ANTONIO TINEO

PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LAS ECUACIONES CUASIDIFERENCIALES LINEALES (A) DE TERCER ORDEN Y (B) AUTOADJUNTOS DE CUARTO ORDEN

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 36

PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LAS ECUACIONES CUASIDIFERENCIALES LINEALES (A) DE TERCER ORDEN Y (B) AUTOADJUNTOS DE CUARTO ORDEN.

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1980

I) PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LA ECUACION CUASI-DIFERENCIAL LINEAL DE ORDEN TRES

El propósito de esta primera parte es estudiar la exis_ cia de soluciones oscilatorias de la ecuación diferencial.

$$L[x] \equiv \left\{ \frac{1}{a_{23}} \left[\left(\frac{1}{a_{12}} x' \right)' - a_{12}\, x \right] \right\}' - \frac{1}{a_{12}} a_{32} x' - a_{31} x \equiv 0 \quad (1)$$

donde las funciones $a_{ij} : [0, \infty) \to R$ son continuas con $a_{12} > 0$ y $a_{23} > 0$.

El estudio de la ecuación (1) será realizado a través del sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_2' &= a_{12}\, x_2 \\ x_2' &= a_{21}\, x_1 + a_{23}\, x_3 \qquad (2) \\ x_3' &= a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 \end{aligned}$$

La relación entre los sistemas (1) y (2) es que la correspondencia $(x_1, x_2, x_3) \to x_1$ establece un isomorfismo entre las soluciones de (2) y las soluciones de (1).

En lo que sigue S denotará el espacio de soluciones de (2); Los elementos de S serán denotados con letras mayúsculas y si $X \in S$ entonces las coordenadas de X serán denotadas por las letras minúsculas correspondientes ;

esto es $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Recordamos que una aplicación no trivial $f: [0,\infty) \to R$ se dice oscilatoria si existe una sucesión $\{t_n\}$ en $[0, \infty)$ tal que $t_n \to +\infty$ y $f(t_n) = 0$. Un elemento no trivial X en S se dirá oscilatorio si x_1 es oscilatoria, el conjunto de elementos oscilatorios de S será denotado por Θ. Nuestro objetivo es probar que $\Theta \neq \emptyset$ bajo ciertas hipótesis en las a_{ij}.

§1) PLANOS REGULARES

Dados elementos $a= (a_1, a_2, a_3)$, $b= (b_1, b_2, b_3)$ en R^3 definimos un nuevo elemento $W(a\ , b) \in R^3$ mediante

$W(a, b) = (w_{12}(a,b), w_{13}(a,b), w_{23}(a,b)$ donde

$w_{ij}(a,b)= a_i\, b_j - a_j\, b_i$, $1 \leq i < j \leq 3$

si X , $Y : [0, \infty)\to R^3$ son dos aplicaciones definimos $W(X\ ;\ Y) : [0, \infty)\to R^3$ por $W(X\ ;\ Y)(t\ ) = W(X\ (t),Y(t))$.

Nótese que la aplicación $W : R^3 \times R^3 \to R^3$, $(a,b) \to W(a,b)$ es bilineal antisimétrica.

DEFINICION I.1.

Sea H un plano de S ($\dim H = 2$); diremos que H es regular si existe $T \geq 0$ y existen $U, V \in H$ tales que

$W_{12}(U,V)(t) \neq 0$ si $t \geq T$. (En este caso se sigue que $W_{12}(X,Y)(t) \neq 0$ si $t \geq T$ y $X,Y \in H$ son linealmente independientes).

PROPOSICION I.1.

Supongamos que S contiene un plano regular H entonces $\Theta = \emptyset$ ó $H \subseteq \Theta \cup \{0\}$.

DEMOSTRACION

Sean $T \geq 0$ y $U, V \in H$ tales que $w_{12}(U,V)(t) \neq 0$ si $t \geq T$; dado $X \in H$ se tiene que X, U, V son linealmente dependientes y en consecuencia $0 = \det(U,V,X) = $

$= w_{12}\, x_3 - w_{13}\, x_2 + w_{23}\, x_1$, donde $w_{ij} = w_{ij}(U,V)$, $1 \leq i < j \leq 3$. De aquí

$$x_3 = \frac{1}{w_{12}} (w_{13}\, x_2 - w_{23}\, x_1) \quad (t \geq T)$$

lo cual implica que (x_1, x_2) es una solución del sistema de orden dos siguiente

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{12}\, x_2 \\ x_2' &= \left(a_{21} - a_{23} \frac{w_{23}}{w_{12}}\right) x_1 + a_{23} \frac{w_{13}}{w_{12}}\, x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Ya que dimH= 2 y el espacio de soluciones de (3) tiene dimensión dos, entonces la correspondencia $X \to (x_1, x_2)$ estable un isomorfismo entre H y las soluciones de (3). Asi $H \cap \Theta = \emptyset$ ó $H \subseteq \Theta \cup \{0\}$ (Si $H \cap \Theta \neq \emptyset$).

Supongamos que $H \cap \Theta = \emptyset$, entonces existe $t_0 \geq 0$ tal que $u_1(t) \neq 0$ si $t \geq t_0$ y como $w_{12}(U,V)(t) \neq 0$, siguiendo Polya [4], se obtiene que el operador $L[x]$ es disconjugado en $[T_1, \infty)$ ($T_1 = \max(t_0, T\})$; es decir, toda solución no trivial de $L[x] = 0$ posee a lo sumo dos ceros en $[T_1, \infty)$; de aqui $\Theta = \emptyset$ lo cual termina la demostración.

§2) EL OPERADOR ADJUNTO

Asociado al operador $L[x]$ de (1) tenemos otro operador diferencial de órden tres dado por

$$L^*[y] = \{\frac{1}{a_{12}}[(\frac{1}{a_{23}}y')' - a_{32}y]\}' - \frac{1}{a_{23}}a_{21}y' + a_{31}y \quad (4)$$

el cual admite la siguiente "representación matricial" :

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{23}\, y_2 \\ y_2' &= a_{32}\, y_1 + a_{12}\, y_3 \qquad\qquad (5) \\ y_3' &= a_{31}\, y_1 + a_{21}\, y_2 \end{aligned}$$

Otra vez la relación entre (4) y (5) es que la correspondencia $(y_1, y_2, y_3) \to y_1$ establece un isomorfismo lineal entre las soluciones de (5) y aquellas de $L^*[y] \equiv 0$.

Denotaremos por S^* al espacio de soluciones de (5) y por θ^* los elementos oscilatorios $Y \in S^*$ (Es decir, y_1 es oscilatoria). Obsérvese ensequida que $(L^*)^* = L$..

Entre los sistemas (4) y (5) (respectivamente (1) y (4)) existe un cierto número de relaciones interesantes entre las cuales podemos mencionar:

PROPOSICION I.2.

Si $X_1, X_2 \in S$ entonces $W(X_1, X_2) \in S^*$ (y por dualidad $W(Y_1, Y_2) \in S$ si $Y_1, Y_2 \in S^*$).

DEMOSTRACION

Verificación directa.

COROLARIO I.1.

Si $X_1 \in \theta$ y $X_2 \in S - \theta$ entonces $W(X_1, X_2) \in \theta^*$

DEMOSTRACION

Claramente $W(X_1, X_2) \neq 0$ (porque en caso contrario X_1, X_2 serán linealmente dependientes) Si $W(X_1,X_2)$

CORORARIO I.2.

a) Si $Y \in S^*$, $Y \neq 0$ entonces $H(Y) = \{X \in S : [X;Y]=0\}$ es un plano de S, el cual es regular si $Y \in \theta^*$.

b) Si Y_1, $Y_2 \in S^*$ entonces $H(Y_1) \subseteq H(Y_2)$ si y sólo si Y_1, Y_2 son linealmente dependientes.

c) Si $Y \in S^*$, $Y \neq 0$ y X_1 ; $X_2 \in H(Y)$ entonces existe $\lambda \in R$ tal que $W(X_1, X_2) = \lambda . Y$

DEMOSTRACION

La prueba de (a) y (b) son triviales. Para mostrar (c) observamos que $[X ; W(X_1 , X_2)] = \det(X, X_1, X_2)$, lo cual dice que X_1, $X_2 \in H(W(X_1, X_2))$. Si X_1, X_2 son linealmente independientes entonces $H(W(X_1 , X_2))=H(Y)$ y el resultado se sigue de (b). Si X_1, X_2 son lineal mente dependientes basta tomar $\lambda = 0$.

§3) EXISTENCIA DE PLANOS REGULARES

En esta sección haremos uso de las siguientes funciones

$$\phi = \frac{a_{21}}{a_{23}} - \frac{a_{32}}{a_{12}} , \qquad \Phi(t) = \phi(t) + \int_0^t a_{31}(s)\, ds$$

$F, F^* : [0, \infty) \times R^3 \to R$

$$F(t,x) = \frac{a_{12}(t)}{a_{23}(t)} x_2^2 - 2x_1 x_3 - \phi(t) x_1^2 \quad ; \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$F^*(t,y) = - \frac{a_{23}(t)}{a_{12}(t)} y_2^2 + 2y_1 y_3 - \phi(t) y_1^2 \; ; \; y = (y_1, y_2, y_3)$$

Si $X \in S$, $Y \in S^*$ definimos F_X , $F_Y^* : [0, \infty) \to R$

por $F_X(t) = F(t, X(t))$, $F_Y^*(t) = F^*(t, Y(t))$.

LEMA I.1

a) Sean $a \in R^3$, $t_o \geq 0$ tales que $F(t_o, a) > 0$ entonces existe $b \in R^3$ tal que $[a ; b] = 0$ y $F^*(t_o, b) > 0$

b) Sean $b \in R^3$ y $t_o \geq 0$ tal que $F^*(t_o, b) < 0$ entonces existe $a \in R^3$ tal que $[a , b] = 0$ y $F(t_o, a) < 0$.

DEMOSTRACION

a) Pongamos $a = (a_1, a_2, a_3)$ y observemos que para cualquier $c \in R^3$ se tiene

$$a_1^2 \psi(t_o) F^*(t_o, W(a,c)) = \psi(t_o) F(t_o, a) w_{12}^2 - \left[a_1 w_{12} - a_2 \psi(t_o) w_{12}\right]^2$$

(donde $w_{ij} = w_{ij}(a, c)$, $1 \leq i < j \leq 3$). Si $a_1 \neq 0$

el resultado se sigue fácilmente tomando $b=W(a, c)$ donde c satisface $a_1 w_{13}(a, c) = a_2 \psi(t_o) W_{12}(a, c)$. El caso en que $a_1 = 0$ se verifica directamente. La prueba de (b) es análoga y será dejada como ejercicio.

DEFINICION I. 2.

Diremos que una función $f: [0, \infty) \to R$ es creciente (resp. decreciente) en ∞ si f es creciente (resp. decreciente) y si existe una sucesión $\{t_n\}$ en $[0, \infty)$ tal que $t_n \to \infty$ y $f(t_n) < f(t_{n+1})$ (resp. $f(t_n) > f(t_{n+1})$) si $n \geq 1$. (Nótese que si f es creciente en ∞ y $f \leq 0$ entonces $f < 0$. Análogamente si f es decreciente en ∞ y $f \geq 0$ entonces $f > 0$).

En lo que resta de esta sección supondremos que Φ es creciente en ∞ y que $\frac{a_{12}}{a_{23}}$ es decreciente (no necesariamente decreciente en ∞).

PROPOSICION I.4.

Si $X \in S - \{0\}$ e $Y \in S^* - \{0\}$ entonces F_X y F_Y^* son decrecientes en ∞ .

DEMOSTRACION

Haciendo uso de la integral de Riemann-Stieljes se muestra rápidamente que

$$F_X(t_2) - F_X(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} x_1(s)^2 \, d\Phi(s) + \int_{t_1}^{t_2} x_2(s)^2 \, d\left(\frac{a_{12}}{a_{23}}\right)(s)$$

$$F_Y^*(t_2) - F_Y^*(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} y_1(s)^2 \, d\Phi(s) - \int_{t_1}^{t_2} y_2(s)^2 \, d\left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\right)(s)$$

y el resultado se sigue rápidamente del hecho que Φ es creciente en ∞; $\frac{a_{12}}{a_{23}}$ es decreciente ($\frac{a_{23}}{a_{12}}$ creciente) ∎

Pongamos

$$S_+ = \{X \in S : F_X(t) \geq 0 \quad \text{si} \quad t \geq 0\}$$

$$S_+^* = \{Y \in S^* ; F_Y^*(t) > 0 \quad \text{si} \quad t \geq 0\}$$

Note que si $Y \in S_+^*$ entonces $y_1(t) \neq 0$ para $t \geq 0$

y en consecuencia $H(Y) = \{X \in S : [X : Y] = 0\}$ es un plano regular de S.

PROPOSICION I. 5.

$S_+^* \neq \emptyset$.

DEMOSTRACION

Sea U, V, W una base de S^* y para cada $n \geq 0$ sea $V_k(n) = (u_k(n), V_k(n), w_k(n))$ $(k = 1, 2, 3)$. Sea $a_n =$ $= (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3})$ un vector unitario $(a^2_{n1}+a^2_{n2}+a^2_{n3}= 1)$ de R^3 perpendicular a $V_1(n)$ y $V_2(n)$. Sea $Y_n =$ $= a_{1n} U + a_{2n} V + a_{3n} W = (y_{n1}, y_{n2}, y_{n3})$, entonces $Y_n \neq 0$ y $y_{n1}(n) = y_{n2}(n) = 0$. De aqui $F^*_{Y_n}(n) = 0$, lo cual dice que $F^*_{Y_n}(t) \geq 0$ si $0 \leq t \leq n$.

Por un argumento de compacidad podemos admitir que existe $a = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ unitario tal que $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ si ponemos $Y= a_1U + a_2 V + a_3 W$, obtenemos $Y \neq 0$ y $Y_n(t) \to Y(t)$ $(t \geq 0, n \to \infty)$ De aquí $F^*_{Y_n}(t) \to F^*_Y(t)$ $(n \to \infty, t \geq 0)$ y en consecuencia $F^*_Y(t) \geq 0$ si $t \geq 0$, de la proposicción I.4 se sigue que $F^*_Y > 0$, o sea que $Y \in S^*$ y termina la demostración.

PROPOSICION I. 6.

Si $Y \in S_+^*$ entonces $H(Y) = \{X \in S: [X; Y] = 0\} \subseteq S_+$;

en particular

$$\cup \{H(Y) : Y \in S_+^*\} \subseteq S_+$$

DEMOSTRACION

Si $X \in H(Y)$, podemos usar la identidad $[X;Y] = 0$ para concluir rápidamente que

$$\frac{a_{12}}{a_{23}} \cdot y_1^2 \cdot F_X = (y_2 \cdot x_1 - \frac{a_{12}}{a_{23}} x_2 y_1)^2 + x_1^2 \cdot F_Y^*$$

lo cual dá fin a la demostración.

COROLARIO I. 3.

a) $S_+ = \cup \{H(Y) : Y \in S_+^*\}$

b) Si $\Theta \neq \emptyset$ entonces $\Theta \cup \{0\} = S_+$

DEMOSTRACION

a) Ya que $S_*^+ \neq \emptyset$ entonces $0 \in \cup\{H(y) : Y \in S_+^*\}$.

basta mostrar entonces (de acuerdo a I.7.) que si $X \in S_+$ y $X \neq 0$ existe $Y \in S_+^*$ tal que $X \in H(Y)$. Dado

$X \in S_+$ con $X \neq 0$ se tiene $F_X(t) > 0$ si $t > 0$; utilizando el lema I.1. podemos afirmar que existe una sucesión $\{b_n\}$ en R^3 tal que $[X(n) ; b_n] = 0$ y $F^*(n , b_n) > 0$.

Ya que $[a , b]$ es bilineal y $F^*(t , \lambda y) =$

$\lambda^2 F^*(t , y)$ $(X \in R)$, podemos suponer que los b_n son unitarios ($||b_n|| = 1$). Sea $\{Y_n\}$ la sucesión en en S^* determinada por la condición $Y_n(n) = b_n$. Por compacidad podemos suponer que $b_n \to b \in R^3$ de aquí existe $Y \in S^*$, $Y \neq 0$ tal que $Y_n(t) \to Y(t)$ $(t \geq o)$ y como $F^*_{Y_n}(n) = F^*(n , b_n) > 0$ podemos razonar como en I. 5.para concluir que Y S^*_+ ;

por otra parte $[X ; Y]$ es constante y $[X ; Y_n] \longrightarrow [X ; Y]$, pero $[X ; Y_n] = [X(n), Y_n(n)] = [X_n , b_n] = 0$ lo cual muestra que $X \in H(Y)$ y da fin a la demostración de (a).

Prueba de b)

De la proposición I. 1. se tiene que $\bigcup\{H(y): Y \in S^*_+\} \subseteq$ $\subseteq \Theta \bigcup \{0\}$; así $S_+ \subseteq \Theta \bigcup \{0\}$. (Recuérdese que cada

$H(Y)$ es regular) Sea $X \in \Theta$ y sea $\{t_n\}$ una sucesión en $[0, \infty)$ tal que $t_n \to \infty$ y $x_1(t_n) = 0$ entonces $F_X(t_n) \geq 0$ y como $X \neq 0$ se sigue de I. 4. que $F_X > 0$, asi $\Theta \subset S_*$ lo cual da fin a la demostración.

Pasamos a obtener ahora resultados similares respecto a S^* y Θ^*. Para ello pongamos

$S_- = \{X \in S: F_X(t) < 0$ si $t \leq T$, para algún

$T = T(X) \geq 0\}$

$S^*_- = \{Y \in S^* : F^*_Y(t) \leq 0$ si $t \geq T$ para algún

$T = T(Y) \geq 0\}$

Si $X \in S$ definimos $H^*(X) = \{Y \in S^*: [X; Y] = 0\}$ y tienen resultados análogos al corolario I.2.

Además si $X \in S$ entonces $x_1(t) \neq 0$ si $t \geq T = T(X)$ y en consecuencia $H^*(X)$ es un plano regular de S^*.

COROLARIO I.4.

a) $S_- \neq \emptyset$

b) $S^*_- = \cup\{H^*(X) : X \in S_-\}$

c) Si $\theta \neq \emptyset$ entonces $\theta \cup \{0\} = S_-^*$

DEMOSTRACION

a) Sea $X \in S$, determinada por $X(0) = (0, 0, 1)$, entonces $F_X(0) = 0$ y como F_X es decreciente en ∞ existe $T > 0$ tal que $F_X(T) < 0$, asi $X \in S_-$.

b) La contención $\cup \{H^*(X) : X \in S_-\} \subseteq S_-^*$ se prueba utilizando la misma fórmula empleada en la prueba de 1. 6, para la contención recíproca se procede como en la prueba del corolario 1. 3. (parte (a)).

c) Igual que en el corolario I.3. parte (b).

Terminamos esta sección sumarizando nuestros resultados en el teorema siguiente.

TEOREMA I. 1.

Sea N (resp N^*) el espacio de soluciones no triviales y no oscilatorias de S (resp S^*). Si

1) $\dfrac{a_{21}(t)}{a_{23}(t)} - \dfrac{a_{32}(t)}{a_{12}(t)} + \displaystyle\int_0^t a_{31}(s)ds$ es creciente en ∞

2) $\dfrac{a_{12}(t)}{a_{23}(t)}$ es decreciente

Entonces $N \neq \emptyset$ y $N^* \neq \emptyset$. Además las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\theta \neq \emptyset$

b) $\theta \cup \{0\} = \cup\{H(Y) : Y \in N^*\}$

c) $\theta^* \cup \{0\} = \cup\{H^*(X) : X \in N\}$

d) $\theta^* \neq \emptyset$

DEMOSTRACION

$N = S_-$ y $N^* = S_+^*$ (que son no vaciós por proposición I.5. y colorio I.4.) Por otra parte (a)<==>(b) por el corolario I.3. y la proposición I.5. c)<==>(d) por el corolario I.4. y a<==>(d) por el corolario I.1.

§4) EXISTENCIA DE SOLUCIONES OSCILATORIAS

En esta sección haremos uso nuevamente de las funciones

$$\phi = \frac{a_{21}}{a_{23}} - \frac{a_{32}}{a_{12}}, \quad \Phi(t) = \phi(t) + 2\int_0^t a_{31}(s)ds. ,$$

asumiremos también que Φ es creciente en ∞ y que $\frac{a_{12}}{a_{23}}$ es decreciente.

También haremos uso de la función $\psi = \frac{a_{21}}{a_{23}} + \frac{a_{32}}{a_{12}}$. Si $X \in S$ e $Y \in S^*$ pondremos

$\overline{x}_3 = x_3 + \frac{1}{2}\,\phi\, x_1$, $\overline{y}_3 = y_3 - \frac{1}{2}\,\phi\, y_1$ de modo que

$F_X = \frac{a_{12}}{a_{23}}\, x_2^2 - 2x_1\,\overline{x}_3$, $F_y^* = -\frac{a_{23}}{a_{12}}\, y_2^2 + 2y_1\,\overline{y}_3$; en

consecuencia si $X \in S_-$ e $Y \in S_+^*$ entonces $x_1\,\overline{x}_3 > 0$

en (T, ∞) (algún $T = T(X) \geq 0$) y $y_1\,\overline{y}_3 > 0$ en $(0, \infty)$.

TEOREMA I.2.

Además de las hipótesis de crecimiento en Φ y $\frac{a_{12}}{a_{13}}$

admitidas anteriormente (Teorema I.2) supongamos que:

a) $\int_0^\infty a_{23}(s)ds = \infty$

b) $\int_0^\infty a_{12}(s)ds = +\infty$ ó $\int_0^\infty \left(\int_s^\infty a_{12}(u)du \right) d\Phi(s) = \infty$ si

$\int_0^\infty a_{12}(s)ds < +\infty$

c) $\psi \leq 0$

d) $\lim_{t\to\infty} \left[\psi(t) + \Phi(t)\right] = +\infty$.

Entonces $\Theta \neq \emptyset$.

DEMOSTRACION

Sea $U \in S_+^*$ y sea $X \in H(U)$ no trivial (probaremos que X es oscilatoria). Si X no es oscilatoria podemos suponer que $x_1(t) > 0$ si $t \geq 0$. Por otra parte x_1 es solución de la ecuación $(ry')' + py = 0$ donde

$$r = \frac{1}{a_{12}\, u_1} \quad y \quad p = \frac{1}{u_1} a_{23} \left[-\frac{1}{2}\psi + \frac{\bar{u}_3}{u_1} \right] ; \quad \text{pues}$$

$\psi \leq 0$ y $\bar{u}_3\, u_1 > 0$ lo cual implica que $p(t) \neq 0$ si $t \geq 0$. Y como x_1 no es oscilatoria entonces x_1' tampoco lo es; luego existe $T_o \geq 0$ tal que $x_2(t) \neq 0$ si $t \geq T_o$. En estas condiciones se tiene:

AFIRMACION

$x_2(t) > 0$ si $t \geq T_o$. PRUEBA: Supongamos que $x_2(t) < 0$ si $t \geq T_o$; ya que

$$\bar{x}_3(t) - \bar{x}_3(t_o) = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t} x_1(s)d\Phi(s) + \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t} a_{12}(s)\psi(s)x_2(s)ds \quad (*)$$

tenemos que $\bar{x}_3$ es creciente en ∞. (en $[T_o, \infty)$), en consecuencia se tienen las dos posibilidades siguientes

i) $\bar{x}_3(t) < 0$ si $t \geq T_o$.

ii) Existe $T_1 \geq T_o$ tal que $\bar{x}_3(t) > 0$ si $t \geq T_1$

Caso (i)

Ya que $x_2' = \frac{1}{2}\psi\, a_{23}\, x_1 + a_{23}\, \bar{x}_3$ entonces $x_2' < 0$ en $[T_o\, , \infty)$ y podemos asumir que $x_2(T_o) = -1$ de modo que $x_2(t) \leq -1$ si $t \geq T_o$. y así $x_1' \leq -a_{12}$ en $[T_o\, , \infty)$. Si $\int_o^\infty a_{12}(s)ds = -\infty$ entonces $x_1(t) \to -\infty$ $(t \to \infty)$ contradiciendo el hecho que x_1 era positiva. Supongamos entonces que $\int_o^\infty a_{12}(s)ds < +\infty$. Ya que $x_1' \leq -a_{12}$ se obtiene $0 < x_1(t) \leq x_1(\tau) - \int_\tau^t a_{12}(s)ds$

si $t \geq \tau \geq T_o$. De aquí $x_1(\tau) > \int_\tau^t a_{12}(s)ds$ cualquiera sea $t > \tau$ ($\tau \geq T_o$), en consecuencia $x_1(\tau) \geq \int_\tau^\infty a_{12}(s)ds$

y de (*) obtenemos

$$\bar{x}_3(t) \geq \bar{x}_3(T_o) + \frac{1}{2}\int_{T_o}^t \left(\int_s^\infty a_{12}(u)du\right) d\Phi(s)$$

lo cual implica que $\bar{x}_3(t) \to +\infty$ si $t \to \infty$ y contradice el hecho que $\bar{x}_3$ era negativa. Esta contradicción dice que (i) no puede ser cierta.

<u>Caso (ii)</u>

Ya que $\overline{x}_3(t) > 0 \quad (t \geq T_1)$ podemos asumir $\overline{x}_3(T_1) = 1$ y como estamos asumiendo $x_2 < 0 \quad (\psi \leq 0)$ se sigue de (●) que $\overline{x}_3(t) \geq 1 + \frac{1}{2} \int_{T_1}^{t} x_1(s)d\Phi(s)$; pero x_1 es decreciente en $[T_o, \infty)$ y de aquí

$$\int_{T_1}^{t} 2,(s)d\Phi(s) \geq x_1(t) \int_{T_1}^{t} d\Phi(s) = x_1(t) \left[\Phi(t)-\Phi(T_1) \right],$$

en consecuencia, para $t \geq T_1$

$$x_2'(t) = \frac{1}{2}\psi(t)\, a_{23}(t)\, x_1(t) + a_{23}(t)\, \overline{x}_3(t) \geq$$

$$\frac{1}{2}\psi(t)\, a_{23}(t)\, x_1(t) + a_{23}(t) \left[1 + \frac{1}{2} x_1(t)\, (\Phi(t) - \Phi(T_1)\right] =$$

$$= a_{23}(t) + \frac{1}{2} a_{23}(t)\, x_1(t) \left[\psi(t) + \Phi(t) - \Phi(T_1)\right] \text{, pero}$$

por (d) existe $T_2 \geq T$, tal que $\psi(t) + \Phi(t) - \Phi(T_1) \geq 0$ si $t \geq T_2$; de aquí $x_2'(t) \geq a_{23}(t)$ si $t \geq T_2$ lo cual implifica que $x_2(t) \to \infty \quad (t \to \infty)$ y contradice el hecho que x_2 era negativa. Esta contradicción da fin a la prueba de la afirmación.

Podemos asumir ahora que $x_2(t) > 0$ si $t \geq 0$, y como $x_1 > 0 \quad (t \geq 0)$ podemos asumir que $x_1(t) \geq 1$ si $t \geq 0$.

$(x_1' = a_{12}\, x_2 > 0)$. Por otra parte (ver prueba de la proposición I.4) se tiene

$$F_X(t) - F_X(0) \leq - \int_0^t x_1(s)^2 \, d\Phi(s) \qquad (t \geq 0)$$

y como $F_X > 0$ $(X \in H(U) \subset S_+ \; ; \; X \neq 0)$ entonces

$\int_0^t x_1(s)^2 d\, \Phi(s) \leq F_X(0)$. De aqui

$$\Phi(t) - \Phi(0) = \int_0^t d\Phi(s) \leq \int_0^t x_1(s)^2 d\Phi(s) \leq F_X(0),$$ lo

cual dice que Φ es acotada. Pero $\Phi(t) \geq \psi(t) + \Phi(t)$ y en consecuencia $\Phi(t) \to +\infty$; esta contradicción da fin a la demostración.

CONJETURA

Supongamos que se tiene la hipótesis (d_1). Para cada $T \geq 0$ existe $t_o = t_o(T) \geq 0$ tal que

$\psi(t) + \Phi(t) - \Phi(T) \geq 0$ si $t \geq 0$. Y pongamos

$\Phi(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} \Phi(t)$ $(-\infty < \Phi(\infty) \leq +\infty)$. Si $\Phi(\infty) = \infty$, entonces la hipótesis (d_1) equivale a la hipótesis (d) del teorema I.2. Supongamos entonces que se tiene la hipótesis

(d_2) $\Phi(\infty) < +\infty$ y $\int_0^\infty a_{23}(s) \, [\Phi(\infty) - \Phi(s)] \, ds = +\infty$.

Nuestra conjetura es que el Teorema I.2. permanece válido si la hipótesis (d) es reemplazado por las hipótesis (d_1) y (d_2) . De hecho, la conjetura es válida en el caso $a_{21} = a_{32} = 0$ (como puede verificar el lector). Nótese también que en la prueba de la afirmación del Teorema I.2. realmente se usó la hipótesis (d_1) en vez de la hipótesis (d).

II) PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LA ECUACION CUASIDIFERENCIAL AUTO-ADJUNTA DE ORDEN CUATRO

En esta segunda parte estudiaremos algunas propiedades oscilatorias del operador

$$L[\,y\,] = \{\frac{1}{r}\,[\frac{1}{d_3}(\frac{1}{r}y'\,)' - \frac{1}{d_3}py\,]' - \frac{1}{r^2}\,d_2\,y'\,\}' - \tag{1}$$

$$- p.\frac{1}{d_3}\,[(\frac{1}{r}\,y')' \; - py\,] + d_1 y$$

donde d_1, d_2, d_3, p, r: $[\,0, \infty) \to R$ son funciones continuas con $d_3(t) > 0$, $r(t) > 0$ $(t \geq 0)$. Si $r \equiv 1$ y $p \equiv 0$ el operado L se reduce a

$L\,[y] = (\frac{1}{d_3}\,y'')'' - (d_2\,y')' + d_1\,y$ el cual ha sido estudiado extensamente en [3].

El estudio del operador $L[y]$ será realizado a través del sistema lineal siguiente

$$
\begin{aligned}
x_1' &= r\, x_2 \\
x_2' &= p x_1 + d_3\, x_3 \\
x_3' &= d_2\, x_2 + r\, x_4 \\
x_4' &= -d_1 x_1 + p\, x_3
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

La relación entre el operador $L[y]$ de (1) y (2) es que la correspondencia $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to x_1$ establece un isomorfismo entre el espacio de soluciones de (2) y el conjunto de soluciones de $L[y] \equiv 0$. Nótese que la forma matricial (2) de $L[y]$ dice que $L[y]$ es auto-adjunto en el sentido de [1] .

En lo que sigue S denotará el espacio de soluciones de (2); los elementos de S serán denotados con letras mayúsculas X, Y etc, y las coordenadas de dichos elementos por las letras minúsculas correspondientes:

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ etc. Un elemento no trivial X de S se dirá oscilatorio si x_1 es oscilatoria. El conjunto de los elementos, oscilatorios de S será denotado Θ.

§1) EL PRODUCTO DE LAGRANGE

Dados $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ R^4 definimos $[a;b] = a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1$; la cantidad $[a;b]$ será llamada el <u>producto de Lagrange de a con b</u> y es claro que la correspondencia $R^4 \times R^4 \to R$; $(a,b) \to [a;b]$ es bilineal antisimétrica no degenerada.

Si $X ; Y : [0, \infty) \to R^4$ definimos una nueva función $[X ; Y] : [0, \infty) \to R^4$, $[X ; Y](t) = [X(t); Y(t)]$. Además para cada $X \in S$ pondremos

$$P(X) = \{Y \in S : [X ; Y] = 0\}$$

PROPOSICION II. 1.

(a) Si $X, Y \in S$ entonces $[X ; Y]$ es constante.

(b) La aplicación $S \times S \to R$; $(X,Y) \to [X;Y]$ es bilineal antisimétrica no degenerada.

(c) Si $X \in S$, $X \neq 0$ entonces $P(X)$ es un hiperplano de S.

(d) $P(X_1) \subseteq P(X_2)$ si y sólo si $X_1, X_2 \in S$ son linealmente dependientes.

DEMOSTRACION

Trivial. (ver proposición I.3. y corolario 1.2.)

Dadas X, Y, Z $\in$ S definimos

$$w_{ijk}(X,Y,Z) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} \qquad 1 \leq i < j < k \leq 4. \ ,$$

PROPOSICION II.2.

a) $W(X,Y,Z) = (w_{123}, w_{124}, w_{134}, w_{234})$, con

$w_{ijk} = w_{ijk}(X, Y, Z)$, es una solución de (2) cualquiera sean $X,Y,Z \in S$. (Es por ello, precisamente, que L se dice auto-adjunto).

b) Dada $U \in S$, $U \neq 0$ y $X,Y,Z \in P(U)$, entonces existe $\lambda \in R$ tal que $W(X,Y,Z) = \lambda .\ U$.

DEMOSTRACION

a) Cálculo directo

b) Se sigue de la identidad $[W(X,Y,Z)\ ;\ U] = \det(X,Y,Z,U)$ razonando como en el corolario I.2.

§2) L - PLANOS REGULARES

Dadas X,Y, $\in$ S definimos

$$w_{ij}(X,Y) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} \quad \text{si } 1 \leq i < j \leq 4$$

Nótese que $[X;Y] = w_{14}(X,Y) - w_{23}(X,Y)$

DEFINICION II.1.

Diremos que un subespacio H de S de dimensión 2 es un plano regular en $[T, \infty)$ (algún $T \geq 0$) si existen $U, V \in H$ tales que $w_{12}(U,V)(t) \neq 0$ $(t \geq T)$ (En este caso $w_{12}(X,Y)(t) \neq 0$ $(t \geq T)$ si $X, Y, \in H$ son linealmente independientes).

Diremos que H es un L-plano si $[X;Y] = 0$ cualesquiera sean $X, Y, \in H$.

PROPOSICION II.3.

Si S contiene un plano regular H estonces $H \cap \Theta = \emptyset$ ó $H \subseteq \Theta \cup \{0\}$.

DEMOSTRACION.

Sean $T \geq 0$ y $U, V \in H$ tales que $w_{12}(t) = w_{12}(U,V)(t) \neq 0$ si $t \geq T$. Pongamos $w_{ij} = w_{ij}(X,Y)$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ y sea $X \in H$; ya que $w_{123}(U,V,X) \equiv w_{124}(U,V,X) \equiv 0$ entonces

$$x_3 = -\frac{w_{23}}{w_{12}} x_1 + \frac{w_{13}}{w_{12}} x_2$$
$$(\text{en } t \geq T)$$
$$x_4 = -\frac{w_{24}}{w_{12}} x_1 + \frac{w_{14}}{w_{12}} x_2$$

En consecuencia (x_1 , x_2) satisface la ecuación

$$x_1' = r\, x_2$$
$$x_2' = (p - d_3 \frac{w_{23}}{w_{12}})\, x_1 + d_3 \frac{w_{13}}{w_{12}} x_2$$

y el resto de la prueba prosigue como en la proposición I.1.

PROPOSICION II.4.

Si H es un L-plano regular de S (en $[T, \infty)$) y si $H \cap \Theta = \emptyset$ entonces el operado $L[y]$ es disconjugado en $[t_o, \infty)$ para algún $t_o \geq T$. Es decir, para cada $X \in S$, $X \neq 0$ se tiene que x_1 posee a lo sumo tres ceros en $[T, \infty)$. En particular $\Theta = \emptyset$.

DEMOSTRACION

Sean $U, V \in H$ tales que $w_{12}(U, V)(t) \neq 0$ $(t \geq T)$

Ya que $[U;V] = 0$ tenemos que $U, V \in P(U)$. Elijamos $X \in P(U)$ de modo que U,V,X sea una base de $P(U)$, entonces podemos suponer que $W(U,V,X) = X$ ($\lambda = 1$ en la proposición II.2.) Ya que $H \cap \Theta = \emptyset$ tenemos que u_1 no es oscilatoria; en consecuencia existe $t_o \geq T$ tal que $u_1(t) \neq 0$ si $t \geq t_o$. De aquí $u_1(t) \neq 0$, $w_{12}(U,V)(t) \neq 0$. $w_{123}(U,V,X)(t) = u_1(t) \neq 0$ si $t \geq t_o$, lo cual (siguiendo los métodos de Polya [4]) muestra que L es disconjugado en $[0, \infty)$.

COROLARIO II.1.

Si S es una reunión de L-planos regulares H_i (en $[T,\infty)$ para algún $T_i \geq 0$) entonces ocurre una (y sólo una) de las siguientes propiedades:

(i) El operador $L[y]$ es disconjugado en $[t_o, \infty)$ para algún $t_o \geq 0$.

ii) $\Theta \cup \{0\} = S$.

El objetivo principal de este trabajo es encontrar condiciones en las coeficientes d_1, d_2 para que S sea una reunión de L-planos regulares. (ver §4)).

§3) EL SISTEMA DE WRONSKIANOS

Sean $X, Y \in S$, $w_{ij} = w_{ij}(X,Y) = x_i y_j - x_j y_i$ $(1 \leq i < j \leq 4)$, definimos

$X * Y = (w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{23}, w_{24}, w_{34})$

Un pequeño cálculo muestra que $X * Y$ es solución del "sistema lineal de Wronskianos" siguiente:

$$
\begin{aligned}
w'_{12} &= d_3\, w_{13} \\
w'_{13} &= d_2\, w_{12} + r(w_{14} + w_{23}) \\
w'_{14} &= pw_{13} + rw_{24} \\
w'_{23} &= pw_{13} + rw_{24} \\
w'_{24} &= d_1 w_{12} + p(w_{14} + w_{23}) + d_3 w_{34} \\
w'_{34} &= d_1 w_{13} + d_2\, w_{24}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Para abreviar, las soluciones de (3) serán denotadas por $W = (w_{ij})$.

Una pregunta que surge naturalmente es saber cuando una solución W de (3) es de la forma $X * Y$ en $X,Y \in S$. Veremos que esto sucede si y sólo si $w_{12}\, w_{34} - w_{13}\, w_{24} + w_{14}\, w_{23} \equiv 0$.

Por conveniencias pondremos

$R^6 = \{(c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}, c_{34}) : c_{ij} \in R, \quad 1 \leq i < j \leq 4\}$

Si $c \in R^6$ pondremos $c = (c_{ij})$. Dados a, $b \in R^4$ definimos un elemento $a * b \in R^6$ mediante

$$(a*b)_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \qquad 1 \leq i < j \leq 4$$

Nótese que la aplicación $R^4 \times R^4 \to R^6$; $(a,b) \to a * b$ es bilineal antisimétrica. También definimos una forma cuadrática $K : R^6 \to R$ por

$$K(c) = c_{12}\, c_{34} - c_{13}\, c_{24} + c_{14}\, c_{23} \qquad \text{si} \quad c = (c_{ij})$$

Si W es una solución de (3) definimos $K(W)(t) = K(W(t))$; es decir $K(W) : [0, \infty) \to R$ no es otra cosa que la composición $[0, \infty) \xrightarrow{W} R^6 \xrightarrow{k} R$.

LEMA II. 1.

Sea $C \in R^6$ entonces $K(c) = 0$ si y sólo si existen $a,b \in R^4$ tales que $a*b = c$.

DEMOSTRACION

Cálculo elemental.

PREPOSICION II.5.

a) Si W es una solución de (3) entonces K(W) es constante.

b) Sea W una solución de (3) entonces existen $X, Y, \in S$ tales que $X*Y = W$ si y sólo si $K(W) = 0$.

DEMOSTRACION

a) Basta verificar que $\frac{d}{dt} K(W) \equiv 0$.

b) Sea $K(W) \equiv 0$ y $c = W(0) \in R^6$; por el Lema II.1. existen $a, b \in R^4$ tales que $a*b = c$. Sean $X, Y, \in S$ determinadas por $X(0) = a$, $Y(0) = b$. Ya que $X*Y$ es una solución de (3) y $(X*Y)(0) = W(0) = c$, entonces $W = X*Y$. Un cálculo directo muestra que si $X, Y, \in S$ entonces $K(X*Y) \equiv 0$ lo cual termina la demostración.

OBSERVACION II.1.

Sea $W = (w_{ij})$ una solución de (3) y sea $I \in [0, \infty)$ un intervalo no trivial. Si $w_{12} \equiv 0$ en I y $K(W) = 0$ es fácil comprobar que $W \equiv 0$ en I y en consecuencia $W \equiv 0$ en $[0, \infty)$. En particular dos elementos $X, Y, \in S$ son linealmente dependientes si y sólo si $w_{12}(X, Y) \equiv 0$ en algún intervalo no trivial I de $[0, \infty)$.

§4 DESCOMPOSICION EN L-PLANOS.

En esta sección mostraremos el siguiente resultado.

TEOREMA II.1.

Si $d_1(t) > 0$ y $d_2(t) \geq 0$ $(t \geq 0)$ entonces el espacio S de soluciones de (2) es una reunión H_i de L-planos regulares (en $[T_i, \infty)$, algún $T_i \geq 0$).

La demostración del Teorema II.1., será dada a través de una serie de resultados intermedios. Entre tanto, en lo que resta, supondremos que $d_1(t) > 0$, $d_2(t) \geq 0$ $(t \geq 0)$. También, para facilitar el enunciado de nuestros próximos resultados introducimos la siguiente notación:

$$C_p = \{c \in R^6 : c_{12} > 0,\ c_{13} < 0,\ c_{14} = c_{23},\ c_{24} < 0,\ c_{34} > 0\}$$

$$c_F = \{c \in R^6 : c_{12} > 0,\ c_{13} > 0,\ c_{14} = c_{23},\ c_{24} > 0,\ c_{34} > 0\}$$

PROPOSICION II.6.

Sea $W = (w_{ij})$ una solución de (3) con $K(W) \equiv 0$.

Si $W(t_o) \in C_p$ para algún $t_o > 0$ entonces $W(t) \in C_p$ si $t \in [0, t_o]$.

DEMOSTRACION

Ya que $w_{23}(t_o)$, entonces $w_{14} \equiv w_{23}$. Pongamos

$f = w_{12}\, w_{34} + w_{14}^2$, $g = w_{13}\, w_{24}$, entonces $K(W) \equiv f - g \equiv 0$

AFIRMACION

$f(t) > 0$ si $t \in [0, t_o]$. En efecto; sabemos que $f(t_o) > 0$; supongamos entonces que existe $0 \leq t_1 < t_o$ tal que $f(t_1) = 0$ y $f(t) > 0$ si $t_1 < t \leq t_o$. Ya que $g(t) = f(t)$ y $w_{13}(t_o) < 0$, entonces $w_{13}(t) < 0$, $w_{24}(t) < 0$ si $t_1 < t \leq t_o$ y de (3) se sigue que $w'_{34}(t) < 0$ si $t_1 < t \leq t_o$. Por otro lado $w_{12}(t_1)\, w_{34}(t_1) = -w_{14}(t_1)^2 \leq 0$ y en consecuencia $w_{34}(t_1) \leq 0$ ó $w_{12}(t_1) \leq 0$. Pero $w'_{34}(t) < 0$ en $t_1 < t \leq t_o$ impide $w_{34}(t_1) \leq 0$ (porque si no $w_{34}(t_o) < 0$).

Supongamos entonces que $w_{12}(t_1) \leq 0$; utilizando el teorema del valor medio y la identidad $w'_{12} = d_3\, w_{13}$ deducimos la existencia de algún t_2, $t_1 < t_2 < t_o$ tal que $w_{13}(t_2) > 0$; ésta contradicción prueba la afirmación.

Ya que $f > 0$ en $[0, t_o]$, entonces $g > 0$ en $[0, t_o]$ y de aquí $w_{13} < 0$, $w_{24} < 0$ en $[0, t_o]$. En particular $w'_{34} < 0$ en $[0, t_o]$ y así $w_{34}(t) > 0$ en $[0, t_o]$ ($w_{34}(t_o) > 0$) También $w'_{12} = d_3\, w_{13} < 0$ lo cual implica $w_{12}(t) > 0$ en $[0, t_o]$ y da fin a la demostración.

COROLARIO II.2.

Existe una solución no trivial de (3) tal que $K(W)= 0$ y $W(t) \in \overline{C}_p$ si $t \geq 0$; donde $\overline{C}_p$ es la clausura de C_p en R^6.

DEMOSTRACION

Elijamos una base $\{N_i : 1 \leq i \leq 6\}$ da soluciones de (3). Es fácil verificar que para cada entero $n \geq 1$ existen escalares $\{\lambda_{in} : 1 \leq i \leq 6\}$ tales que $\sum_{i=6}^{1} \lambda_{in}{}^2 = 1$ y $W_n = \sum_{i=1}^{6} \lambda_{in} N_i$ satisface $K(W_n) = 0$ y $W_n(n) \in C_p$. Por compacidad podemos suponer que $\lambda_{ni} \longrightarrow \lambda_i$ $n \longrightarrow \infty$ $(1 \leq i \leq 6)$ para ciertos $\lambda_i \in R$. Si $W = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i N_i$ es fácil comprobar que W posee las propiedades requeridas.

PROPOSICION II.7.

Sea $W \neq 0$ una solución de (3) tal que $K(W) \equiv 0$ y $W(t) \in \overline{C}_p$ para $t \geq 0$ entonces $W(t) \in C_p$ $(t \geq 0)$.

DEMOSTRACION

Sabemos que $w_{12} \geq 0$, $w_{13} \leq 0$, $w_{14} = w_{23}$, $w_{24} \leq 0$, $w_{34} \geq 0$; en particular $w_{12} = d_3 w_{13} \leq 0$, y si existe t_o tal que

$w_{12}(t_o) = 0$ entonces $w_{12}(t) \leq 0$ en $t \geq t_o$. De aquí $w_{12} \equiv 0$ en $[t_o, \infty)$, lo que junto con $K(W) = 0$ nos lleva a $W \equiv 0$ (ver observación II.1.) Hemos probado de esta manera que $w_{12} > 0$ en $[0, \infty)$.

Supongamos ahora que existe $t_o \geq 0$ tal que $w_{34}(t_o) = 0$; ya que $w'_{34} = d_1 w_{13} + d_2 w_{24} \leq 0$, entonces $w_{34}(t) \leq 0$ en $t \geq t_o$ y en consecuencia $w_{34} \equiv 0$ en $t \geq t_o$. De aquí $w'_{34} \equiv 0$ (en $t \geq t_o$) lo cual implica $w_{13} \equiv 0$ (en $t \geq t_o$ porque $d_1 > 0$, $d_2 \leq 0$ y $w_{24} \leq 0$). De $K(W) \equiv 0$ obtenemos $w_{14}^2 \equiv 0$ ($w_{14} = w_{23}$) y así $w_{14} \equiv w_{23} \equiv 0$ (en $t \geq t_o$). Asi $w'_{14} \equiv 0$ ($t \geq t_o$) lo cual nos lleva a que $w_{24} \equiv 0$ ($t \geq t_o$) pero de $0 = w'_{24} = d_1 w_{12} + p(w_{14} + w_{23}) + d_3 w_{34}$ y $d_1 > 0$ obtenemos $w_{12} \equiv 0$ en $[t_o, \infty)$. Esta contradicción muestra que $w_{34} > 0$ en $[0, \infty)$.

Finalmente $w_{13} w_{24} = w_{12} w_{34} + w_{14}^2 > 0$ en $[0, \infty)$ y la prueba se sigue rápidamente.

<u>COROLARIO II.3.</u>

S contiene un L-plano regular H (en $[0, \infty)$) generado por dos elementos, X, Y $\in$ S tales que $X(t) * Y(t) \in C_p$ ($t \geq 0$).

DEMOSTRACION

Del corolario II.2. y la proposición II.7. tenemos la existencia de una solución W de (3) tal que $K(W) = 0$ y $W(t) \in C_p$ ($t \geq 0$); en particular $w_{14} = w_{23}$. Por la proposición II.5. Existen U, V $\in$ S tales que $U*V = W$, en particular $[U; V] = w_{14}(U, V) - w_{23}(U, V) = w_{14} - w_{23} = 0$. Sea H el plano de S generado por U y V entonces H es regular en $[0, \infty)$ porque $w_{12}(U,V)(t) = w_{12}(t) > 0$ en $[0, \infty)$; además H es un L-plano porque $[U;V] = 0$ y U,V son linealmente independientes ($U * V \neq 0$). Esto termina la demostración.

En lo que sigue haremos uso de la función cuadrática $V: R^4 \longrightarrow R$ definida por $V(a) = a_1 a_4 - a_2 a_3$ si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Para cada X $\in$ S, definimos $V_X : [0, \infty) \longrightarrow R$, mediante $V_X(t) = V(X(t))$. También tendremos necesidad de los siguientes conjuntos

$$S_+ = \{X \in S: \ V_X(t) \geq 0 \quad \text{si} \quad t \geq 0\}$$

$$S_- = \{X \in S: \ V_X(t_o) \leq 0 \quad \text{para algún } t_o \geq 0\}$$

Ya que $S = S_+ \cup S_-$ bastará mostrar (para probar el teorema II.1.) que S_+ y S_- son ambos reunión de L-planos regulares. Ese es nuestro próximo objetivo. Entre tanto notamos que si $X \in S$ entonces

$$V_X(t) = \frac{d}{dt} V_X(t) = -\sum_{i=1}^{3} d_i(t)\, x_i(t)^2$$

y en consecuencia V_X es estrictamente decreciente si $X \neq 0$.

LEMA II.2.

Sea $a \in R$.

i) Si $V(a) > 0$ entonces existe $b \in R^4$ tal que $a * b \in C_p$

b) Si $V(a) < 0$ entonces existe $b \in R^4$ tal que $a * b \in C_F$

DEMOSTRACION

Cálculo elemental.

PROPOSICION II.8.

Sean $X, Y, \in S$ tales que $(X*Y)(t) \in C_p$ $(t \geq 0)$ y sea H el L-plano regular de S generado por X,Y, entonces $H \subset S_+$.

DEMOSTRACION

Pongamos $w_{ij} = w_{ij}(X,Y)$; dado $Z \in H$ tenemos (ver prueba de preposición II.3.)

$$z_3 = -\frac{w_{23}}{w_{12}}\ {}_1 + \frac{w_{13}}{w_{12}}\ ; \qquad z_4 = -\frac{w_{24}}{w_{12}}\ {}_1 + \frac{w_{14}}{w_{12}}\ {}_2 \quad y$$

de aquí es fácil comprobar que $-w_{12}\, w_{24}\, V_Z = (w_{24}\ {}_1 - w_{14}\ {}_2)^2 +$ $+\, w_{12}\, w_{34}\, z_2^2$ y la demostración se sigue rápidamente.

PROPOSICION II.9.

S_+ es una reunión de L-planos regulares en $[0, \infty)$.

DEMOSTRACION

Del Corolario II.3. y la proposición II.8. se sigue que S_+ contiene un L-plano regular en $[0, \infty)$. Sea $X \in S_+$, queremos mostrar que existe un L-plano regular (en $[0, \infty)$) de S_+ que contiene a X, y como S_+ contiene un L-plano regular podemos asumir que $X \neq 0$.
Ya que $V_X(t) > 0$ ($t \geq 0$), entonces para cada entero $n \geq 1$ existe $b_n \in R^4$ tal que $X(n) * b_n \in C_p$ (Lema II.2.) Sea $U_n \in S$ determinada por la condición $U_n(n) = b_n$, entonces $(X * U_n)(t) \in C_p$ si $o \leq t \leq n$ (ver proposición II.6.) Elijamos λ_n, $\mu_n \in R$ de manera que el elemento $Y_n \in S$ definido por $Y_n = \lambda_n X + \mu_n U_n$

verifique las siguientes condiciones:

$||Y_n(0)|| = 1$; $\langle Y_n(0), X(0)\rangle = 0$. $(n \geq 1)$ donde $\langle a , b\rangle$ denota el producto escalar usual de a, b $\in R^4$ y

$||a||^2 = \langle a , a\rangle \quad (a \in R^4)$.

Claramente se tiene $X(t) * Y_n(t) \in C_p$ si $0 \leq t \leq n$; además por un argumento de compacidad podemos suponer que existe $Y \in S$ tal que $Y_n(t) \to Y(t) \quad (t \geq 0)$; de aquí $X(t) * Y(t) \in \overline{C}_p$ y $X * Y \neq 0$ porque X, Y son lineal-mente independientes ($||Y(0)|| = 1$; $\langle X(0), Y(0)\rangle = 0$).

De la proposición II.7. se sigue que $X(t) * Y(t) \in C_p$ $(t \geq 0)$ y si H es el L-plano regular generado por X, Y se tiene $X \in H \subset S_+$ (ver proposición II.8.) lo cual termina la demostración.

PROPOSICION II.10.

Sean X, Y, $\in$ S tales que $X(t_o) * Y(t_o) \in C_F$ para algún $t_o \geq 0$ entonces $X(t) * Y(t) \in C_F$ $(t \geq t_o)$

DEMOSTRACION

Análoga a II.6.

La siguiente proposición completará la prueba del Teorema II.1.

PROPOSICION II.11.

S_- es una reunión de L-planos regulares H_i (en $[T_i , \infty)$ para algún $T_i \geq 0$).

DEMOSTRACION, AFIRMACION 1

Sean X, Y, $\in$ S tales que $X(t) * Y(t) \in C_F$ si $t \geq t_o$ entonces $H \subset S_-$. En efecto; pongamos $w_{ij} = w_{ij}(X,Y)$ Si $Z \in H$ sabemos que $V_Z\, w_{12} \cdot w_{24} = -(w_{24}\ {}_1 - w_{14}\ {}_2)^2 - w_{12}\, w_{34}\, Z\,{}_2^2$ y la afirmación se sigue rápidamente.

AFIRMACION 2

S_- contiene un L-plano regular en $[0, \infty)$. En efecto sean $a, b \in R^4$ tales que $a * b \in C_F$ y sean $X, Y \in S$ determinadas por $X(0) = a$, $Y(0) = b$. La afirmación 2 se sigue ahora de la proposición II.10 y la afirmación 1.

Sea $X \in S_-$, si $X = 0$ sabemos por la afirmación 2 que existe un L-plano regular $H \subset S_-$, asi que $X \in H \subset S_-$. Supongamos ahora que $X \neq 0$ entonces existe $T \geq 0$ tal que $V_X(T) < 0$ y por el Lema II.2., sabemos que existe $b \in R^4$ tal que $X(t) * b \in C_F$.

Sea $Y \in S$ determinada por la condición $Y(T) = b$ y sea

H el L-plano regular (en $[T, \infty))$ de S generado por $X, Y_{,}$. Entonces $X \in H \subset S_-$ ($H \subset S_-$ por la afirmación 1), lo cual termina la demostración.

NOTA.

Todos los resultados obtenidos en esta última sección permanecen válidos si $d_1 \geq 0$ y $d_1 \not\equiv 0$ en todo intervalo no trivial $I \subset [0, \infty)$.

BIBLIOGRAFIA

|1| Barret J. "Oscillation theory of Ordinary Differential equations" Advances in Math Vol N° 4 1963.

|2| Jones G. "Oscillation Properties of Certain Self Adjoint Linear Differential Equations of the Fourth Orden" Pacific Journal of Math Vol 63 1976.

|3| Nehari Z. and Leigthon W. "On the Oscillatory of Solutions of Self- adjoint Linear Differential Equations of the Fourth Orden" Trans. Amer. Math. Soc. 89.

|4| Nehari Z. "Siconjugate Linear Differential Operators" Transactions of the American Mathematical Society 129, 3, 1967.

|5| Tineo A; Rivero J and Manasevich R. "Asymptotic an Oscillatory Behavior of third-Orden Differential Equations of a Certain Type" Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol 65, N°3 1978.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
SECCION CANJE DE PUBLICACIONES
MERIDA-VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA

Nª 1.-	JESUS RIVERO	"SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE" 1975.
Nª 2.-	RAMON MIRABAL	"G-DERIVATIVES AND GAUSS STRUCTURES ON DIFERENTIABLE MANIFOLDS" 1975.
Nª 3.-	ANTONIO TINEO	"SOBRE LA EXISTENCIA DE CAMPOS VECTORIALES INDEPENDIENTES SOBRE UNA VARIEDAD COMPACTA" 1975.
Nª 4.-	ANTONIO TINEO	"K-TEORIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA" 1976.
Nª 5.-	BRUNO FORTE	"A CHARACTERIZATION OF THE ENTROPY FUNCTIONALS FOR CANONICAL ENSEMBLES. THE DISCRETECASE" 1976.
Nª 6.-	RAUL MANASEVICH Y ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE DISCONJUGACION PARA ECUACIONES CUASIDIFERENCIABLES" 1976.
Nª 7.-	RAUL MANASEVICH	"ON THE FIRTS CONJUGATE POINT OF A QUASIDIFFERENTIAL EQUATION OF ORDER N" 1976.
Nª 8.-	EDGARDO FERNANDEZ	"ALGEBRAS DE BANACH Y OPERADORES P-ABSOLUTAMENTE SUMABLES" 1977.
Nª 9.-	MARIO MILMAN	"AN INEQUALITY FOR GENERALIZED MODULI OF CONTINUITY" 1977.
Nª 10.-	ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE INVERTIBILIDAD LOCAL" 1977.
Nª 11.-	ANTONIO TINEO	"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DINAMICOS DINAMICOS DIFFERENCIABLES" 1977.
Nª 12.-	MARIO MILMAN	"INEQUALITIES FOR MODULI OF CONTINUITY AND REARRANGE MENTS" 1977.

Nº 13.-	MARIO MILMAN	"EMBEDDINGS OF L(p,q) SPACES AND ORLICZ SPACES WITH MIXED NORMS" 1977.
Nº 14.-	R.J. MARKANDA	"FIXED RINGS OF AUTOMORPHISMS OF K|x,y|" 1977.
Nº 15.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"CONSTRUCTIONS AND APLICATIONS OF RIGID SPACES III" 1978.
Nº 16.-	M. RAJAGOPALAN T. SOUNDARARAJAN D. JAKEL	"ON PERFECT IMAGES OF ORDINALS" 1978.
Nº 17.-	M. RAJAGOPALAN P.V. RAMAKRISHNAN	"USES OF BS IN INVARIANT MEANS AND EXTREMELY LEFT AMENABLE SEMIGROUPS" 1978.
Nº 18.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"APLICATION AND CONSTRUCTION OF RIGID SPACES II" 1978.
Nº 19-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"HEREDITARILY LOCALLY COMPACT SEPARABLE SPACES" 1978.
Nº 20.-	MARIO MILMAN	"SOME NEW FUNCTION SPACES AND THEIR TENSOR PRODUCTS" 1978.
Nº 21.-	RAUL NAULIN	"SOLUCIONES PERIODICAS PARA LA ECUACION $x + Bx + F(x)x = f(t)$ x R^n" 1978.
Nº 22.-	H. HERRLICH. V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"LOCAL COMPACTNESS AND SIMPLE EXTENSIONS OF DISCRETE SPACES 1978.
Nº 23.-	JORGE SAENZ	"REGULAR GENERAL CONTACT MANIFOLDS. 1978.
Nº 24.-	T.V. PANCHAPAGESAN SCHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"A GENERALIZED SPECTRAL MAPPING THEOREM. 1978.
Nº 25.-	M. RAJAGOPALAN GILBERTO GONZALEZ	"UN ALGEBRA DE FUNCIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR. 1978.

Nª	26.-	M. RAJAGOPALAN	"UNIFOR ALGEBRAS AND SCATTERED SPACES. 1978.
Nª	27.-	T.V. PANCHAPAGESAN SHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"ON VECTOR LATTICE-VALUED MEASURES-I. 1978.
Nª	28.-	H. HERRLICH	ESPACIOS CERCANOS. 1978
Nª	29.-	ANTONIO TINEO B.	"TEOREMAS DE INVERSION GLOBAL Y APLICACIONES A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES 2π-PERIODICAS DE LA ECUACION $x^{(m)} + {}'F'(x_1,\ldots,x^{(m-1)} = P(t) = P(t+2\pi)$. 1979.
Nª	30.-	GLORIA SANCHEZ	"UN TEOREMA DE CONJUGACION GLOBAL Y SUS APLICACIONES LOCALES. 1979.
Nª	31.-	M. RAJAGOPALAN JORGE VIELMA	"SOBRE LA NO EXISTENCIA DE ESPACIOS SECUENCIALES COMPACTOS Y HAUSDORFF QUE POSEAN UNA COPIA DE S_2. 1979.
Nª	32.-	MARKANDA ET VICTOR ALBIS-GONZALEZ	"ALGORITHME EUCLIDIEN DANS ALGEBRES ARITHMETIQUES PRINCIPALES. 1979.
Nª	33.-	O. QUIJADA	"HIPERBOLICIDAD EN ESPACIOS LIPSCHITZS 1979.
Nª	34.-	ANTONIO TINEO	"GRAFICOS Y VARIEDADES INVARIANTES DE UN HOMEOMORFISMO.
Nª	35.-	ANTONIO TINEO	"ESPECTRO E HIPERBOLICIDAD NO LINEALES. 1979.
Nª	36.-	ANTONIO TINEO	"PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LAS ECUACIONES CUASIDIFERENCIALES LINEALES (A) DE TERCER ORDEN (B) AUTOADJUNTO DE CUARTO ORDEN.

NOTAS DE MATEMATICA es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, tesis, tesis de grado, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en el Departamento de Matemática de la Universidad de Los Andes.

Esta publicación no tendrá carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un sólo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Departamento de Matemática de la Universidad de Los Andes.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser enviada a:

PUBLICACIONES
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA est une collection destinée principalement à réunir les travaux de recherches, thesis, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Départament de Mathématiques.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules chacun desquels aura en général un seul travail —seront numérotés d' una façon continuée.

Les Universités, les Académies, les Sociétés Savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'echanger leurs publications contre celles de l'Départament de Mathématiques.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

PUBLICACIONES
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE MATEMATICA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1979