ANTONIO TINEO

"K-TEORIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA"

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 4

"K-TEORIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA"

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1.976

I N D I C E

INTRODUCCION

El presente trabajo persigue dos objetivos fundamentales: Primero, dar una demostración bastante detallada del Teorema del Isomorfismo de Swan. Segundo, dar una demostración de la functorialidad de este isomorfismo, la cual no se encuentra o no se menciona en la bibliografía actual que trata del tema.

Por comodidad este trabajo se ha dividido en dos capítulos, el primero de los cuales está dedicado exclusivamente a recordar ciertos hechos de la Topología General y del Algebra, así como introducir ciertos formalismos y notaciones que serán utilizados repetidas veces en el segundo capítulo. En este segundo capítulo se enuncian y se demuestran los teoremas más importantes de este trabajo tratando de llenar al máximo los detalles.

Agradezco a la Srta. Carmen I. Ochoa Torres el trabajo de mecanografiado.

CAPITULO 1

§ 1) PARTICIONES DE LA UNIDAD EN ESPACIOS NORMALES

1.1.1 Definición: Un espacio topológico Hausdorff X se dice normal si dados dos cerrados disjuntos A y B de X existen vecindades U y V en X disjuntos tales que $U \supset A$ y $V \supset B$.

El lema de Urysohn asegura que: si X es un espacio normal y si A y B son cerrados disjuntos de X entonces existe una función continua $\alpha : X \to [0,1]$ tal que $\alpha(A) = 0$ y $\alpha(B) = 1$.

En el Capítulo 2 usaremos varias veces el siguiente hecho.

1.1.2 Proposición: Sea X un espacio normal y sea U un abierto de X. Dado $x \in U$ existen abiertos V y W en X tales que $x \in V \subsetneq \overline{V} \subsetneq W \subsetneq \overline{W} \subsetneq U$ y existe una función continua $\alpha : X \to [0,1]$ tal que $\alpha = 0$ en V y $\alpha = 1$ fuera de W.

DEMOSTRACION: Pongamos $A = \{x\}$, B = complemento de U en X, por el lema de Urysohn existe $\beta : X \to [0,1]$ continua tal que $\beta(x) = 0$ y $\beta|_B = 1$. Luego $\beta^{-1}[0,1) \subset U$; pues si $y \in \beta^{-1}[0,1)$ entonces $\beta(y) < 1$ o sea $y \notin B$, de donde $y \in U$.

Tomamos $V = \beta^{-1}[0,1/3)$, $W = \beta^{-1}[0,2/3)$ y $\alpha = \beta$; lo cual termina la prueba.

1.1.3 Definiciones:

a) Un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de un espacio topológico X se dice localmente finito si dado $x \in X$ existe una -

vecindad U de x que intersecta sólo un número finito de los U_i.

b) Sea $\psi : X \to R$ una función continua no negativa ($\psi(x) \geq 0$), el <u>soporte de ψ</u> (sop ψ) es la clausura del conjunto de aquellos $x \in X$ tales que $\psi(x) > 0$.

c) Una <u>partición de la unidad</u> (de un espacio topológico X) es una colección $\{\psi_\alpha\}$ de funciones continuas no negativas tales que $\{\text{Sop } \psi_\alpha\}$ es un cubrimiento localmente finito de X y $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) = 1$ (la suma es finita para cada x, pues $\{\text{Sop } \psi_\alpha\}$ es localmente finito).

1.1.4 <u>Proposición</u>: Sea X un espacio normal y sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto y localmente finito de X. Entonces existe una partición de la unidad $\{\psi_\alpha\}$ tal que sop $\psi_\alpha \subset U_\alpha$. Una tal partición se dice <u>subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$</u>.

DEMOSTRACION: (de 1.1.4). Mostraremos primero que existe un cubrimiento abierto $\{V_\alpha\}$ de X tal que $\overline{V}_\alpha \subsetneq U_\alpha$ para cada α. Podemos asumir que $\{U_\alpha\}$ está indiciado por un conjunto de ordinales (por el teorema del buen ordenamiento). Supongamos definidos los V_α para todo $\alpha < \beta$ y supongamos que $\{V_\alpha | \alpha < \beta\} \cup \{U_\alpha, \alpha \geq \beta\}$ cubren X. Sea $A(\beta) = X - ((\bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha > \beta} U_\alpha))$. Entonces $A(\beta) \subsetneq U_\beta$ y $A(\beta)$ y $U_\beta^c = x - U_\beta$ son cerrados disjuntos; como X es normal existen abiertos disjuntos V_β y 0_β^β

conteniendo $A(\beta)$ y U_β^c respectivamente, es claro que $\overline{V}_\beta \subset U_\beta$ lo cual termina la construcción de los V_α.

Sea $g_\alpha : X \to R$ una función no negativa tal que $g_\alpha = 0$ fuera de U_β y $g_\alpha > 0$ en $\overline{V}_\alpha$ (posible por la normalidad de X). Definamos $\psi_{\alpha_o}(x) = g_{\alpha_o}(x)/\sum_\alpha g_\alpha(x)$; la suma del denominador es finita y continua en x por que $\{U_\alpha\}$ es localmente finito y sop $\psi_\alpha \supset \overline{V}_\alpha$.

Terminaremos este sección recordando que todo espacio compacto es normal.

§ 2. MODULOS PROYECTIVOS

1.2.1 <u>Definición</u>: Sea A un anillo unitario. Un A-módulo P se dice <u>proyectivo</u> si dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[ul, dotted, "g"] \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

donde la línea horizontal es exacta (es decir, α es sobre) existe un A-homomorfismo $g : P \to C$ tal que $\alpha \circ g = f$.

Recordemos que dado un A-módulo M cualquiera, entonces existe un A-módulo libre L y una sucesión exacta

$L \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ (es decir, α es sobre).

1.2.2 Un A-módulo P es proyectivo si y sólo si P es sumando directo de algún A-módulo libre L.

DEMOSTRACION: Sea P proyectivo, existe una sucesión exacta $L \xrightarrow{\alpha} P \to 0$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] & P \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "id_P"'] & \end{tikzcd}$$

(id_P = identidad de $\underline{P}$).

entonces existe $g : P \to L$ tal que $\alpha \circ g = id_P$, en consecuencia $P \oplus \operatorname{Ker} \alpha \cong L$ (pues dado $x \in L$ se tiene que $y = x - g\alpha(x) \in \operatorname{Ker} \alpha$, o sea, $x = y + g\alpha(x)$ y la descomposición es única).

Recíprocamente, sea P un sumando directo de un módulo libre L y sean $\pi: L \to P$, $i : P \to L$ la proyección y la inclusión canónica respectivamente. Entonces $\pi \circ i = id_P$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r] & 0 \\ L \arrow[r, "\pi"'] & P \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

con α es epimorfismo. Ya que todo módulo libre es proyectivo, existe $g_o : F \to C$ tal que $\alpha g_o = f \circ \pi$. Sea

$g = g_o i$, entonces $\alpha g = \alpha g_o i = f \circ \pi \circ i = f_o id_M = f$.

Lo cual prueba que P es proyectivo.

1.2.3 Proposición: Si P_1, P_2 son A-módulos proyectivos entonces $P = P_1 \oplus P_2$ también es proyectivo. (El recíproco también vale y en ambas implicaciones se pueden usar sumas infinitas).