Universidad de los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática

Control de Sistemas no Lineales: Un enfoque desde la pasividad

Hebertt Sira-Ramírez

Notas de Matemática

Serie: Conferencias

No. 192

Mérida - Venezuela

1999

Notas de Matemática, No. 192
Mérida, 1999.

Control de Sistemas no Lineales: Un enfoque desde la pasividad

Hebertt Sira-Ramírez

1 Presentación

Atendiendo una invitación del comité de la IX Escuela Venezolana de Matemáticas el Profesor Hebert Sira-Ramírez, de la Universidad de Los Andes, dictó la conferencia **Control de sistemas no Lineales: un enfoque desde la pasividad** dando, así, inicio a la inauguración del mencionado evento.

El profesor Sira-Ramírez desde 1977, año en que culminó su doctorado en el Massachusetts Institute of Technology, ha sostenido una encomiable labor de investigación cuyos frutos, hoy, son palpables a través de sus publicaciones, libros, formación de personal y premios. Entre éstos destacamos el **Distinguished Lecture Award,** otorgado por el Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1993-1996, y el premio **Fundación Polar "Lorenzo Mendoza Fleury"**, área Matemáticas Aplicadas, VII edición, 1995.

Una lectura del curriculum vitae del Dr. Sira nos revela que gran parte de su trabajo es en el área de la ingeniería eléctrica, pero con contribuciones que procuran el entendimiento de los fundamentos teóricos de los sistemas estudiados. Esta preocupación lo lleva a emplear, necesariamente, técnicas matemáticas sofisticadas como apreciará el lector de esta palestra.

Al publicar la clase magistral del Profesor Sira el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULA y la Escuela Venezolana de Matemáticas continuan su proyecto, iniciado en 1992, de divulgar y conservar la memoria científica de Venezuela.

Oswaldo Araujo G.
Editor

2 Curriculum Vitae

Hebertt Sira-Ramírez

Nació en San Cristóbal, Venezuela, en 1948.

ESTUDIOS REALIZADOS

Ingeniero Electricista, Universidad de Los Andes (ULA), Venezuela, 1970. Master of Science en Ingeniería Eléctrica, Massachusetts Institut of Technology (MIT), EE.UU, 1974. Doctor of Philosophy en Ingeniería Eléctrica, MIT, EE.UU, 1977.

PREMIOS

Ha recibido varios premios nacionales e internacionales entre los cuales destacamos:
Premio Fundación Polar "Lorenzo Mendoza Fleury", área Matemática Aplicada, 1995.
Distinguished Lecturer Award, Institut of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), 1993.
Premio "Francisco Venanzi" 1993 otorgado por la Facultad de Ciencias, ULA.

ACTIVIDAD DOCENTE

Profesor a dedicación exclusiva de la ULA desde 1970. Ha dictado, entre otros, los siguientes cursos de pregrado y posgrado: *teoría de optimización y aplicaciones; teoría de sistemas de control; control de procesos por computadoras; teoría geométrica del control.*

CARGOS DESEMPEÑADOS

Profesor visitante de varias Universidad en los Estados Unidos y de Institutos de Investigación en Francia. Entre otros cargos destacamos: Miembro del Comité Internacional de la Sociedad de Sistemas de Contol de la IEEE, Coordinador Posgrado en Ingeniería de Control Automático, Facultad de Ingeniería, ULA, 1992. Presidente Comisión Técnica de Electrónica, Informática y Telecomunicaciones del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, 1991. Vice-rector Administrativo de la ULA, período 1980-1984. Presidente de la Comisión de Ingeniería, Tecnología y Ciencias de la Tierra del Programa de Promoción a la Investigación (PPI)

TESIS DIRIGIDAS

Ha orientado 44 tesis de pregrado, 11 de Maestría y 2 de Doctorado.

PARTICIPACIÓN EN CONGRESOS, CONFERENCIAS Y REUNIONES

En el período comprendido entre 1978 y 1997 ha presentado 100 ponencias en conferencias internacionales y 23 en reuniones nacionales.

PUBLICACIONES

Ha publicado capítulos en ocho libros de editoriales internacionales como, por ejemplo, "An Algebraic Approach to Sliding Mode Control" , capítulos 2, págs. 23-49, en Variable Structure and Lyapunov Control, editado por A. S. I. Zinober, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 193 Springer-Verlag, New York, 1994. Es autor de 34 artículos y coautor de 47 artículos publicados en revistas internacionales con arbitraje. Citemos dos de sus úlimos trabajos: "On the Sliding Mode Control of Multivariable Nonlinear Systems" , Internacional Journal of Control; "On the Stabilizations of Nonlinear systems via Input- Dependent Sliding Surfaces" , International Journal of Robust and Nonlinear Control.

SOCIEDADES CIENTÍFICAS Y PROFESIONALES

Miembro de Número de la Academia de Mérida.
Miembro de la Asociación Matemática Venezolana.
Miembro de la American Mathematical Society.
Miembro de la Society of Industrial and Applied Mathematics.
Miembro del IEEE.
Miembro del Colegio de Ingenieros de Venezuela.
Miembro de la International Federation of Automatic Control.
Miembro de la Asociación de Escritores de Venezuela.

OTRAS ACTIVIDADES

Editor Asociado "Special issue on Variables Structure Systems" , vol 57, No. 5, 1993, International Journal of Control (Inglaterra). Revisor de artículos científicos sometidos a consideración para posible publicación en el área de Sistemas Discontinuos y de Estructura Variable, Sistemas Singularmente Perturbados y otras especialidades del Control Automático en varias revistas como: IEEE Transactions on Automatic Control, SIAM Journal on Control, Mathematics Reviews, Zentralblatt fur Mathematik und ihre Grenzgebiete y Control Theory and Advance Technology.

Ha actuado, por invitación, como miembro de Comités de Tesis Doctorales en el Laboratoire d'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (Francia), la Universidad de Linkopig (Suecia) y el Laboratoire des Signaux et Systémes (CNRS, Plateau de Muolon, Francia).

Ha dictado, por invitación, conferencias y seminarios en 19 universidades y centros de investigación del extranjero, 4 en Latino América, dos en EE.UU. y 13 en Francia, Inglaterra y Hungría.

3 Resumen de la Presentación

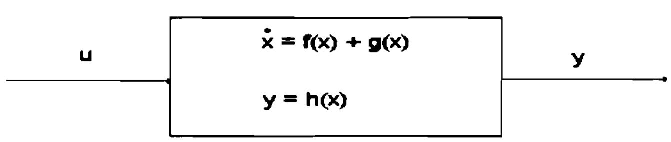
- Realimentación: el espíritu del control
- Estructura Energética de los sitemas: Ejemplo
- Pasividad: Definiciones y resultados generales
- Geometría de la Pasivización
- Caso General
- Método Tradicional de Diseño de Controladores Estabilizantes para sistemas Pasivos
- Ejemplo de Aplicación
- Conclusiones

4 Realimentación: el espíritu del control

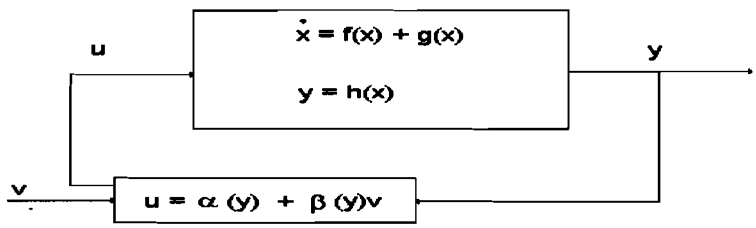
Un **sistema de control** es un triple (f,g,h) relacionado mediante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \;, u \in \mathbb{R} \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son campos vectoriales suaves ($\mathbb{C}^{\infty}$), funciones del estado x del sistema; u es la función de **entrada** (a escogerse) y $h(x)$ es la función de **salida** del sistema (a regularse)



El problema fundamental del control automatico consiste en encontrar una **función de realimentación** que permita obtener la entrada de control u, como función de estado x, o de la salida y, de tal manera que el sistema en **lazo cerrado** tenga un comportamiento deseable.



A estos fines, se consideran dos tipos posibles de realimentación:
Realimentación Estática (de estado o de salida)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad u = \alpha(y) + \beta(y)v$$

Realimentación Dinámica (de estado o de salida)

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x,z) + \beta(x,z)v \\ \dot{z} &= \phi(x,z) + \varphi(x,z)v \end{aligned}$$

Llamamos sistema en lazo cerrado al sistema en el cual se ha sustituido la variable de entrada u por la ley de control o la función de realimentación del estado (o salida).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (f(x) + \alpha(x)g(x)) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

o en el caso de realimentación dinámica,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(x) + g(x)\alpha(x,z) \\ \phi(x,z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(x,z)g(x) \\ \varphi(x,z) \end{pmatrix} v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Cómo diseñar una función de realimentación del estado (o salida) tal que el sistema, en lazo cerrado, tenga un comportamiento deseable:

- Estabilización a un punto de equilibrio.

- Optimalidad respecto a un índice escalar.
- Seguimiento de señales.
- Rechazo a las perturbaciones.

5 Estructura Energética de los sistemas

Descubrir la forma cómo el sistema administra o procesa la energía puede arrojar luces sobre la manera más eficiente de influir externamente sobre el sistema a fin de regular el comportamiento del mismo.

Ejemplo 1 *(Cayley-Rodrígues)*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.5(1+x_1^2)x_2 \\ \dot{x} &= \tfrac{1}{J}u \\ y &= x_1 - X \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente función de " energía "

$$V = \frac{1}{2}[(x_1 - X)^2 + x_2^2]$$

La derivada de esta función está dada por

$$\dot{V} = x_2[0.5(1+x_1^2)(x_1 - X) + \frac{1}{J}u]$$

La escogencia natural de u sería (con $K > o$)

$$u = -0.5J(1+x_1^2)(x_1 - X) - JKx_2$$

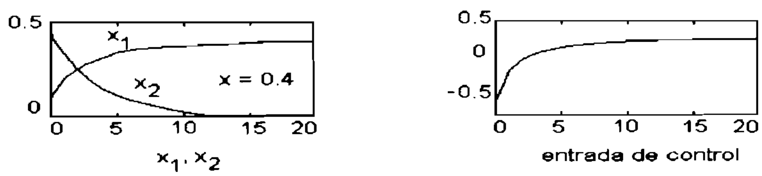
lo cual produce

$$\dot{V} = -Kx_2^2 \leq 0$$

Puesto que $V > 0$ y $\dot{V} \leq 0$, entonces, V es acotada. Pero, siendo x_2 absolutamente continua y

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = -\lim_{t\to\infty} \int_0^t Kx_2^2(\sigma)d\sigma < \infty$$

entonces, $x_2 \in \mathcal{L}_2$ y $\lim\limits_{t\to\infty} x_2 = 0$



El sistema en lazo cerrado está dado por,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.5(1+x_1^2)x_2\\ \dot{x}_2 &= -0.5(1+x_1^2)(x_1-X)-Kx_2\\ y &= x_1-X\end{aligned}$$

Veamos el sistema realimentado de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix}\dot{y}\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.5(1+(y+X)^2)\\ -0.5(1+(y+X)^2) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ x_2\end{bmatrix}$$

Parte de la realimentación creó un campo vectorial cuyos flujos son invariantes respecto de V, es decir un campo **tangente** a la variedad $V =$ constante.

Parte de la realimentación se encargó de inyectar **disipación** al sistema con el objeto de estabilizar **una** de las variables.

$$\dot{V} = x_2[0.5(1+x_1^2)(x_1-X)+\frac{1}{J}u$$

El campo invariante respecto de V introdujo como punto de equilibrio, el valor de cero para la variable de error.

6 Pasividad: Definiciones y resultados generales

Consideremos sistemas de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+g(x)u\ ; x\in\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n\ \ ;\ \mathrm{u}\in\mathcal{U}\subset\mathbb{R}\\ y &= h(x)\ \ ;\ \ y\in\mathcal{Y}\subset\mathbb{R}\end{aligned}$$

Designemos al sistema mediante el triple

$$(f, g, h)$$

Definición 1 *Llamamos a la función a valores reales,*

$$\omega : \mathcal{U}\chi\mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$$

la **tasa de abastecimiento.**

Para todo x^0 y cualquier $u(t)$ (u admisibles : funciones continuas a tramos definidas en $\mathbb{R}$), la salida $y(t) = h(\Phi(t, x^0, u))$ es tal que,

$$\int_0^t |w(u(s), y(s))| ds < \infty$$

Definición 2 *Un sistema (f, g, h) con tasa de abastecimiento ω se dice ser disipativo si existe una función $V \in \mathbb{C}^{\infty}$, no negativa,*

$$V : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamada la **función de almacenamiento**, *tal que para todo $u(t)$ admisible, para todo x^0 y todo $t \geq 0$*

$$\boxed{V(x) - V(x^0) \leq \int_0^t \omega(s) ds}$$

donde $x = \Phi(t, x^0, u)$.

Esta es la desigualdad de la disipación.

Definición 3 *Un sistema (f, g, h) es* **pasivo** *si es disipativo con tasa de abastecimiento*

$$\omega = uy$$

y la función de abastecimiento satiface $V(0) = 0$.

$$\boxed{V(x) - V(x^0) \leq \int_0^t y(s)u(s) ds}$$

Consecuencias inmediatas
Si hacemos $u = 0$ vemos que V decrece. Por lo tanto, *sistemas pasivos que tengan una función de almacenamiento, V, positiva definida son estables en el sentido de Lyapunov.*

Por otra parte, puesto que V decrece a lo largo de cualquier trayectoria compatible con la restricción $y = 0$, se sigue que *los sistemas pasivos que tengan una función de almacenamiento, V, positiva definida tienen una dinámica de los ceros estables en el sentido de Lyapunov.*

Definición 4 *Un sistema pasivo con función de almacenamiento V se dice ser sin pérdidas si para todo u admisible, $x^0 \in \mathcal{X}, t \geq 0$,*

$$\boxed{V(x) - V(x^0) = \int_0^t y(s)u(s)ds}$$

Definición 5 *Un sistema (f, g, h) tiene la propiedad de Kalman, Yakubovitch-Popov (KYP) si existe una función $V \in \mathbb{C}^1$ no negativa,*

$$V : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $V(0) = 0$, tal que

$$\boxed{\begin{array}{l} L_f V(x) = 0 \\ L_g V(x) = h(x) \end{array}}$$

donde $L_f V$ y $L_g V$ representan, respectivamente, " las derivadas de Lie " de V respecto de f y g.

Proposición 1 *Un sistema (f, g, h) que tiene la propiedad de KYP es pasivo, con función de almacenamiento de energía dada por V, Recíprocamente, un sitema pasivo, que cuenta con una función $\mathbb{C}^1$ de almacenamiento de energía, tiene la propiedad de KYP.*

Demostración: KYP implica que

$$\dot{V} = L_f V(x(t)) + L_g V(x(t))u(t) \leq y(t)u(t)$$

integrando entre 0 y t se obtiene la desigualdad de disipación.

Si (f, g, h) es pasivo, la desigualdad de disipación implica la desigualdad anterior y esta implica KYP. ∎

La propiedad fundamental de todo sistema pasivo es que el mismo es estabilizable mediante realimentación de la salida, siempre que el sistema cumpla con una condición de "detectabilidad".

Definición 6 *Un sistema (f, g, h) es de* **estado cero localmente detectable** *si existe una vecindad U de 0, tal que para todo $x \in U$.*

$$h(\Phi(t, x, 0)) = 0 \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0 \quad \textit{implica}$$

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t, x, 0) = 0$$

Si $U = \mathcal{X}$ el sistema es de estado cero detectable

Definición 7 *Una función no negativa $V : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ es* **propia** *si para cada $a > 0$, el conjunto*

$$V^{-1}([0, a]) = \{x \in \mathcal{X} : \quad 0 \leq V(x) \leq \ a\}$$

es compacto

Teorema 1 *Supóngase que (f, g, h) es pasivo con función de almacenamiento V que es positiva definida. (f, g, h) es de estado cero localmente detectable.*

Sea

$$\phi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{U}$$

tal que $\phi(0) = 0$ y $y\phi(y) > 0$ para todo $y \neq 0$. Entonces, la ley de control

$$u = -\phi(y)$$

estabiliza al sistema asintóticamente al equilibrio $x = 0$.

Si, además de ser de estado cero detectable y V es propia, la ley de control anterior estabiliza **globalmente** el sistema al punto de equilibrio $x = 0$.

7 Geometría de la Pasivización

Definición 8 *Sea V una función de almacenamiento positiva definida y sea $f(x)$ un campo vectorial $\mathbb{C}^{\infty}$. Decimos que f tiene una* componente disipativa, *respecto de V, si f puede ser descompuesto en la suma,*

$$f(x) = f_d(x) + f_{nd}(x)$$

de tal manera que

$$L_{f_d}V(x) < 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathcal{X} - \{0\}$$

y $f_{nd}(x)$ no tiene componentes disipativas con respecto a V en $\mathcal{X}$

Nótese que el sistema

$$\dot{x} = f_d(x) + f_{nd}(x) + g(x)u \quad ; \quad y = h(x)$$

no cumple con las condiciones de KYP aún cuando

$$L_gV(x) = h(x)$$

para cierto $V \in \mathbb{C}^1$ no negativo, con $V(0) = 0$.

Definición 9 *Decimos que un sistema (f, g) es* pasivizable mediante realimentación estática del vector de estado,

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

si existe una función de almacenamiento de energía $V \in \mathbb{C}^1$, no negativa, con $V(0) = 0$, tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = [f(x) + \alpha(x)g(x)] + \beta(x)g(x)v \quad ; \quad y = h(x)$$

satisface la condición de KYP para cierto $h(x)$.

Proposición 2 *Todo sistema (f, g) cuyo campo vectorial "de deriva", $f(x)$, tenga una componente disipativa $f_d(x)$ con respecto a la función de almacenamiento de energía V, es transformable, mediante realimentación del vector de estado, en un sistema pasivo de la forma,*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f_d + \left(I - g(x)\frac{\partial V/\partial x}{L_gV(x)}\right) f_{nd}(x) + g(x)v \\ y & = & h(x) = L_gV(x) \end{array}$$

si y solamente si $L_gV \neq 0$ en $\mathcal{X}$.

El cambio de coordenadas del espacio de los controles que logra la pasivización está dado por

$$u = v + \frac{L_{f_{nd}}V(x)}{L_g V(x)}$$

En efecto, es fácil verificar que la matriz

$$M(x) = \left(I - g(x)\frac{\partial V/\partial x}{L_g V(x)} \right)$$

satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} M(x)g(x) &= 0 && \text{para todo } x \in \mathcal{X} \\ dVM(x) &= 0 && \text{para todo } x \in \mathcal{X} \\ M^2(x) &= M(x) && \text{para todo } x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

En otras palabras $M(x)$ es un *operador de proyección sobre el espacio tangente a la variedad $V(x) = constante$, a lo largo del subespacio generado por $g(x)$.*

Interpretación Geométrica

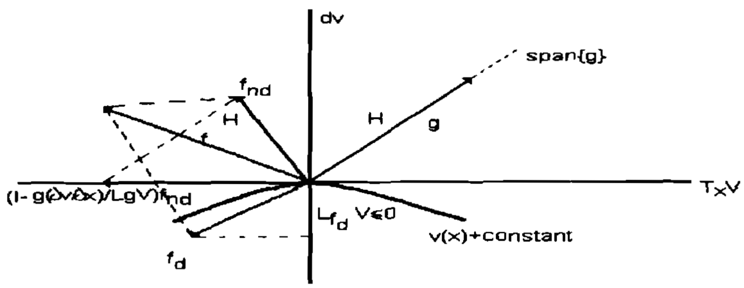


Figure 1: Interpretación geométrica de la pasivización

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f_d(x) + \left(I - g(x)\tfrac{\partial V/\partial x}{L_g V(x)}\right) f_{nd}(x) + g(x)v \\ z &= L_g V(x) \end{aligned}}$$

El sistema en lazo cerrado tiene tres términos claramente identificables:

$f_d(x)$	término disipativo.
$\left(I - g(x)\frac{\partial V/\partial x}{L_gV(x)}\right) f_{nd}(x)$	término de energía invariante.
$g(x)v$	término de acopio de energía.

8 Caso General

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Supóngase que el sistema no cumple con las condiciones de KYP y existe una función $\mathbb{C}^1$, V, tal que $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo x. Suponemos que para un valor constante de $u = U$ existe localmente un punto de equilibrio de interés en $\mathcal{X}$ dado por $x = x_e \neq 0$. Suponemos además que para todo $x \in \mathcal{X}$ se cumple que

$$L_gV \neq 0$$

(El sistema es de grado relativo igual a 1 si se considera a V como salida). El cambio de coordenadas del espacio de los controles, dado por

$$\boxed{u = \frac{h(x)}{L_gV(x)}v - \frac{L_fV(x)}{L_gV} - \frac{h^2(x)}{L_gV(x)}}$$

hace el sistema pasivo desde la entrada v, hasta la salida y.

En efecto, el sistema en coordenadas transformadas queda:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(I - g\frac{\partial V/\partial x}{L_gV}\right) f(x) - g\frac{h^2(x)}{L_gV} + g\frac{h(x)}{L_gV}v \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

$$\tilde{f}(x) = \left(I - g\frac{\partial V/\partial x}{L_gV}\right) f(x) \quad ; \quad \tilde{g}(x) = \left(\frac{h(x)}{L_gV}\right) g(x)$$

Se verifica fácilmente que el sistema transformado cumple la propiedad de KYP. En efecto

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{f}}V(x) &= L_{\left(I-g\frac{\partial V/\partial x}{L_gV}\right)f}V - L_gV\frac{h^2}{L_gV} \\
&= -h^2(x) \leq 0 \\
L_{\tilde{g}}V &= L_gV\frac{h}{L_gV} = h
\end{aligned}
$$

y el sistema es pasivo.

9 Método Tradicional de Diseño de Controladores Estabilizantes para Sistemas Pasivos

Considérese un sistema no lineal escrito en la forma siguiente

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}(x)x + \mathcal{R}(x)x = M(x)v \quad ; \quad \mathcal{D} > 0$$

y la función modificada de almacenamiento de energía

$$V_g(x, x_d) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T\mathcal{D}(x - x_d)$$

donde x_d es una variable auxiliar a ser determinada posteriormente.

Entonces

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_d &= (x - x_d)^T\mathcal{D}(\dot{x} - \dot{x}_d) \\
&= -(x - x_d)[-\mathcal{J}(x)(x - x_d) \\
&\quad -(\mathcal{R}+\mathcal{R}_I)(x - x_d) + M(x)v \\
&\quad -\mathcal{D}\dot{x}_d - \mathcal{J}(x)x_d - \mathcal{R}x_d + \mathcal{R}_I(x - x_d)]
\end{aligned}
$$

Si hacemos que $\dot{V}_d$ satisfaga la siguiente relación,

$$\dot{V}_d = -(x - x_d)^T(\mathcal{R} + \mathcal{R}_I)(x - x_d) \leq -\alpha V_d$$

obtenemos la siguiente ecuación auxiliar

$$\mathcal{D}\dot{x}_d + \mathcal{J}(x)x_d + \mathcal{R}(x)x_d - \mathcal{R}_I(x - x_d) = M(x)v$$

sobre x_d pueden imponerse ahora restricciones algebraicas que involucren ciertas componentes del punto de equilibrio deseado x_e. Estas retricciones permiten definir la ley de control realimentada para v, en términos de x y las componentes no especializadas de x_d.

10 Ejemplo de Aplicación

Considérese el siguiente "hemostato"

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u + P - \tfrac{x_1 x_2}{x_1+Q} + a x_2 \\ \dot{x_2} &= -b x_2 + \tfrac{x_1 x_2}{x_1+Q} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Donde

x_1 = concentración de la masa de alimentación

x_2 = concentración de microorganismos

El punto de equilibrio correspondiente a un valor constante de la variable de entrada $u = U$

$$\overline{x}_1 = \frac{bQ}{1-b} \quad ; \quad \overline{x}_2 = \frac{\overline{u}+P}{b-a}$$

Los campos vectoriales del sistema son:

$$f(x) = \begin{bmatrix} P - \frac{x_1 x_2}{x_1+Q} + a x_2 \\ -b x_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1+Q} \end{bmatrix} \quad ; \quad g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos la siguiente función de almacenamiento de energía

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

La derivada respecto al tiempo V está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_1 \left(u + P - \tfrac{x_1 x_2}{x_1+Q} + a x_2\right) + x_2 \left(-b x_2 + \tfrac{x_1 x_2}{x_1+Q}\right) \\ &= -b x_2^2 - \tfrac{x_2 x_1^2}{x_1+Q} + x_1 \left(u + P + a x_2 + \tfrac{x_2^2}{x_1+Q}\right) \\ &\leq x_1 \left(u + P + a x_2 + \tfrac{x_2^2}{x_1+Q}\right) \end{aligned}$$

La descomposición de f en su componente disipativa y no disipativa, en $\mathcal{X}$, está dada por

$$f_d(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 x_2}{x_1+Q} \\ -b x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} P + a x_2 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1+Q} \end{bmatrix}$$

Defínase la transformación de coordenadas

$$v = u + \frac{L_{f_{nd}} V}{L_g V} = u + P + a x_2 + \frac{x_2^2}{x_1+Q}$$

El sistema en lazo cerrado se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v - \frac{x_1 x_2}{x_1+Q} - \frac{x_2^2}{x_1+Q} \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1+Q} \end{aligned}$$

En notación matricial

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}(x)x^T + \mathcal{R}(x)x^T = Mv$$

donde $x^T = [x_1 \quad x_2], y$

$$\mathcal{D}= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{J}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x_2}{x_1+Q} \\ -\frac{x_2}{x_1+q} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1+Q} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{M}= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo,

$$\mathcal{J}^T(x) + \mathcal{J}(x) = 0 \quad ; \quad \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) > 0$$

Utilizando el método tradicional de diseño de reguladores estabilizantes para sistemas pasivos expuestos anteriormente en forma general, podemos diseñar el siguiente controlador dinámico que "inyecta" disipación, y modifica al punto de equilibrio requerido por la función de almacenamiento de energía

$$\begin{aligned} u &= -P - ax_2 + \frac{x_2(\xi + \overline{x_1} - x_2)}{x_1+Q} - \mathcal{R}_1(x - \overline{x}) \\ \dot{\xi} &= \frac{x_2}{x_1+Q}\overline{x_1} - b\xi + \mathcal{R}_2(x_2 - \xi) \end{aligned}$$

11 Conclusiones

- El diseño de políticas de control realimentado de sistemas no lineales, de tipo general, puede facilitarse, grandemente, mediante consideraciones acerca de la administración de la energía almacenada por parte del sistema, independientemente de la naturaleza física del sistema en cuestión.
- El problema de pasivización tiene carácter netamente geométrico. Este aspecto permite extensiones de la teoría a una clase suficientemente general de sistemas no lineales.
- Hemos demostrado que puede proponerse un método sistemático de pasivización mediante realimentación del vector de estado y cambio de controles.

Bibliografía

- ALONSO, A., Y YDSTIE, E., 1996, "Process Systems, Passivity and the Second Law of Thermodynamics" Computer in Chemical Engineering, 20, S1119-S1124 (suplemento).
- BERGHUIS, V., Y NIJMEIJER, H., 1993, "A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 9, 740-754.
- BYRNES, C.I., ISIDORI, A., Y WILLEMS, J., 1991, "Passivity, Feedback Equivalence and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems" , IEEE Transactions on Automatic Control, 36,1228-1240.
- HILL, D., Y MOYLAN, P., 1976, "The Stability of Nonlinear Dissipative Systems" , IEEE Transactions on Automatic Control, 21, 708-711.
- LIN, W., 1996, "Global Asymptotic Stabilization of General Nonlinear Systems with Stable Free Dynamics via Passivity and Bounded Feedback" , Automatica, 32, 915-924.
- ORTEGA, R. LORIA, A., KELLY, R., Y PRALY, L., 1995, "On Passivity Based Output Feedback Global Stabilization of Euler-Lagrange Systems" , International Journal of Robust and Nonlinear Control, 5, 313-324.
- SIRA-RAMIREZ, H., ORTEGA, R., GARCIA-ESTEBAN, M., Y PEREZ-MORENO, R., 1997, "Passivity Based Regulation of Nonlinear Continuous Processes", in Advances in Control, C. Leondes (Ed.), (Newark, N.J.: The Gordon and Breach Publishing Group), (por aparecer).
- VAN DER SCHAFT, A., 1996, L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 218, (London: Springer-Verlag).
- WILLEMS, J. C., 1971, The Analysis of Feed-back Systems, (Cambridge, MA.: MIT Press).

Hebertt Sira-Ramírez. Universidad de Los Andes, Facultad de Ingenieria, Mérida, Venezuela.
e-mail: isira@ing.ula.ve