \lambda x_o^1 + \mu x_o^2 = x_o^3 \ ,$$

luego la trayectoria parte del punto x_o^3 ; además:

$$x_3(T) = 0,$$

o sea, la trayectoria llega al origen.

Hemos demostrado que para cualquier punto x_o^3 del segmento que une a x_o^1 con x_o^2, existe un control u_3 que lleva el punto al origen en un tiempo T; luego:

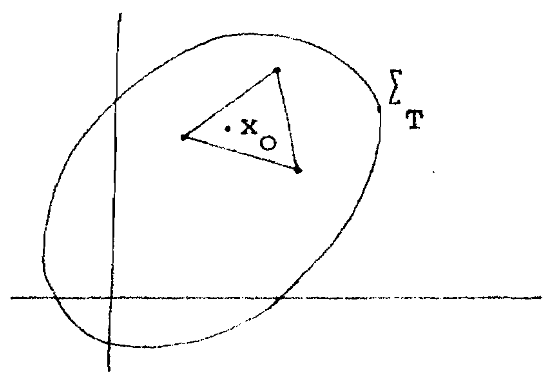
$$x_o^3 \in \sum_T \ ,$$

y de aquí se concluye que $\sum_T$ es convexo.

El siguiente lema dice que cuando se trata de un punto interior de $\sum_T$, desde este punto se puede llegar al origen en un tiempo menor que T; y en consecuencia, si desde un punto de $\sum_T$ no se puede llegar al origen durante un tiempo menor que T dicho punto debe estar en la frontera de $\sum_T$.

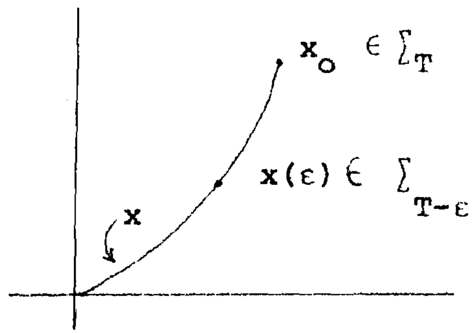
<u>LEMA 3</u>: Sea $x_o \in \mathring{\Sigma}_T$, entonces existe un $T^* \in R^+$ tal que $T^* < T$, y un control u definido en $[0,T^*]$ tal que lleva el punto x_o al origen en el tiempo T^*.

<u>PRUEBA</u>: Ya que $x_o \in \mathring{\Sigma}_T$, hay una vecindad de x_o que está totalmente contenida en Σ_T, y hay un poliedro convexo que está totalmente contenido en esta vecindad y tal que contiene a x_o como punto interior.

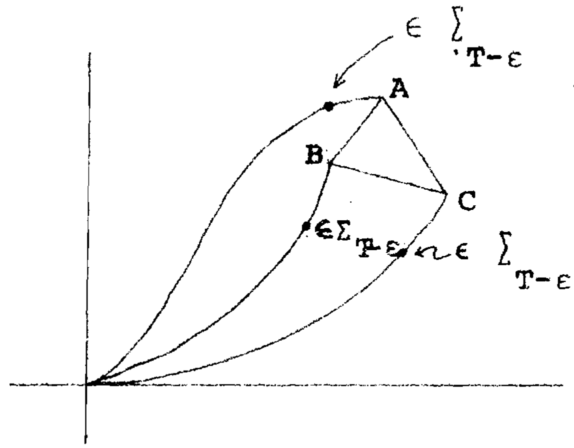


En la figura se explica lo que ocurre cuando $\Sigma_T \subset R^2$. Para cada vértice del poliedro existe un control que lo lleva al origen durante un tiempo T (por LEMA 1).

Sea $\varepsilon > o$ "suficientemente pequeño" en el sentido siguiente: dado un punto $x_o \in R^n$ y (x,u) un proceso que lo lleva al origen, el número $|x(\varepsilon) - x_o|$ es tan pequeño como queramos; gráficamente esto se ve como:



Esto se puede hacer con todas las trayectorias que llevan los vértices del poliedro al origen, como se indica en la figura:



Esto significa que hemos dividido cada trayectoria en dos partes: la "parte pequeña" que exige un tiempo igual a ε para ser recorrida y la "parte grande" formada por puntos de $\Sigma_{T-\varepsilon}$.

Hay un teorema geométrico que dice:

"Dado un poliedro convexo P en R^n, existe un $\varepsilon > 0$ tal que consideradas las bolas de centro en cada vértice y radio ε, y eligiendo un punto en cada una de estas bolas, éstas determinan un poliedro Q convexo; y además si $a \in \mathring{P}$ se puede escoger ε de manera que $a \in \mathring{Q}$.

Entonces sea $\varepsilon > 0$ de manera que x_o sea un punto interior del nuevo poliedro de vértices contenidos en $\Sigma_{T-\varepsilon}$, y entonces $x_o \in \sum_{T-\varepsilon}$.

Esto quiere decir que existe un control u que lleva el punto x_o al origen en un tiempo $T^{*}: = T-\varepsilon$ y tal que

$$T^{*} < T.$$

TEOREMA: Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un poliedro convexo.

Sea u un control admisible que lleva un punto desde la posición $x_o \in \mathbb{R}^n$ al origen, sea x la trayectoria correspondiente. Para que el proceso (x,u) sea optimal es necesario que exista una función ψ no nula que satisfaga la ecuación diferencial lineal:

$$\dot{\psi} = - A^T \psi$$

tal que para cada $t \in [t_o^u , t_1^u]$

$$\max_{v \in U} \langle \psi(t), Bv \rangle = \langle \psi(t), Bu(t) \rangle.$$

PRUEBA: La ecuación diferencial en este caso es:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1)$$

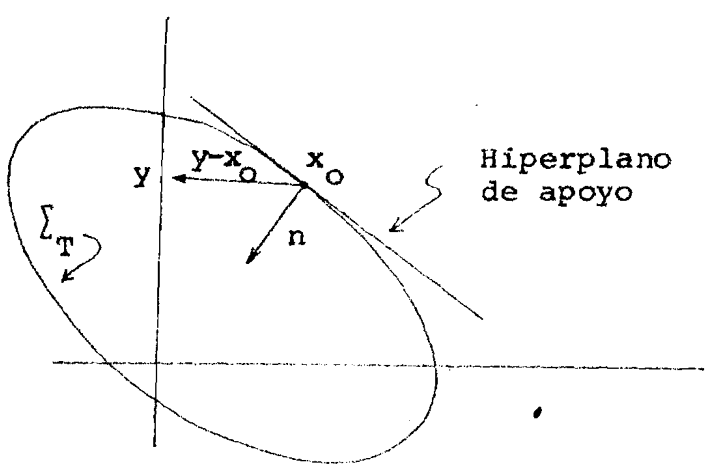
la ecuación diferencial auxiliar será:

$$\dot{\psi} = -A^T\psi \qquad (2).$$

Sea $T: = t_1^u - t_o^u$, y consideremos el conjunto $\sum_T$. Así, el punto inicial x_o es un punto frontera de $\sum_T$, ya que si fuese punto interior se podría llegar al origen en un tiempo menor que T y esto contradice el hecho de que u es un control optimal. Por otra parte, es claro que x_o no puede estar fuera de $\sum_T$.

Se sabe de la geometría, o del análisis funcional que si se tiene un conjunto convexo y se fija un punto en la frontera, existe un hiperplano (hiperplano de apoyo) que lo "separa", en el sentido de que todo el conjunto queda a un lado del hiperplano. En el caso general este hiperplano no está determinado unívocamente; por ejemplo, si en el plano el conjunto convexo es un cuadrado y el punto de la frontera es un vértice hay una infinidad de planos de apoyo.

En nuestro caso ocurre lo siguiente:



En la figura anterior n es el vector normal al hiperplano por x_o, el cual está dirigido hacia la parte del espacio que contiene a $\sum_T$, por lo tanto para cada $y \in \sum_T$ se tiene que:

$$\langle y - x_o, n \rangle \geq 0 \quad . \qquad (5)$$

Sea ψ la solución del siguiente problema con valor inicial:

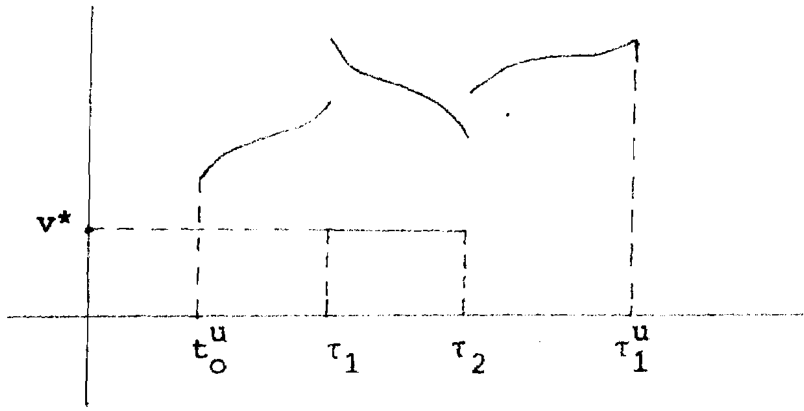
$$\dot{\psi} = -A^T\psi \qquad \psi(t_o^u) = n, \quad (6)$$

vamos a demostrar que para esta ψ se cumple (4).

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $v^* \in U$ y un punto $t \in [t_o^u, t_1^u]$ para los cuales no vale la igualdad; en este caso existe también un interlo $[\tau_1, \tau_2] \subset [t_o^u, t_1^u]$ tal que:

$$\langle \psi(t), Bv^* \rangle > \langle \psi(t), Bu(t) \rangle \quad \forall \; t \in [\tau_1, \tau_2]$$

Para u y v^* tenemos gráficamente:



Construyamos un nuevo control

$$u^*: \left[t_o^u \ , \ t_1^u\right] \longrightarrow U,$$

como sigue:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t) \quad , & \text{si} \quad t \notin [\tau_1, \tau_2] \\ v^* \quad , & \text{si} \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \end{cases} \quad ;$$

este control u^* es una función continua a trozos.

Consideremos el siguiente problema:

$$\dot{x} = Ax + Bv^* \quad , \quad x(t_1^u) = 0 \ ;$$

sea x^* la solución de este problema, entonces:

(i) $x^*: \left[t_o^u \ , \ t_1^u\right] \longrightarrow R^n$

(ii) $x^*(t_1^u) = 0.$

Definamos $x_o^* := x^*(t_o)$; este punto x_o^* debe pertenecer a $\sum_T$, porque se puede llegar desde este punto al origen durante un tiempo T, luego en virtud de (5):

$$\langle x_o^* - x_o, n \rangle \geq 0 \qquad (7).$$

Sea x una solución de (1), y ψ una solución cualquiera de (2), entonces:

$$\langle x,\psi \rangle' = \langle Ax+Bu,\psi \rangle + \langle x,-A^T\psi \rangle,$$

pero:

$$\langle x,-A^T\psi \rangle = \langle -Ax,\psi \rangle,$$

luego:

$$\langle x,\psi \rangle' = \langle \psi, Bu \rangle .$$

Entonces para el control u, de acuerdo a la regla de Newton-Leibniz, se tiene:

$$\int_{t_o^u}^{t_1^u} \langle \psi, Bu \rangle = \underbrace{\langle x,\psi \rangle (t_1^u)}_{=0} - \langle x,\psi \rangle (t_o^u) \; ;$$

y análogamente para el control u^*:

$$\int_{t_o^u}^{t_1^u} \langle \psi, Bu^* \rangle = \underbrace{\langle x^*, \psi \rangle (t_1^u)}_{=0} - \langle x^*, \psi \rangle (t_o^u).$$

Siendo ψ la solución del problema (6) y restando las igualdades anteriores, se tiene:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \{ \langle \psi(t), Bu(t) \rangle - \langle \psi(t), Bv^* \rangle \} = \langle x_o^* - x_o, n \rangle.$$

En esta igualdad la función subintegral es negativa por la manera en que hemos definido v^*, luego:

$$\langle x_o^* - x_o, n \rangle < 0,$$

y esto es una contradicción con (7).

Por lo tanto deber ser

$$\langle \psi(t), Bv \rangle \leq \langle \psi(t), u(t) \rangle \quad \forall\, t \in \left[t_o^u, t_1^u \right],$$

$$\forall\, v \in U.$$

Con este razonamiento hemos demostrado que para cada t en $\left[t_o^u, t_1^u\right]$, la función:

$$U \ni v \longrightarrow \langle \psi(t), Bv \rangle$$

asume su máximo, cuando $v := u(t)$.

Al demostrar el principio de Máximo para el caso lineal, consideramos que U es un poliedro convexo; frecuentemente sucede que cuando en un problema general se trata del caso convexo, las condiciones necesarias son también condiciones suficientes; por ejemplo, cuando se tiene una función convexa de una variable y la derivada de ésta en un punto interior de su dominio es igual a cero, esta condición es suficiente <u>hasta</u> para un mínimo absoluto. Luego es natural examinar este aspecto en la condición de Pontriaguin: si un proceso satisface el principio de máximo, este proceso es optimal o no. Se puede demostrar que en el problema de la minimización del tiempo y en el caso lineal la condición de Pontriaguin es <u>casi</u> suficiente, lo que hace falta es añadir una condición más al poliedro convexo U. Para preparar esta condición adicional haremos consideraciones previas.

Sea A una aplicación lineal de R^n en R^n (no haremos diferencia entre la aplicación lineal y la representación matrical de la aplicación), entonces:

<u>DEFINICION</u>: Sea A una matriz $n \times n$ y S un subespacio propio de R^n; se dice que S es invariante respecto a la aplicación A si para cada $x \in S$, se tiene que $Ax \in S$.

Dada una aplicación lineal $A: R^n \longrightarrow R^n$ y un $a \in R^n$ no nulo, hay una condición necesaria y suficiente para que exista un subespacio invariante S respecto de A tal que $a \in S$; esta condición es:

$$a, Aa, A^2, \ldots, A^{n-1}a$$

son linealmente dependientes.

Vamos a considerar el caso lineal donde:

$$f(y,v) = Ay + Bv,$$

y U es un poliedro convexo que satisface dos condiciones:

i) U contiene al origen, pero el origen no es un vértice, y

ii) Cualquier arista w de U es tal que los vectores:

$$Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw,$$

son linealmente independientes; es decir, dada cualquier arista w de U y para cualquier subespacio invariante S

respecto de A, se tiene que $Bw \notin S$.

Cuando se cumple (ii) se dice que U tiene la <u>POSICION GENERAL</u>;

<u>TEOREMA</u>: Sea (x,u) un proceso que satisface el principio de máximo, siendo:

$$f: R^n \times U \longrightarrow R^n$$

dada por:

$$f(y,v) := Ay + Bv,$$

donde U es un poliedro convexo en R^r, que tiene la posición general y que contiene al origen pero éste no es un vértice; entonces (x,u) es un proceso optimal para el problema de la minimización del tiempo.

Antes de dar una prueba de este teorema, veamos el siguiente lema:

<u>LEMA</u>: Sea ψ una solución no trivial de $\dot{\psi} = -A^T\psi$, sea

$$[\tau_1, \tau_2] \subset [t_o^u, t_1^u].$$

Consideremos el conjunto:

$$S := \{y \in R^n / < \psi(t), y > = 0, t \in [\tau_1, \tau_2]\},$$

entonces S es un subespacio invariante respecto de A.

PRUEBA:

i) S es un subespacio:

Dados x_1, $x_2 \in S$ y α, $\beta \in R$, se tiene:

$$<\psi(t),\alpha x_1 + \beta x_2> = \alpha <\psi(t),x_1> + \beta<\psi(t), x_2> = 0,$$

luego:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in S$$

ii) S es un subespacio propio:

Razonamiento por reducción al absurdo: si fuese $S=R^n$, entonces ocurriría que $<\psi(t),y> = 0 \quad \forall \; y \in R^n$, de donde $\psi(t) = 0$ para algún $t \in [\tau_1, \tau_2]$; pero ésto no puede ser, ya que ψ es solución de una ecuación diferencial lineal y si en algún punto de $[\tau_1, \tau_2]$ es cero, entonces es cero en todo el intervalo $[t_o, t_2]$.

iii) S es invariante:

Sea $x \in S$, entonces para cada $t \in [\tau_1, \tau_2]$ se tiene que $< \psi(t), x> = 0$, luego:

$$<\dot\psi(t),x> = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow <-A^T\psi(t),x> = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow <\psi(t),Ax> = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ax \in S.$$

<u>PRUEBA DEL TEOREMA</u>: Razonando por reducción al absurdo, supongamos que (x,u) no es un proceso optimal, y entonces existe un control $\bar{u}$ que está definido en un intervalo $[t_o,\bar{t}_1]$ tal que $\bar{t}_1 < t_1$ y lleva el punto desde la posición inicial x_o hasta la posición final x_1, que podemos tomarla como el origen. Sea $\bar{x}$ la trayectoria correspondiente a $\bar{u}$.

Sea ψ la función que aparece en el enunciado del principio de máximo, el cual se cumple para el proceso (x,u).

Calculemos $<\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1)>$:

$$<\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1)> = <\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1)> - <\psi(\bar{t}_1),\bar{x}(\bar{t}_1)>$$

$$= <\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1)> - <\psi(t_o),x(t_o)> - (<\psi(\bar{t}_1),\bar{x}(\bar{t}_1)> -$$

$$- <\psi(t_o),\bar{x}(t_o)>),$$

en lo anterior se toma en cuenta que $\bar{x}(\bar{t}_1) = 0$, y que $x(t_o) = \bar{x}(t_o) = x_o$.

En la página 17 demostramos que:

$$<\psi, x>' = <\psi,Bu> ,$$

entonces análogamente se ve que:

$$<\psi,\bar{x}>' = <\psi,B\bar{u}>.$$

De acuerdo a la regla de Newton-Leibnitz; tenemos:

$$<\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1) > = \int_{t_o}^{\bar{t}_1} \{<\psi, Bu> - <\psi,B\bar{u} >\};$$

la función subintegral es mayor que cero, ya que u satisface el principio de máximo y $<\psi,Bu >$ es el máximo para la función $<\psi,Bv >$ ($\forall$ $v \in U$); por lo tanto:

$$<\psi(\bar{t}_1), x(\bar{t}_1) > \geq 0. \qquad (*)$$

Por otra parte tenemos que:

$$<\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1) > = <\psi(\bar{t}_1),x(\bar{t}_1)> - <\psi(t_1),x(t_1)> = -\int_{\bar{t}_1}^{t_1} <\psi,Bu >;$$

pero $<\psi,Bu >$ debe ser mayor o igual a cero, ya que

$$<\psi(t),Bv > \leq <\psi(t),Bu(t) >$$

para cada t fijo en $[\bar{t}_1,t_1]$ y cada $v \in U$, y como $0 \in U$:

$$<\psi(t),Bu(t)> \geq 0 \quad \text{para cada} \quad t \in [t_1,t_1];$$

luego:

$$<\psi(\bar{t}_1) > \leq 0 \qquad (**)$$

De (*) y (**) se concluye que:

$$< \psi(\bar{t}_1) \ , \ x(\bar{t}_1) > \ = \ 0.$$

Consideremos la función:

$$[\bar{t}_1, t_1] \ni t \longrightarrow <\psi(t), Bu(t)> \ ,$$

demostremos que ésta es la función nula sobre el intervalo

$[\bar{t}_1, t_1]$:

hemos visto que:

$$0 = <\psi(\bar{t}_1), x(\bar{t}_1)> \ = \ - \int_{\bar{t}_1}^{t_1} <\psi(t), Bu(t)> dt,$$

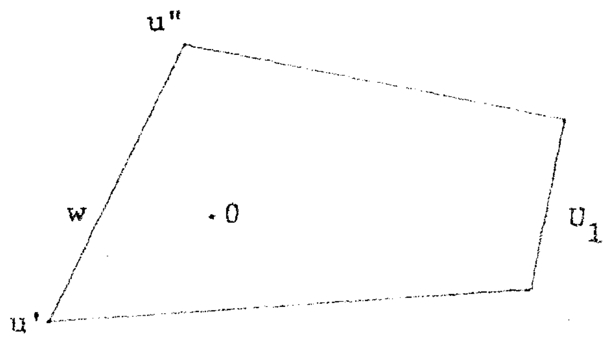
con:

$$<\psi(t), Bu(t)> \ \geq 0 \qquad (\forall t \in [\bar{t}_1, t_1]),$$

entonces:

$$<\psi(t), Bu(t)> \ = 0 \qquad (\forall \ t \in [\bar{t}_1, t_1]) \ .$$

Ahora bien, sea U_1 la cara del poliedro U que contiene al origen, sea w una arista de U_1 cuyos vértices son u' y u'':



Para cada t fijo en $[\bar{t}_1, t_1]$ consideremos la función:

$$U_1 \ni v \longrightarrow \langle \psi(t), Bv \rangle ;$$

se tiene que:

$$\langle \psi(t), Bv \rangle \geq \langle \psi(t), Bu(t) \rangle = 0,$$

para cada t fijo en $[\bar{t}_1, t_1]$, y variando v en U_1; por otra parte:

$$\langle \psi(t), B0 \rangle = 0 .$$

Es conocido que si una función lineal asume en un punto interior de un poliedro su máximo, entonces esta función es constante. Por lo tanto, asume los mismos valores en u' y u''; o sea, para cada $t \in [\bar{t}_1, t_1]$

$$\langle \psi(t), Bu' \rangle = \langle \psi(t), Bu'' \rangle$$

y:

$$\langle \psi(t), Bw \rangle = 0 \qquad (\forall\ t \in [\bar{t}_1, t_1]).$$

Por el lema anterior, Bw pertenece a algún subespacio invariante respecto de A, y esto contradice que U tiene la posición general.

Consideremos de nuevo el ejemplo introductorio:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\dot{\psi}_1 = 0 \qquad y \qquad \dot{\psi}_2 = -\psi_1$$

resolviendo:

$$\psi_1(t) = c \text{ (constante)}$$

$$\psi_2(t) = -ct+d \qquad\qquad (c^2 + d^2 \neq 0)$$

La función $\psi := (\psi_1, \psi_2)$ debe satisfacer:

$$\max_{v \in [-1,1]} \langle \psi(t), Bv \rangle = \langle \psi(t), Bu(t) \rangle$$

o sea:

$$\max_{v \in [-1,1]} \psi_2(t) v = \psi_2(t)\, u(t)$$

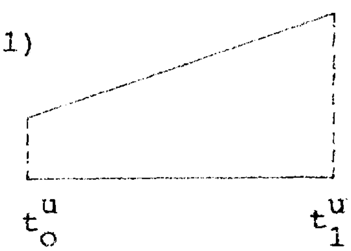
y haciendo los cálculos correspondientes tenemos:

$$\max_{v \in [-1,1]} \{(-ct+d)\ v\} = (-ct+d)u(t).$$

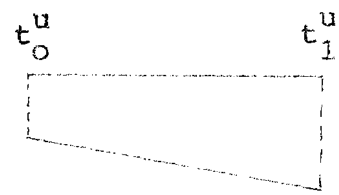
Hay cuatro posibilidades para la función

$[t_o^u,\ t_1^u] \ni t \longrightarrow -ct+d$, que de acuerdo a las siguientes figuras son:

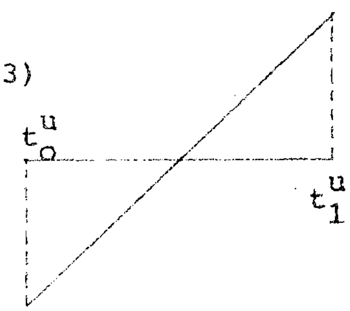
(1)



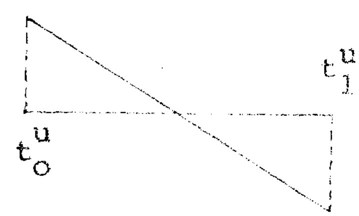
(2)



(3)



(4)



Anotamos $R_{\psi_2} = \{y \in \mathbb{R} : y = \psi_2(t)$, para algún $t \in [t_o^u\ ,\ t_1^u]$

Sea:

(1) $R_{\psi_2} \subset R_o^+\ ,\ \neq \{o\}$

(2) $R_{\psi_2} \subset R_o^-\ ,\ \neq \{o\}$

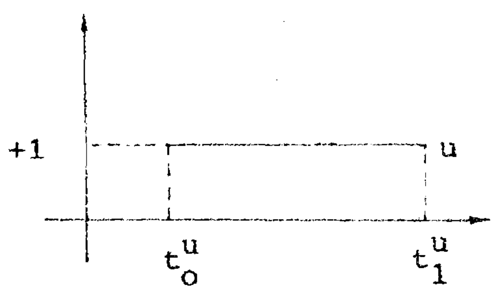
(3-4) $R_{\psi_2} \not\subset R_o^+ \; , \not\subset R_o^-$

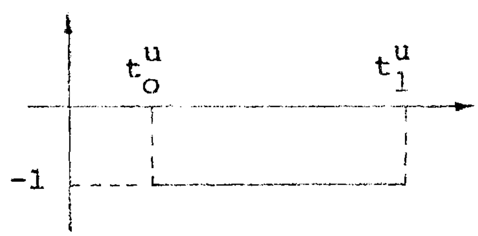
$R_{\psi_2} = \{o\}$ no puede ser, porque en este caso $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ sería la función identicamente igual a cero.

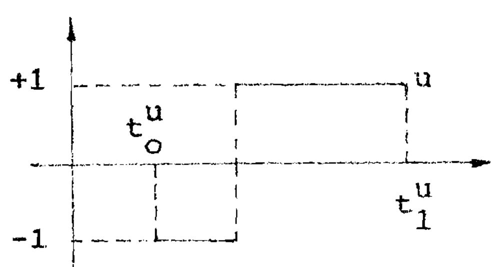
Entonces el

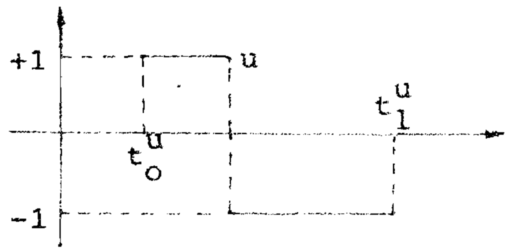
$$\max_{v\ [-1,1]} \{(-ct+d)v\} \quad ,$$

es en cada caso:









Los puntos de discontinuidad del control u se llaman PUNTOS DE CONMUTACION.

El estudio de este problema a través del principio del máximo nos da, como se ve, más información que el estudio realizado mediante la programación dinámica.

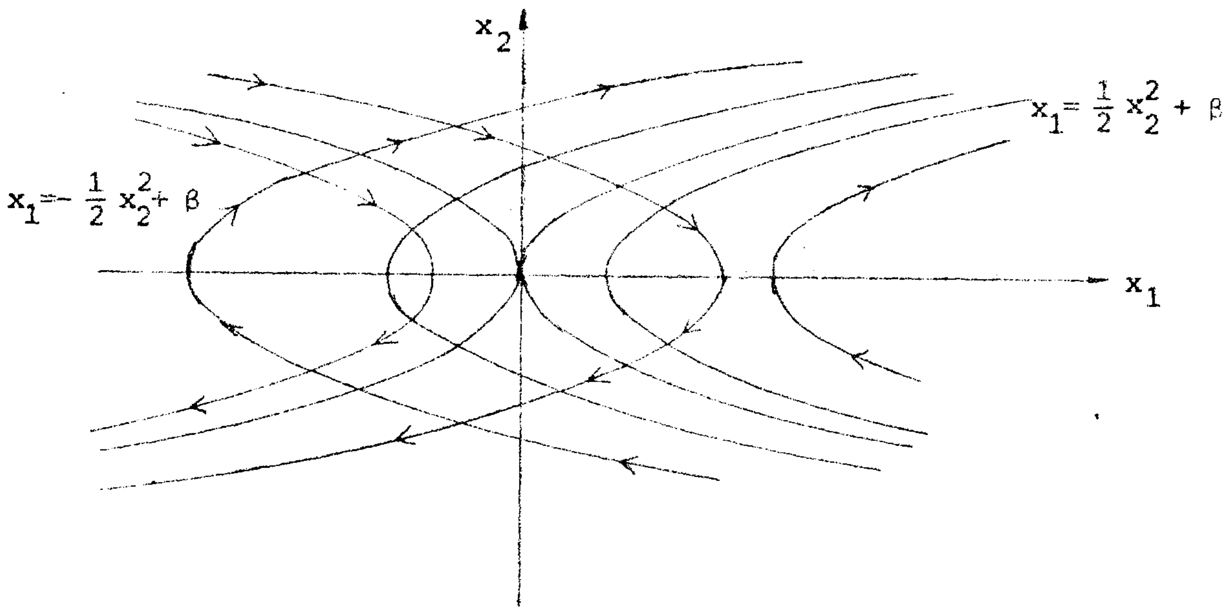
Entonces, ya sabemos que el control vale 1; o vale -1; o asume ambos valores pero con un solo punto de conmutación ; por lo tanto para determinar las trayectorias tenemos:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = 1\end{cases} \qquad \text{o} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -1\end{cases},$$

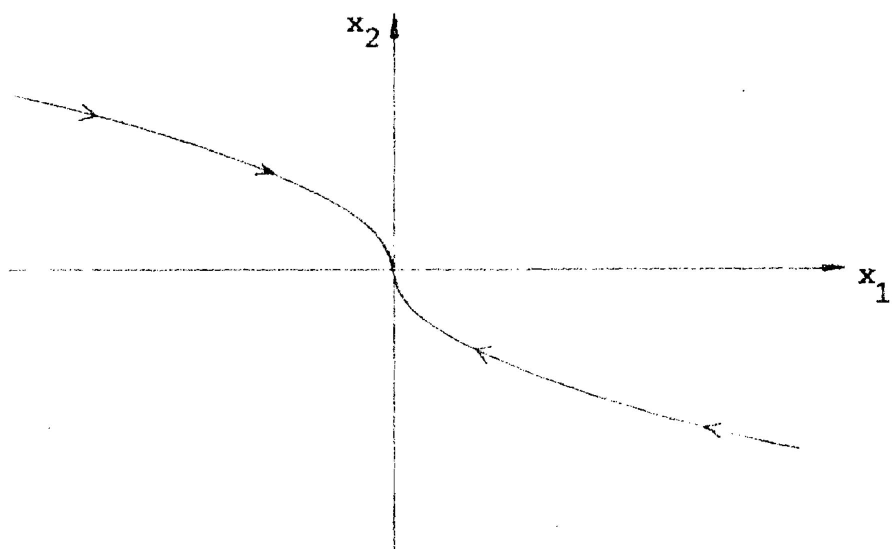
Resolviendo ambos sistemas, obtenemos que:

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + \beta \text{ , para el sistema (I); y}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + \beta \text{ , para el sistema (II).}$$

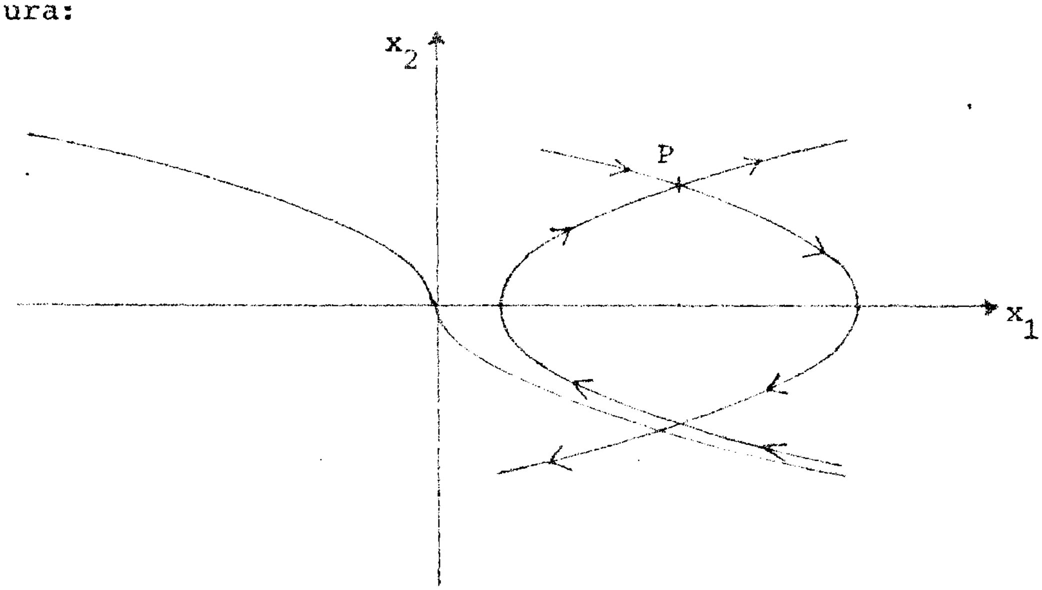


En cada caso hay solo una curva que llega al origen del sistema de coordenadas; uniendo estas dos curvas tenemos:

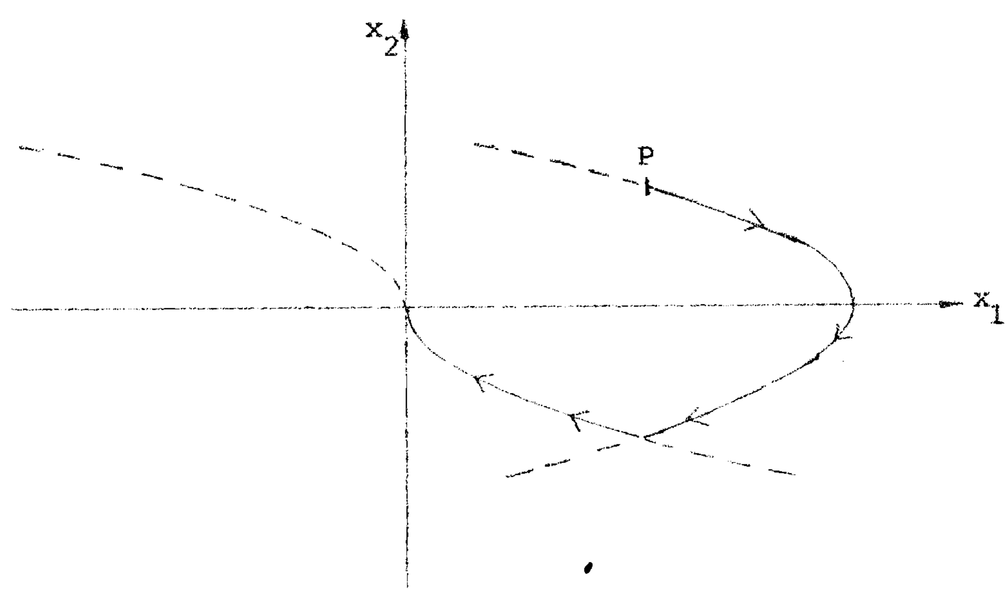


La unión de estas dos curvas divide en dos partes el plano; tomemos, por ejemplo, un punto P del plano que esté "por encima" de la curva, y determinemos cuál es la trayectoria óptima para llevar este punto desde su posición inicial hasta el origen.

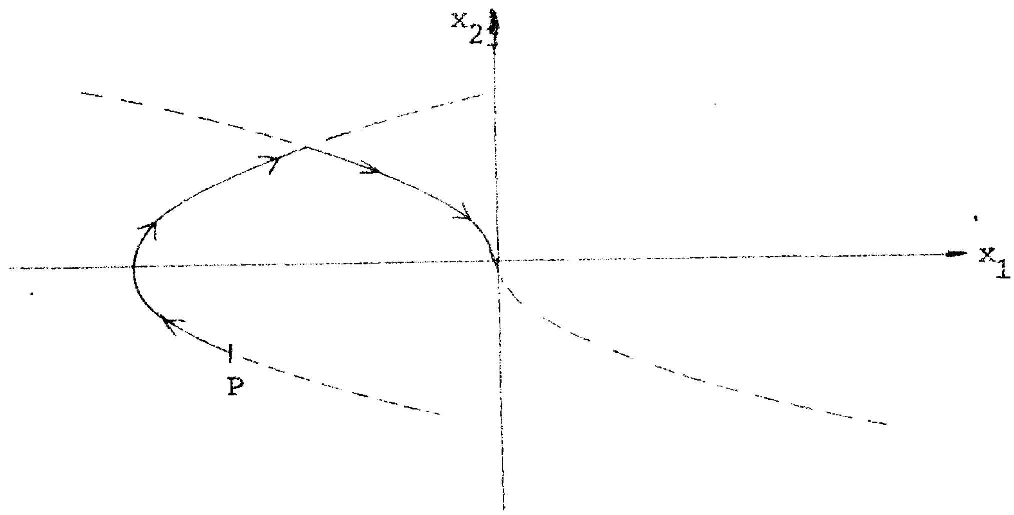
Por el punto P pasan: una solución del sistema (I) correspondiente al control $u = 1$ y una solución del sistema (II) correspondiente al control $u = -1$, como se indica en la figura:



lo que indica que la trayectoria óptima correspondiente al punto P es:



De manera análoga, se ve que si tomamos el punto "por debajo" de la curva, la trayectoria óptima correspondiente es:



En resumen, hemos demostrado que eligiendo un punto arbitrario en el plano hay solo una trayectoria que satisface el principio de máximo.

Tomando en cuenta las condiciones suficientes, se obtiene inmediatamente, que esta trayectoria misma es óptima.

EL CASO GENERAL

Demos dos números naturales arbitrarios n y r. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto arbitrario no vacío, con más de un elemento. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto, y

$$f: D \times U \to \mathbb{R}^n$$

es una función continua, con sus derivadas parciales continuas respecto a las $n+1$ variables

$$\partial_t f: D \times U \to \mathbb{R}^n, \quad \partial_x f: D \times U \to \mathbb{R}^{n+n}.$$

Como controles, consideremos las funciones $u: \left[t_o^u, t_1^u\right] \to U$, continuas a trozos. Tomando dos puntos (t_o, x_o), $(t_1, x_1) \in D$, un control u se dice admisible respecto al problema

$$\dot{x} = f\, o(t, x, u)$$

$$x(t_o) = x_o, \; x(t_1) = x_1$$

si $t_o^u = t_o$, $t_1^u = t_1$ y el dicho problema de contorno tiene solución.

Ahora consideremos también una funcional de tipo

$$J(x,u) = \int_{t_o^u}^{t_1} g \circ (t,x,u)$$

para minimizar, donde g, $\partial_t g$, $\partial_x g$ son continuas sobre $D \times U$.

Denotando el conjunto de los controles admisibles con $\Omega(x_o, x_1)$, nuestro problema esquematicamente es

$$\dot{x} = f \circ (t,x,u)$$

$$x(t_o) = x_o,\ x(t_1) = x_1 \qquad \text{(A)}$$

$$J(x,u) = \int_{t_o^u}^{t_1^u} g \circ (t,x,u) \longrightarrow \min!$$

En el caso considerado $f(t,x,u) = Ax + Bu$, $g(t,x,u) = 1$, o bien, $J(x,u) = t_1^u - t_o^u$; la desigualdad

$$< \psi(t), Bv > \ \leq \ <\psi(t), Bu(t)>$$

es equivalente a

$$< \psi(t), Ax(t) + Bv > + 1 \leq$$

$$\leq <\psi(t), Ax(t) + Bu(t)> + 1 .$$

Por analogía con la física, denotemos con H la siguiente función:

$$H(x,v,\psi) := \langle \psi, Ax + Bv \rangle + 1 .$$

Esta función se denomina función de Hamilton. Se ve inmediatamente, que la ecuación original y la ecuación auxiliar se expresan en términos de la función de Hamilton respectivamente:

$$\dot{x} = \partial_{\psi} Ho(x,u,\psi),$$

$$\dot{\psi} = -\partial_{x} Ho(x,u,\psi) .$$

Y el principio de máximo demostrado para el caso lineal toma la siguiente forma:

$$\max_{v \in U} H(x(t), v, \psi(t)) = H(x(t), u(t), \psi(t)).$$

Con esta reformulación tenemos la posiblidad de la generalización del teorema de principio de máximo. En el caso del problema (A) definamos la función de Hamilton de manera similar:

$$H(t,x,u,\psi) = \langle \psi, f(t,x,u) \rangle + g(t,x,u)$$

El principio de Máximo de Pontriaguin. Sean $u \in \Omega$ un control optimal, x la trayectoria correspondiente al control u, es decir, x es la solución del problema de contorno

$$\dot{x} = \partial_{\psi} Ho(t,x,u,\psi)$$
$$x(t_o^u) = x_o,\ x(t_1^u) = x_1 \tag{1}$$

En este caso existe una solución no nula de la ecuación diferencial

$$\dot{\psi} = - \partial_x Ho(t,x,u,\psi) \tag{2}$$

tal que, para todo $t \in \left[t_o^u, t_1^u\right]$ se tiene

$$\max_{v \in U} H(t,x(t), v,\psi(t)) = H(t,x(t),u(t),\psi(t)).$$

<u>OBSERVACION</u>. La ecuación (1) no depende de la variable ψ.

II. CONTROLABILIDAD, OBSERVABILIDAD

Todavía no hemos examinado el conjunto $\sum_T$ de los puntos en los cuales el sistema es controlable al cero. Si un punto x_o no pertenece al $\sum_T$, entonces sobre $[0,T]$ no existe un control admisible que lleva el x_o al cero. Además si x_o no pertenece al $\sum_T$, $T > 0$, entonces el conjunto de los controles admisibles respecto a las condiciones de contorno

$$x(o) = x_o \ , \quad x(T) = 0$$

es vacío. Por eso el problema de la contrabilidad es un problema muy importante del punto de vista de la optimización.

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B = \mathbb{R}^{nxm}$. Sea el conjunto U el espacio $\mathbb{R}^m$. Luego, los controles considerados son todas las funciones continuas a trozos definidas sobre un intervalo compacto, con sus valores en $\mathbb{R}^m$. El sistema (1) se dice controlable al cero sobre $[t_o,t_1]$ del punto x_o, si existe un control admisible $u:[t_o,t_1]$, tal que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t_o) = x_o,\ x(t_1) = 0$$

tiene solución. El sistema (1) se dice totalmente contro lable al cero sobre $[t_o, t_1]$, si para todo punto $x_o \in \mathbb{R}^n$, el sistema (1) es controlable al cero sobre $[t_o, t_1]$ del punto x_o.

Sea ϕ la matriz fundamental del sistema (1), donde

$$\phi:\ [t_o, t_1] \times [t_o, t_1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

es decir, la aplicación $t \to \phi(t, \tau)$ es una solución ma - tricial del sistema homogeneo

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= A\phi \\ \phi\ (\tau, \tau) &= id_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \qquad (2)$$

Se sabe que la solución del sistema (1) con la condición inicial $x(t_o) = x_o$, se expresa mediante la fórmula de Cau chy:

$$x(t) = \phi(t, t_o)\ x_o + \int_{t_o}^{t} \phi\ (t,s)\ Bu(s)\ ds \qquad (3)$$

Cuando A es constante, se tiene $\phi(t, t_o) = \exp A(t-t_o)$.

Cuando A y B son funciones matriciales, tienen lugar fórmulas similares, luego todos los resultadados se pueden generalizar fácilmente para este caso.

Definamos una matriz $W(t_o,t_1)$ de la siguiente forma:

$$W(t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \phi(t_1,t)\ B.B^T\ \phi(t_1,t)^T\ dt \tag{4}$$

La controlabilidad total del sistema (1) se caracteriza mediante la matriz $W(t_o,t_1)$.

<u>TEOREMA</u>. El sistema (1) es totalmente controlable al cero sobre $[t_o,t_1]$ si y solo si la matriz $W(t_o,t_1)$ es positiva definida.

<u>DEMOSTRACION</u>. Supongamos que $W(t_o,t_1)$ es una matriz positiva definida. Entonces es invertible. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera. Tomemos el siguiente control

$$u: [t_o,t_1] \to \mathbb{R}^n$$

definido como sigue:

$$u(t) := B^T\ \phi(t_1,t)^T\ W^{-1}(t_o,t_1)\ \phi(t_1,t_o)x\ . \tag{5}$$

Utilizando la fórmula de Cauchy para el punto inicial y para el control (5), se tiene :

$$y(t_1) = \phi(t_1,t_o)x - \int_{t_o}^{t_1} \phi(t_1,t)\ BB^T\ \phi(t_1 t)^T\ W^{-1}(t_o,t_1)\phi(t_1,t_o)x\ dt$$

$$= \phi(t_1,t_o)x - \int_{t_o}^{t_n} \phi(t_1,t)\ BB^T\ \phi(t_1,t)^T dt\ W^{-1}(t_o,t_1)\phi(t_1,t_o)x$$

$$= \phi(t_1,t_o)\ x - W(t_o,t_1)\ W(t_o,t_1)^{-1}\ \phi(t_1,t_o)\ x = 0\ .$$

Por lo tanto el sistema (1) es totalmente controlable al cero sobre el intervalo $[t_o,t_1]$.

Ahora supongamos que el sistema (1) es totalmente contro lable al cero sobre el intervalo $[t_o,t_1]$, pero la matriz $W(t_o,t_1)$ no es positiva definida. Entonces debe existir un vector x no nulo, tal que

$$<x_1\ W(t_o,t_1)x > \leq 0\ .$$

Por otra parte, tenemos

$$<x_1\ W(t_o,t_1)x > = \int_{t_o}^{t_1} <x,\ \phi(t_1,t)BB^T\ \phi(t_1,t)^T x > dt =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} <B^T\ \phi(t_1,t)^T x,\ B^T\ \phi(t_1,t)^T x > dt =$$

$$= \int_{t_o}^{t} \|\ B^T\ \phi(t_1,t)^T x\ \|^2\ dt\ \leq 0\ .$$

En virtud de la continuidad del integrando, se tiene

$$B^T \phi(t_1,t)^T x = 0 \qquad (t \in [t_o,t_1] \tag{6}$$

Tomando en cuenta el hecho que el sistema (1) es totalmente controlable sobre $[t_o,t_1]$ obtenemos que para el punto $x_1 = -\phi(t_1,t_o)^{-1}x$ existe un control

$$u:[t_o,t_1] \to \mathbb{R}^m \ ,$$

tal que

$$\phi(t_1,t_o)x_1 + \int_{t_o}^{t_1} \phi(t_1,t)\ Bu(t)dt = 0 \ ,$$

es decir,

$$x = \int_{t_o}^{t_1} \phi(t_1,t)\ Bu(t)dt \ . \tag{7}$$

Calculemos la norma de x, utilizando (7)

$$\| x\|^2 = \langle x,x \rangle = \langle x\ ,\ \int_{t_o}^{t_1} \phi(t_1,t)\ Bu(t)dt \rangle =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \langle x\ ,\ \phi(t_1,t)\ Bu(t) \rangle\ dt =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \langle B^T \phi(t_1,t)^T x\ ,u(t) \rangle\ dt = 0 \ .$$

Esto muestra que la matriz $W(t_o,t_1)$ es positiva definida.

<u>OBSERVACION</u>. Si el sistema (1) es totalmente controlable al cero, entonces la matriz $W(t_o,t_1)$ es positiva definida, por lo tanto $W(t_o,t_1)$ es invertible. Si $W(t_o,t_1)$ es invertible, entonces, tomando en cuenta la primera parte de la prueba del teorema se obtiene la controlabilidad del sistema. A partir de esto obtenemos la siguiente afirmación:

"El sistema (1) es totalmente controlable al cero sobre $[t_o,t_1]$ si y solo si la matriz $W(t_o,t_1)$ es invertible".

Ahora, vamos a probar otra condición necesaria y suficiente para la controlabilidad total al cero del sistema (1).

<u>TEOREMA</u>. El sistema (1) es totalmente controlable al cero sobre $[t_o,t_1]$ si y solo si, la condición de Kalman, es decir, la siguiente condición de rango tiene lugar:

$$\text{rango } (B,\ AB, \ldots\ldots, A^{n-1}B) = n\ . \tag{8}$$

<u>DEMOSTRACION</u>. a) Supongamos que (1) no es totalmente controlable al cero sobre $[t_o,t_1]$. En este caso la matriz $W(t_o,t_1)$ no es positivamente definida. Probaremos que $W(t_o,t_1)$ es semidefinida positiva.

En efecto, $W(t_o,t_1)$ es simétrica y se tiene

$$< W(t_o,t_1)x,x > = < \int_{t_o}^{t_1} e^{A(t_1-t)} BB^T e^{A^T(t_1-t)} dt\, x,x > =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} < e^{A(t_1-t)} BB^T e^{A^T(t_1-t)} x,x > dt =$$

$$= \int_{t_o}^{t} \| B^T e^{A^T(t_1-t)} x \|^2 dt \geq 0 .$$

Si en el punto $x \neq 0$ la forma

$$x \longrightarrow < W(t_o,t_1)x,x >$$

se anula, entonces en virtud de la continuidad y la no-vegatividad de la norma cuadrada

$$\| B^T e^{A^T(t_1-t)} x \|^2 ,$$

la función

$$t \longrightarrow \phi(t) = \| B^T e^{A^T(t_1-t)} x \|^2$$

también se anula en cada punto del intervalo $[t_o,t_1]$.

Luego,

$$B^T e^{A^T(t_1-t)} x = 0 \qquad (9)$$

La k-ésima derivada de (9) respecto a t es

$$B^T e^{A^T(t_1-t)} (-A^T)^k x = 0 \qquad (k=0,\ldots,n-1) \tag{10}$$

Sustituyendo en (10) $t: = t_1$, se tienen

$$B^T (A^T)^k x = 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n-1) \tag{11}$$

Por lo tanto el rango de la matriz

$$(B,\ AB,\ldots,A^{n-1}B)$$

formada de las matrices A^kB $(k = 0,\ldots,\ n-1)$ menor que n, es decir la condición de Kalman no tiene lugar.

Ahora, supongamos que el

$$\text{rango}(B,AB,\ldots,\ A^{n-1}\ B) < n.$$

Luego, existe un vector $x \neq 0$, tal que

$$B^T x = B^T A^T x = \ldots = B^T (A^T)^{n-1} x = 0\ . \tag{12}$$

Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, existe un polinomio de grado n, tal que A^T es una raíz del polinomio, es decir, deben existir constantes $c_o, c_1, \ldots, c_{n-1}$, tales que

$$(A^T)^n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (A^T)^i \tag{13}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$B^T (A^T)^n x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \, B^T (A^T)^i x = 0 \tag{14}$$

Utilizando (12), (13) y (14) por inducción se demuestra que

$$B^T (A^T)^k x = 0 \qquad \text{(para todo k)} .$$

Luego, se tiene

$$B^T e^{A^T(t_1-t)} x = B^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^T (A^T)^k}{k!} \quad (t_1-t)^k x = 0 .$$

Ahora, se demuestra facilmente, que la forma cuadrática

$$x \longrightarrow \langle W(t_o,t_1)x,x \rangle$$

se anula en $x \neq 0$. En efecto,

$$\langle W(t_o,t_1) x,x \rangle = \langle \int_{t_o}^{t_1} e^{A(t_1-t)} BB^T e^{A^T(t_1-t)} dt \; x,x \rangle =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} < e^{A(t_1-t)} B \, (B^T e^{A^T(t_1-t)} x), x > dt = 0 \ .$$

Por lo tanto el sistema no es totalmente controlable al cero sobre el intervalo $[t_o, t_1]$.

OBSERVACION.

1) La condición de Kalman no depende del intervalo $[t_o, t_1]$, entonces la condición de Kalman tiene lugar si y solo si, el sistema (1) es totalmente controlable al cero sobre un intervalo $[t_o, t_1]$ cualquiera.

2) La suficiencia del principio de máximo, se prueba de manera similar en el caso, cuando el conjunto U es un poliedro convexo que contiene el cero en su interior y la condición de Kalman esta satisfecha por el sistema. Entonces tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA. Supongamos que el sistema (1) es totalmente controlable al cero, y el conjunto U es un poliedro convexo que contiene el cero en su interior. Luego, un proceso (x,u) es óptimo, si verifica el principio de máximo de Pontriaguin.

La condición de la controlabilidad es una condición -

cualitativa, perteneciente a la teoría de sistemas. Entonces, el principio de máximo con su carácter cuantitativo tiene también un carácter cualitativo en la teoría de sistemas.

Ahora consideremos el sistema (1) de nuevo con una observación:

$$y = Cx \tag{15}$$

donde C es una matriz de $n \times k$.

El sistema (1) con la observación (15) se dice totalmente observable sobre un intervalo $[t_o, t_1]$ si todo par (u,y) de control y observación determina unívocamente el estado inicial x_o.

De otra manera esto es, si

$$y(t) = C(\phi(t,t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} \phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau) \tag{16}$$

e

$$y(t) = C(\phi(t,t_o)x_1 + \int_{t_o}^{t} \phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau) \quad \forall\, t \in [t_o, t_1], \tag{17}$$

entonces $x_o = x_1$.

<u>OBSERVACION</u>. La definición se puede reducir considerando solamente un sistema controlado con el control nulo, puesto

que la definición no depende esencialmente del control. En efecto, si un estado inicial x_o corresponde unívocamente a una observación respectiva del sistema controlado con $u = 0$, entonces este estado inicial x_o también corresponde unívocamente a una observación respectiva del sistema controlado con un control u cualquiera. Supongamos lo contrario, es decir, se tienen (16) y (17). Entonces la diferencia de (16) y (17) es

$$0 = C\,\phi(t,t_o)\,(x_o - x_1)\;.$$

Luego, la observación 0 corresponde a la condición inicial $x_o - x_1$. Pero el sistema controlado con $u = 0$ es observable unívocamente. Por lo tanto, $x_o = x_1$. La afirmación recíproca es inmediata, es decir, si para todo control u, la condición inicial esta determinada unívocamente por la observación entonces para el control $u = 0$ también la condición inicial queda determinada unívocamente por la observación.

Ahora, definamos una matriz $M(t_o,t_1)$ de la siguiente forma:

$$M(t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \phi^T(t,t_o)\, C^T\, C\, \phi(t,t_o)\,dt\;. \tag{18}$$

Vamos a ver como se puede caracterizar la observabilidad del sistema (1) en términos de (18).

TEOREMA. El sistema (1) con la observación (15) es totalmente observable sobre $[t_o, t_1]$ si y solo si la matriz $M(t_o, t_1)$ es invertible.

DEMOSTRACION. Supongamos que el sistema es totalmente observable. En virtud de la fórmula de Cauchy la observación de la trayectoria correspondiente al estado inicial x_o, con control $u = 0$, es la función

$$y: [t_o, t_1] \to \mathbb{R}^k \quad ,$$

definida como sigue

$$y(t) := C\,\phi(t, t_o)x_o \qquad (t \in [t_o, t_1]).$$

Tomando en consideración esto, obtenemos

$$M(t_o, t_1)x_o = \int_{t_o}^{t_1} \phi^T(t, t_o)\; C^T\; C\;\phi(t, t_o)dt\; x_o =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \phi^T(t, t_o)\; C^T\; y(t)dt \tag{19}$$

Supongamos $M(t_o, t_1)\; x_o = 0$. Entonces

$$0 = < M(t_o, t_1)\; x_o, x_o > = \int_{t_o}^{t_1} < \phi^T(t, t_o)\; C^T y(t), x_o > dt =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} < y(t),\ C\ \phi(t,t_o)x_o > dt = \int_{t_o}^{t_1} < y(t),\ y(t) > dt$$

Luego $y(t\ ) = 0\ \forall\ t \in [t_o,t_1]$. Pero como la condición inicial x_o, queda unívocamente determinada por la observación, debe ser $x_o = 0$. Luego $M(t_o,t_1)$ no es singular.

Si $M(t_o,t_1)$ es una matriz invertible, entonces la ecuación (19) se resuelve unívocamente respecto de la observación y, finalmente x_o viene dado por la fórmula

$$x_o = M(t_o,t_1)^{-1} \int_{t_o}^{t_1} \phi^T(t,t_o)\ C^T\ y(t)dt\ .$$

Ahora, consideremos un sistema autónomo con una observación autónoma, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= CX\ . \end{aligned} \qquad (20)$$

PROPOSICION. Si el sistema (2) es totalmente observable sobre $[0,t_1]$, entonces es totalmente observable sobre el intervalo $[t_o,t_o+t_1]$ para cada t_o .

DEMOSTRACION. Si el sistema es totalmente observable sobre $[0,t_1]$, entonces según el teorema anterior la matriz

$$M(0,t_1) = \int_{o}^{t_1} e^{A^T t}\ C^T\ C\ e^{AT}\ dt \qquad (21)$$

es invertible. Sea $t_o \in \mathbb{R}$ un número cualquiera. Trans formando la integral mediante

$$\lambda := t + t_o \quad (t \in [0,t_1])$$

se obtiene

$$M[0,t_1] = \int_0^{t} e^{A^T t}\ C^T\ C\ e^{At}\ dt = \int_{t_o}^{t_o+t_1} e^{A^T(\lambda-t_o)}\ C^T\ C\ e^{A(\lambda-t_o)} d\lambda =$$

$$= M(t_o,t_o + t_1) \ .$$

Luego, la matriz $M(t_o,t_o + t_1)$ también es invertible. Consideremos nuevamente la matriz $M(0,t_1)$. Tansformando la integral (21) mediante

$$\lambda := t_1 - t \quad (t \in [0,t_1])$$

se obtiene

$$M(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t}\ C^T\ C\ e^{At}\ dt = \int_0^{t_1} e^{A^T(t_1-\lambda)}\ C^T\ C\ e^{A^T(t_1-\lambda)}\ d\lambda.$$

Tomando en cuenta esta última integral se ve que ella queda definida por la matriz $W(0,t_1)$ correspondiente al sistema

$$\dot{y} = A^T y + C^T v \ . \tag{22}$$

Luego se tiene el siguiente:

TEOREMA. El sistema (20) es totalmente observable sobre $[0, t_1]$ si y solo si el sistema (22) es totalmente controlable a cero sobre $[0,t_1]$, por lo tanto, si y solo si, la siguiente condición de Kalman tiene lugar

$$\text{rango} \quad (C^T, A^T C^T, \ldots, (A^T)^{n-1} C^T) = n . \qquad (23)$$

OBSERVACIONES:

1.- La condición 23 no depende del número t_1, luego, si la condición (23) de Kalman está satisfecha, el sistema (20) es totalmente observable para todo $t_1 > 0$ sobre el intervalo $[0, t_1]$. En este caso diremos que el sistema es totalmente observable.

Ahora definamos el sistema conjugado del sistema(20) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{y} &= - A^T y - C^T v \\ x &= B^T y . \end{aligned} \qquad (24)$$

Según las condiciones de Kalman el sistema (20) es totalmente controlable al cero, si y solo si, el sistema conjugado (24) es totalmente obserbable. Además el sistema (20) es totalmente observable si y solo si el sistema conjugado (24) es totalmente controlable al cero.