NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 154

SERIES DE FOURIER

POR

DICK VAN DULST

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MERIDA - VENEZUELA
1995

Introducción

Estas notas forman el primer capítulo de un curso sobre la teoría de los espacios de Hardy H^p, que dicté en la Universidad de Los Andes, Mérida, de Septiembre a Diciembre de 1993.

Aunque es perfectamente posible desarrollar esta teoría sin conocimientos previos de Análisis de Fourier estamos convencidos de que ciertos hechos, como por ejemplo, núcleos de sumabilidad -ante todo el de Poisson-, y el comportamiento de funciones de $H^p(D)$ cerca de la frontera T de D, se vuelven mucho más comprensibles una vez establecida bien la teoría más antigua de la sumabilidad de Series de Fourier. Por esta razón reunimos en este primer capítulo del curso los elementos de esta teoría que consideramos pertinentes. No se trata, pues, de una presentación sistemática de Análisis de Fourier, y hay temas que ni siquiera se tocan por tener poca relevancia. Sin embargo, se espera que pueden ser utiles estas notas en forma suelta.

Le agradezco a la Universidad de Los Andes y en particular a Intercambio Científico la invitación de dictar el curso, además a mi colega el Profesor Gilberto González por el trabajo de corregir mis numerosos errores lingüísticos, y de pulir el estilo del texto hasta el nivel aceptable.

Dick Van Dulst

1 Coeficientes de Fourier

Vamos a considerar funciones f definidas sobre el círculo $T := \{e^{it} : \ 0 \leq t < 2\pi\}$. Es claro que tales funciones pueden ser identificadas con funciones períodicas F, de período 2π, definidas sobre $\mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$F(t) = f(e^{it}), \quad t \in \mathbb{R}$$

La medida de Lebesgue λ sobre T es la imagen de la medida de Lebesgue dt sobre $[0, 2\pi)$ por la función $t \to e^{it}$, y f es medible con respecto a λ, si y sólo si, F es medible con respecto a dt. Además, tenemos que

$$\int_T f d\lambda = \int_0^{2\pi} F(t)dt.$$

Generalmente no diferenciamos entre F y f en cuanto a la notación. Usaremos la letra f, quedando bien entendido que f pueda ser o función sobre T o función $2\pi-$períodica sobre $\mathbb{R}$. En conformidad con lo anterior, a menudo denotaremos la medida de Lebesgue sobre T por dt. Por razones técnicas se prefiere trabajar con medidas de probabilidad. Por este motivo se usará con frecuencia la medida normalizada $\frac{1}{2\pi}dt$ en nuestras fórmulas.

Definición 1.1 *$L^1(T)$ es la colección de todas las funciones medibles complejas f sobre T de modo que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_T |f(t)|dt < \infty.$$

Mediante la fórmula

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_T |f(t)|dt,$$

se define una norma sobre $L^1(T)$ con la que es completo, es decir, $L^1(T)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.2 *Los* **Coeficientes de Fourier** *de una función $f \in L^1(T)$ son los números complejos*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

y la **serie de Fourier** $S[f]$ *de* f *es la serie trigonométrica formal*

$$S[f] = \sum_{n=\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Ejemplo 1.3 Sea P un **polinomio trigonométrico**, esto es una función de la forma

$$P(t) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{int} \qquad (N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}\ ).$$

Entonces

$$\hat{P}(n) = \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{-N}^{N} a_k e^{ikt} \right) e^{-int} dt = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad |n| \leq N \\ 0 & \text{si} \quad |n| > N \end{cases} .$$

Esta última igualdad se deriva fácilmente de la fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad k = 0 \\ 0 & \text{cuando} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier $S[P]$ es $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, o sea $S[P] = P$.

Observación 1.4 En general la serie de Fourier de una función $f \in L^1(T)$ no converge, ni puntualmente, ni en el sentido de la norma $\|\cdot\|_1$. Sólo es una serie trigonométrica **formal**, donde el término "formal" denota la ausencia de alguna presunción de convergencia. Aún así, veremos más adelante, que se puede recobrar f de su serie de Fourier, es decir, si sabemos que una serie trigonométrica formal $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ es una serie de Fourier o sea, $a_n = \hat{f}(n)$ para algún $f \in L^1(T)$, entonces existe sólo una tal f. Así, f está determinada por su serie de Fourier, o equivalentemente, por la sucesión $(\hat{f}(n))$ de sus coeficientes de Fourier; al menos teoricamente. Con lo cual la aplicación $f \to (\hat{f}(n))$ resulta uno a uno, y así existe la aplicación inversa. Más adelante presentaremos varias descripciones explicitas de esta inversa indicando métodos concretos para encontrar f; una vez dados sus coeficientes de Fourier. Debemos señalar además que no toda serie trigonométrica es una serie de Fourier. Esto se obtiene por ejemplo, del lema de Riemann Lebesgue -ver más adelante-, el cual dice que $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) = 0$ para toda $f \in L^1(T)$. Por consiguiente, $\sum_{\infty}^{\infty} e^{int}$ no es una serie de Fourier. No existe descripción satisfactoria de las sucesiones (a_n) para las cuales existe $f \in L^1(T)$ de modo que $\hat{f}(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Antes de atacar los problemas indicados en la observación precedente, concluimos esta sección con una enumeración de las propiedades elementales de la aplicación: $f \in L^1(T) \to (\hat{f}(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Teorema 1.5

(i) La aplicación: $f \in L^1(T) \to (\hat{f}(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *es lineal, es decir,*

$$\begin{aligned} (\widehat{f+g})(n) &= \hat{f}(n) + \hat{g}(n) \\ (\widehat{\alpha f})(n) &= \alpha \hat{f}(n) \qquad (f, g \in L^1(T),\ \alpha \in \mathbb{C}\ ) \end{aligned}$$

(ii) $\hat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$, *donde* $\bar{\cdot}$ *indica el operador de conjugación compleja.*

(iii) $\hat{f}_\tau(n) = e^{-n\tau}\hat{f}(n)$, *donde* $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ *es la* $\tau-$ *trasladada de* f.

(iv) $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, *para cada* $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

(i) Es obvio.

(ii)

$$\begin{aligned} \hat{\bar{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} e^{-int}dt \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{int}dt} = \overline{\hat{f}}(-n). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \hat{f}_\tau(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t+\tau)}dt = e^{-int}\hat{f}(n). \end{aligned}$$

toda $f \in L^1(T)$. Por consiguiente, $\sum_{\infty}^{\infty} e^{int}$ no es una serie de Fourier. No existe descripción satisfactoria de las sucesiones (a_n) para las cuales existe $f \in L^1(T)$ de modo que $\hat{f}(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Antes de atacar los problemas indicados en la observación precedente, concluimos esta sección con una enumeración de las propiedades elementales de la aplicación: $f \in L^1(T) \to (\hat{f}(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Teorema 1.5

(i) La aplicación: $f \in L^1(T) \to (\hat{f}(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *es lineal, es decir,*

$$\begin{aligned} (\widehat{f+g})(n) &= \hat{f}(n) + \hat{g}(n) \\ (\widehat{\alpha f})(n) &= \alpha \hat{f}(n) \qquad (f, g \in L^1(T),\ \alpha \in \mathbb{C}\ ) \end{aligned}$$

(ii) $\hat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}}(-n)$, *donde* $\bar{\cdot}$ *indica el operador de conjugación compleja.*

(iii) $\hat{f}_\tau(n) = e^{-n\tau}\hat{f}(n)$, *donde* $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ *es la* $\tau-$ *trasladada de* f.

(iv) $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, *para cada* $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

(i) Es obvio.

(ii)

$$\hat{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} e^{-int} dt$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt} = \overline{\hat{f}}(-n).$$

(iii)

$$\hat{f}_\tau(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-in(t+\tau)} dt = e^{-int}\hat{f}(n).$$

Nótese que la segunda igualdad se basa en la invariancia por traslación de la medida de Lebesgue

$$(iv) \qquad \begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) e^{-int}| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt \\ &= \|f\|_1 \end{aligned}$$

Corolario 1.6 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$ la aplicación*

$$L^1(T) \ni f \to \hat{f}(n) \in \mathbb{C} \qquad \textit{es acotada (con norma 1)}$$

Por tanto, $f_k \overset{L^1(T)}{\to} f$ implica $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ cuando $k \to \infty$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Se deduce del T. 1.5 (iv)

2 Convolución

Señalamos en la sección anterior que la aplicación $L^1(T) \ni f \to (\hat{f}(n))$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ es lineal, es decir, se comporta bien con respecto a las estructuras lineales de $L^1(T)$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Notemos que $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ no es solamente un espacio vectorial, sino también un álgebra, con la multiplicación definida coordenada a coordenada. Definimos en lo que sigue una "multiplicación" $*$ en $L^1(T)$, que corresponde a esta multiplicación en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mediante la mencionada aplicación de $L^1(T)$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Como es bien conocida esta "multiplicación" es la convolución.

Teorema 2.1 *Sean $f, g \in L^1(T)$. Entonces la función*

$$h(t) = \int_0^{2\pi} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

está bien definida para casi todo t. Tenemos que $h \in L^1(T)$ y

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{2.2}$$

Además,

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n), \qquad \textit{para cada} \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

Demostración: Existen funciones de Borel f_0 y g_0 tales que $f_0 = f$ en c.t.p, y $g_0 = g$ en c.t.p. Cuando sustituimos f por f_0, y g por g_0 tanto en la integral (2.1), como en las normas y en los coeficientes de Fourier, estos no cambian. En consecuencia, podemos suponer sin perdida de generalidad que f y g son funciones de Borel. Luego la continuidad de las funciones:

$$(t,\tau) \to t-\tau \quad \text{y} \quad (t,\tau) \to \tau$$

de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ implican que la función

$$(t,\tau) \to f(t-\tau)g(\tau) =: F(t,\tau)$$

es de Borel sobre $\mathbb{R}^2$, y por tal razón medible respecto a la $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puesto que esta coincide con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, como es bien conocido. Una versión del teorema de Fubini para funciones no negativas nos permite afirmar que F es integrable:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi^2}\int_{T^2}\int |F| d(\lambda \times \lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(t,\tau)| dt\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[|g(\tau)|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t-\tau)| dt\right] d\tau \\
&= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

Luego del teorema de Fubini en forma general obtenemos que $F(t,\tau) = f(t-\tau)g(\tau)$ es $\tau-$integrable para c.t.t, es decir, $h(t)$ está bien definida para c.t.t, y que $h \in L^1(T)$. Además

$$\begin{aligned}
\|h\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(t)| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t-\tau)| g(\tau)| dt\right] d\tau \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

La igualdad, (2.3) resulta al aplicar el teorema de Fubini una vez más:

$$\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)e^{-int}d\tau dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}g(\tau)e^{-in\tau}d\tau dt \\
&= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right]\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)e^{-in\tau}d\tau\right] \\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n)
\end{aligned}$$

Definición 2.2 *Sean $f, g \in L^1(T)$. La función h dada en (2.1) recibe el nombre de* **convolución** *de f y g, y se denota por $f * g$, es decir*

$$(f*g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (p.c.t.t) \tag{2.4}$$

Nótese que (2.3) se escribe como

$$(\widehat{f*g})(n) = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n), \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

Esta última fórmula expresa el hecho de que la convolución $*$ corresponde a la multiplicación en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, via la aplicación $L^1(T) \ni f \to (\hat{f}(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Teorema 2.3 *$L^1(T)$ con $*$ como multiplicación es un álgebra de Banach conmutativo sin elemento unidad. En particular, para todos $f, g, h \in L^1(T)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$\begin{aligned}
f*g &= g*f && \textit{(conmutatividad)} \qquad (2.6) \\
(f*g)*h &= f*(g*h) && \textit{(asociatividad)} \qquad (2.7) \\
f*(\alpha g+\beta h) &= \alpha(f*g)+\beta(f*g) && \textit{(distributividad)} \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Demostración: No queremos tratar el concepto de álgebra de Banach en este punto, y por eso nos limitamos a comprobar las tres propiedades afirmadas. Haciendo el cambio $t-\tau=\theta$ en (2.6)

$$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_t^{t-2\pi} f(\theta)g(t-\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t-\theta)f(\theta)d\theta \\
&= (g*f)(t)
\end{aligned}$$

Nótese que la penúltima desigualdad resulta de la $2\pi-$ periodicidad de f y g.

$$\begin{aligned}
[(f*g)*h](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f*g)(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau-\sigma)g(\sigma)d\sigma\right]h(\tau)d\tau \\
&\underset{\tau+\sigma=s}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s-\tau)ds\right]h(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s-\tau)h(\tau)d\tau\right]ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)(g*h)sds \\
&= [f*(g*h)](t)
\end{aligned}$$

(2.8) se deduce fácilmente de (2.4).

Usando (2.5) y la inyectividad de la "transformación de Fourier" $f \longrightarrow (\hat{f}(n))$ -que no hemos comprobado todavía- podemos concluir que dadas $f,g,h \in L^1(T)$ satisfaciendo $\hat{f}(n)\hat{g}(n)=\hat{h}(n)$, para cada $n\in\mathbb{Z}$, entonces $f*g=h$. En particular, tomando en lugar de g un polinomio trigonométrico $P(t)=\sum_{-N}^{N} a_n e^{int}$ y recordando que del Ejemplo 1.3 tenemos:

$$\hat{P}(n) = \begin{cases} a_n & \text{cuando} \quad |n| \leq N \\ 0 & \text{cuando} \quad |n| > N \end{cases}$$

Entonces, (2.5) implica que

$$(\widehat{P * f})(n) = (\widehat{f * P})(n) = \begin{cases} a_n \hat{f}(n) & \text{cuando} \quad |n| \leq N \\ 0 & \text{cuando} \quad |n| > N \end{cases} .$$

Notemos que el polinomio trigonométrico $\mathcal{A}(t) = \sum_{-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int}$ también satisface

$$\hat{\mathcal{A}}(n) = \begin{cases} a_n \hat{f}(n) & \text{cuando} \quad |n| \leq N \\ 0 & \text{cuando} \quad |n| > N \end{cases}$$

Luego podemos concluir que $P * f = \mathcal{A}$, es decir,

$$(P * f)(t) = \sum_{n-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{para cada} \quad P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \tag{2.9}$$

Por supuesto esta última fórmula también se verifica directamente, sin utilizar el hecho de que $f \to (\hat{f}(n))$ es uno a uno:

Corolario 2.4 *Si* $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ *y si* $f \in L^1(T)$, *entonces*

$$(P * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int},$$

es decir, los polinomios trigonométricos forman un ideal en el álgebra de Banach $L^1(T)$. *En particular, tomando* $P(t) = e^{int}$, *tenemos* $(e^{in\tau} * f)(t) = \hat{f}(n) e^{int}$.

Demostración: Según (2.8) podemos suponer que $P(t) = e^{int}$ y así

$$\begin{aligned} (P * f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{int} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau \\ &= e^{int} \hat{f}(n) \end{aligned}$$

3 Sumabilidad y núcleos de sumabilidad

Sea $f \in L^1(T)$ y denotemos las sumas parciales de su serie de Fourier por $S_n(f)$, es decir,

$$S_n(f)(t) := S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \tag{3.1}$$

Luego, el corolario 2.4 muestra que

$$S_n(f) = D_n * f, \tag{3.2}$$

donde

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}. \tag{3.3}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \\ &= e^{-int}\left[1 + e^{it} + \cdots + e^{i(2n)t}\right] \\ &= e^{-int}\frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-\frac{1}{2}it} - e^{\frac{1}{2}it}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t} \end{aligned} \tag{3.4}$$

D_n se denomina el **núcleo de Dirichlet** de orden n. El problema de la convergencia de la serie de Fourier $S[f]$, en cualquier sentido, es equivalente al de ver si la sucesión $(D_n * f)_{n=0}^{\infty}$ tiende a un límite, en el mismo sentido.

Igual que en el caso de series escalares, puede ser que $S[f]$ converja en el sentido de Cesaro sin ser sumable. Si $S_n(f)$ está dado como en (3.1), definimos los **medios de Cesaro** de la manera siguiente:

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\left[S_0(f) + \cdots + S_n(f)\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Usando (3.1) se deduce de (3.5) que

$$\sigma_n(f) := \sigma_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikt}, \tag{3.6}$$

lo que podemos escribir concisamente como

$$\sigma_n(f) = K_n * f \tag{3.7}$$

donde

$$K_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt} \tag{3.8}$$

La prueba de esta fórmula es otra aplicación del corolario 2.4. K_n se llama el **núcleo de Fejer** de orden n.

Los núcleos K_n desempeñan el mismo papel en cuanto a la sumabilidad Cesaro que hacen los D_n con respecto a la sumabilidad usual: $S[f]$ es **Cesaro-sumable** si, y sólo si, $(K_n * f)_{n=0}^{\infty}$ converge (en cualquier sentido).

Calculemos K_n explicitamente. De (3.3) y (3.8) obtenemos fácilmente

$$(n+1)K_n - nK_{n-1} = D_n \tag{3.9}$$

También notemos la siguiente forma alternativa de D_n

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t} \\ &= \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})t - \frac{1}{2}t\right] - \cos\left[(n+\frac{1}{2})t + \frac{1}{2}t\right]}{1-\cos t} \\ &= \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1-\cos t} \end{aligned} \tag{3.10}$$

De (3.9), (3.10) y del hecho de que $K_0 \equiv 1$, se deduce:

$$\begin{aligned} (n+1)K_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} D_k \\ &= 1 + \frac{\cos t - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(n+1)t}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

es decir,

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(n+1)t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}t} \right]^2 \tag{3.11}$$

Nuestro principal propósito en el resto de esta sección es comprobar que $K_n * f \to f$ en $L^1(T)$, para cada $f \in L^1(T)$. Este resultado es fundamental, y aparece en formas algo diferentes en circunstancias comparables. Por lo que vale la pena tratarlo en forma abstracta, y demostrarlo de una vez por todas en la forma más general posible. Para tal fin, notemos en primer lugar que K_n es un núcleo de sumabilidad en el sentido de la definición siguiente.

Definición 3.1 *Una sucesión $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ de funciones continuas $2\pi-$periódicas sobre* $\mathbb{R}$ *se llama* **núcleo de sumabilidad** *se tiene las siguientes tres propiedades:*

$$(i) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t)dt = 1, \qquad \textit{para cada} \qquad n \tag{3.12}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(t)|dt \le C, \quad \textit{para cada} \quad n \quad (C \quad \textit{es una constante}) \tag{3.13}$$

$$(iii) \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} |K_n(t)|dt = 0, \qquad \textit{para cada} \qquad 0 < \delta < \pi \tag{3.14}$$

(K_n) se llama un núcleo positivo si todos los K_n son no negativos. Se ve fácilmente que en este caso (ii) es superfluo, porque se deduce de (i). Nótese también que los K_n de Fejer forman un núcleo de sumabilidad positivo: (i) es consecuencia de (3.8) y las relaciones (1.1), mientras (iii) se deduce fácilmente de (3.11). Por otra parte, los D_n de Dirichlet no son un núcleo de sumabilidad: (i) es cierto, debido a (3.3), pero ni (ii), ni (iii) se satisfacen, como veremos más adelante. Este hecho explica en gran parte porque el método de sumabilidad de Cesaro es mucho más fuerte que el de sumabilidad usual (ver sección 8).

Se utilizan dos propiedades cruciales de $L^1(T)$ en el argumento para probar que $K_n * f \to f$ en $L^1(T)$, para cada $f \in L^1(T)$. Puesto que estas se verifican en otros espacios también, formulamos la siguiente definición.

Definición 3.2 *Un* **espacio de Banach homogéneo** *sobre T es un subespacio vectorial $B \subset L^1(T)$ que tiene una norma que satisface $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_1$ con la cual es completo, es decir, un espacio de Banach. Además exigimos que se cumplan las dos propiedades siguientes:*

(i) *$\|\cdot\|_B$ es invariante por traslaciones, es decir, $f_\tau \in B$, cuando $f \in B$, para cada τ, y $\|f_\tau\|_B = \|f\|$, cada vez que $f \in B$ y $\tau \in \mathbb{R}$.*

(ii) *La aplicación $\mathbb{R} \ni \tau \to f_\tau \in B$ es continua, para cada $f \in B$, es decir, $\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$, para cada $\tau_0 \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.3 Sea $C(T)$ el espacio de todas las funciones continuas complejas f sobre T, con la norma

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in T} |f(t)|,$$

y sea $L^P(T), 1 \leq p < \infty$, el espacio de todas las funciones medibles, complejas f sobre T para las que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^P < \infty$, con la norma

$$\|f\|_P := \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^P dt\right]^{1/P}$$

Como es bien conocido, $C(T)$ y $L^P(T)$ son espacios de Banach. Además, notemos que como conjuntos, estos espacios satisfacen

$$C(T) \subset L^{P_1}(T) \subset L^{P_2}(T) \subset L^1(T) \quad \text{para cada} \quad 1 \leq P_2 \leq P_1 < \infty,$$

y que las normas crecen de la derecha a la izquierda, es decir $\|\cdot\|_{\infty} \geq \|\cdot\|_{P_1}$ sobre $C(T)$, y $\|\cdot\|_{P_1} \geq \|\cdot\|_{P_2}$ sobre $L^{P_1}(T)$. Nos limitamos a demostrar la última desigualdad. A partir de la desigualdad de Hölder aplicada al par de exponentes conjugados $\frac{P_1}{P_2}$ y $\frac{P_1}{P_1-P_2}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{P_1}^{P_2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^{P_2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} |f|^{P_2} \cdot 1 \frac{dt}{2\pi} \\
&\leq \left\| |f|^{P_2} \right\|_{P_1/P_2} \|1\|_{P_1/P_1-P_2} \\
&= \|f\|_{P_1}^{P_2}
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $C(T)$ y $L^P(T), 1 \leq p < \infty$ son espacios de Banach homogéneos sobre T. Ya comprobamos la desigualdad $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_1$ para todos estos B. Además, la invariancia por traslaciones resulta obvia en todos los casos, de manera que queda por probar (ii). En el caso de $C(T)$ (ii) es consecuencia del hecho de que cada $f \in C(T)$ es uniformemente continua. En el caso de $L^P(T)$, utilizamos el hecho bien conocido de que $C(T)$ es denso en $L^P(T)$ para cada $P < \infty$.

Fijemos $f \in L^P(T)$ y $\varepsilon > 0$ de manera arbritaria. Entonces existe $g \in C(T)$ tal que $\|f-g\|_P < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad triangular vemos que

$$
\begin{aligned}
\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_P &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_P + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_P + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_P \\
&= \|(f-g)_\tau\|_P + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_P + \|(g-f)_{\tau_0}\|_P \\
&= \|f-g\|_P + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_P + \|g-f\|_P \; < \; 2\varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_P \\
&\leq 2\varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_\infty
\end{aligned}
$$

El último término de la derecha tiende a cero cuando $\tau \to \tau_0$, por la continuidad uniforme de g. Luego, $\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_P \to 0$, puesto que ε es arbitrario.

Otro componente que entra en la demostración del teorema principal de convergencia que estamos buscando, es la integral de Riemann para funciones a valores en un espacio de Banach. Para nuestra situación nos basta definir estas integrales para funciones continuas.

Definición 3.4 *Sea B un espacio de Banach y sea $F : [a,b] \to B$ una función continua sobre el intervalo compacto $[a,b]$. Entonces la integral de Riemann de F sobre $[a,b]$ está definida como*

$$\int_a^b F(t)dt := \lim_{\substack{\max(t_{k+1}-t_k)\to 0 \\ 0\leq k\leq n}} \sum_{k=0}^{n}(t_{k+1}-t_k)F(t_k), \tag{3.15}$$

donde $a = t_0 < t_1 \cdots < t_{n+1} = b$.

La existencia de este límite se demuestra exactamente como en el caso clásico. Igual que en aquel tenemos que F es uniformemente continua- es decir, para todo $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t-s| < \delta \Rightarrow \|F(t) - F(s)\| < \varepsilon$- Luego, para comprobar que dadas dos particiones suficientemente finas de $[a,b]$, las sumas de Riemann correspondientes (3.15) se apróximan, se compara cada una de ellas con la suma correspondiente al refinamiento común- Ver el apéndice.

Las propiedades siguientes se obtienen de manera similar a la teoría clásica

1) Linealidad $\int_a^b [\alpha F(t) + \beta G(t)]dt = \alpha \int_a^b F(t)dt + \beta \int_a^b G(t)dt$

2) $\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt$, para cada terna $a < c < b$

3) $\left\| \int_a^b F(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt$ $\Big($generalización de la desigualdad $\left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|dt$ en el caso clásico$\Big)$

4) $\left\langle \int_a^b F(t)dt, \varphi \right\rangle = \int_a^b \langle F(t), \varphi \rangle dt$, para cada $\varphi \in B^*$, el dual de B.

Demostración: de 4)

$$
\begin{aligned}
\left\langle \int_a^b F(t)dt, \varphi \right\rangle &= \left\langle \lim_{\max(t_{k+1}-t_k)\to 0} \sum_{k=0}^{n} (t_{k+1}-t_k) F(t_k), \varphi \right\rangle \\
&= \lim \left\langle \sum_{k=0}^{n} (t_{k+1}-t_k) F(t_k), \varphi \right\rangle \\
&= \lim \sum_{k=0}^{n} (t_{k+1}-t_k) \langle F(t_k), \varphi \rangle \\
&= \int_a^b \langle F(t), \varphi \rangle \, dt
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la continuidad y linealidad de φ, y la definición clásica de la integral $\int \langle F(t), \varphi \rangle dt$.

Ahora estamos bastante equipados para establecer el siguiente resultado central sobre convergencia:

Teorema 3.5 *Sea B un espacio de Banach, sea $\varphi : T \to B$ continua, y supongamos que (K_n) es un núcleo de sumabilidad. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \varphi(0), \quad \textit{en la norma de} \quad B \tag{3.16}$$

observe que la integral tiene su valor en B.

Demostración: Fijemos $\varepsilon > 0$ de modo arbitrario y escojemos $\delta > 0$ tal que

$$\|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |\tau| < \delta, \tag{3.17}$$

y luego $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(\tau)| d\tau < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad n \geq n_0. \tag{3.18}$$

Esto es posible en virtud de (3.14). Así, usando (3.12),

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \varphi(0) \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))d\tau \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))d\tau \right\| \\
&\quad + \left\| \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))d\tau \right\|.
\end{aligned}
$$

Estos dos términos los estimamos separadamente para cada n. Con ayuda de 3), (3.17) y luego (3.13) obtenemos:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))d\tau\right\| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|K_n(\tau)|\|\varphi(\tau)-\varphi(0)\|d\tau \\ &\leq \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)(d\tau \\ &\leq \varepsilon\|K_n\|_1 \leq \varepsilon C,\end{aligned}$$

para cada $n \geq n_0$. Ahora haciendo uso de (3.18),

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))d\tau\right\| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \|K_n(\tau)\|\|\varphi(\tau)-\varphi(0)\|d\tau \\ &\leq \max_{0\leq\tau\leq 2\pi}\|\varphi(\tau)-\varphi(0)\|_B \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|K_n(\tau)|d\tau \\ &\leq 2\|\varphi\|_\infty \cdot \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $\|\varphi\|_\infty := \max_{0\leq t<2\pi}\|\varphi(t)\|$.

Concluimos así que,

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \varphi(0)\right\| \leq \varepsilon\left[C + 2\|\varphi\|_\infty\right]$$

para cada $n \geq n_0$.

Esto completa la demostración, puesto que ε es arbitrario.

Corolario 3.6 *Sea B un espacio de Banach homogéneo sobre T y sea (K_n) un núcleo de sumabilidad. Entonces para cada $f \in B$,*

$$f = \lim_{n\to\infty} K_n * f, \quad \textit{en la norma de} \quad B$$

Demostración: Consideremos la función $T\ni\tau \to f_\tau \in B$. Esta función es continua, en virtud de la definición 3.2 (ii), de manera que el Teor 3.5 implica que

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)f_\tau d\tau = f_0 = f, \quad \text{en la norma de} \quad B.$$

Por tanto, basta mostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau) f_\tau d\tau = K_n * f \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.19}$$

Observemos que la integral de la izquierda pertenece a B.

Por otra parte, hasta donde sabemos $K_n * f$ puede estar solamente en $L^1(T)$. En todo caso, ambos miembros de (3.19) estan en $L^1(T)$, de manera que podemos aplicarles un elemento $\varphi \in L^\infty(T) = L^1(T)^*$. Puesto que, $L^\infty(T)$ separa puntos en $L^1(T)$, en virtud del teorema de Hahn-Banach, (3.19) estará establecida cuando verfiquemos que

$$\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau) f_\tau d\tau, \varphi \right\rangle = \langle K_n * f, \varphi\rangle \quad \text{para cada} \quad \varphi \in L^\infty(T).$$

Pero esto se ve fácilmente usando 4) y Fubini:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau) f_\tau d\tau, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\langle f_\tau, \varphi\rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)\varphi(t)dt\right]d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)K_n(\tau)d\tau\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)(K_n * f)(t)dt \\
&= \langle K_n * f, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Corolario 3.7 *Para cada $f \in B$, donde B es un espacio de Banach homogéneo sobre T, la serie de Fourier de f es Cesaro-sumable a f, es decir, $\sigma_n(f) \to f \in B$.*

Demostración: $\sigma_n(f) = K_n * f$ y (K_n) es un núcleo de sumabilidad.

La Cesaro-sumabilidad de las series de Fourier nos permite extraer unas consecuencias importantes.

Teorema 3.8 (Teorema de unicidad) *La aplicación, $L^1(T) \ni f \to (\widehat{f}(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ es uno a uno, o , lo que es equivalente, $f = 0$ cuando $\widehat{f}(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración: Supongamos que $\widehat{f}(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\sigma_n(f) = \sum_{-n}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikt} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que $\sigma_n(f) \to f$, concluimos que $f = 0$.

Teorema 3.9 (Lema de Rieman-Lebesgue) *Si $f \in L^1(T)$, entonces $\widehat{f}(n) \to 0$ cuando $|n| \to \infty$.*

Demostración: Fijemos $\varepsilon > 0$ de modo arbitrario, y escojamos $k \in \mathbb{N}$ tan grande de manera que $\|f - \sigma_k(f)\|_1 < \varepsilon$. Ya que $\widehat{\sigma_k(f)}(n) = 0$ cuando $|n| > k$. A partir del Teor 1.5 (iv).

$$|\widehat{f}(n) = |\widehat{[f - \sigma_k(f)]}(n)| \leq \|f - \sigma_k(f)\|_1 < \varepsilon \text{ para cada } |n| > k.$$

Otra consecuencia trivial del corolario 3.7 es

Teorema 3.10 *Los polinomios trigonométricos son uniformemente densos en cada espacio de Banach homogéneo.*

En particular, tomando $B = C(T)$, tenemos

Teorema 3.11 (Teorema de aproximación de Weierstrass) *Los polinomios trigonométricos son uniformemente densos en $C(T)$.*

Observación 3.12 No se puede incluir $p = \infty$ en los teoremas que acabamos de presentar. La razón es que obviamente la aplicación $T \ni \tau \to f_\tau \in L^\infty(T)$ no es continua. Además, se ve fácilmente la imposibilidad de que $\sigma_n(f) \to f$ en L^∞ para cada $f \in L^\infty(T)$. Ya que, primeramente, eso implicaría que cada f tendría una representación continua, es decir, $C(T) = L^\infty(T)$, lo que es evidentemente falso. Otra manera de llegar a lo mismo sería: $\sigma_n(f) \to f$ para cada $f \in L^\infty(T)$ determinaría la separabilidad de $L^\infty(T)$, lo que es igualmente falso.

4 Sumabilidad de Cesaro puntual

Vimos en la sección 3, que $\sigma_n(f) \to f$ en la norma de cada espacio de Banach homogéneo que contiene f. En particular $\sigma_n(f) \to f$ uniformemente cuando $f \in C(T)$. Cuando falta la continuidad de f, sin embargo, $\sigma_n(f)$ ni siquiera necesita converger puntualmente. Se puede decir mucho acerca de convergencia puntual en varias situaciones especiales, pero nos bastan los dos siguientes resultados.

Teorema 4.1 (Fejer) *Si $f \in L^1(T)$ es continua en $t = t_0$, entonces $\sigma_n(f, t_0) \to f(t_0)$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración: Recordemos que $\sigma_n(f) = K_n * f$ y que (K_n) satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) de la definición 3.1. De hecho, (iii) puede fortalecerse mucho en el caso del núcleo de Fejer:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{\delta \le t \le 2\pi-\delta} K_n(t)\right] = 0, \quad \text{para cada} \quad \delta > 0. \tag{4.1}$$

Esto se obtiene fácilmente de la fórmula (3.11). Fijemos ahora $\varepsilon > 0$ arbitrariamente y escojamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |t - t_0| < \delta. \tag{4.2}$$

A continuación, usando (4.1), seleccionamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\delta \le t \le 2\pi-\delta} K_n(t) < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad n \ge n_0. \tag{4.3}$$

Entonces, para cada $n \ge n_0$, usando (3.7), y después (4.2) y (4.3):

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f, t_0) - f(t_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\tau} K_n(\tau)\,[f(t_0-\tau) - f(t_0)]\,d\tau\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)|f(t_0-\tau) - f(t_0)|d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau)|f(t_0-\tau) - f(t_0)|d\tau \\
&\le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(t_0-\tau) - f(t_0)|d\tau \\
&\le \varepsilon(1 + \|f - f(t_0)\|_1).
\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, queda completada la prueba.

El segundo resultado sobre convergencia puntual que nos interesa se debe a Lebesgue, y establece que $\sigma_n(f) \to f$ en casi todo punto, para cada $f \in L^1(T)$. La demostración depende del hecho bien conocido de que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f(\tau) - f(t)|d\tau = 0, \quad p.c.t.t \tag{4.4}$$

para una demostración de este hecho, ver el apéndice.

Una consecuencia inmediata de (4.4) es

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)}{2}-f(t)\right|d\tau=0,\quad p.c.t.t. \tag{4.5}$$

Esta fórmula será fundamental para nuestra demostración. Otro hecho técnico que necesitaremos es la siguiente estimación:

$$K_n(\tau)\le\min\left(n+1,\frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}\right)\quad\text{para}\quad -\pi\le\tau\le\pi. \tag{4.6}$$

Recordando que $K_n(\tau)=\dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\tau}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\tau}\right]^2$, la desigualdad $K_n(\tau)\le\dfrac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}$ se deduce directamente de $\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\tau\right|\ge\frac{|\tau|}{\pi}$, $-\pi\le\tau\le\pi$, mientras que la estimación $K_n(\tau)\le n+1$ depende del hecho de que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(n+1)\tau}{\operatorname{sen}\tau}\right|\le n+1,\quad\text{para cada}\quad\tau.$$

Teorema 4.2 (Lebesgue) *Si $f\in L^1(T)$, entonces $\sigma_n(f)\to f$ en casi todo punto.*

Demostración: Fijemos un t_0 tal que $f(t_0)$ es finito y (4.5) se verifique para $t=t_0$. Puesto que estos puntos t_0 forman un conjunto de medida 1, nos basta verificar que $\sigma_n(f,t_0)\to f(t_0)$.

Igual que arriba podemos escribir, para cada $0<\delta<2\pi$,

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,t_0)-f(t_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(\tau)\,[f(t_0-\tau)-f(t_0)]\,d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\right)K_n(\tau)[f(t_0-\tau)-f(t_0)]d\tau\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)K_n(\tau)\left[\frac{f(t_0-\tau)-f(t_0+\tau)}{2}-f(t_0)\right]d\tau\end{aligned}$$

usando el hecho de que K_n es una función par en la última igualdad. De (4.6) se deduce que la última integral está acotada por $\frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}\|f - f(t_0)\|_1$, y esto tiende a cero siempre que $(n+1)\delta^2 \to \infty$.

Esto se cumple si hacemos $\delta = n^{-1/4}$, y nos queda por verificar que la primera integral tiende a cero cuando $n \to \infty$, para $\delta = n^{-1/4}$. En la demostración nos conviene definir

$$\Phi(h) := \int_0^h \left| \frac{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)}{2} - f(t_0) \right| d\tau$$

y notemos que

$$\Phi'(h) := \left| \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h)}{2} - f(t_0) \right| \quad p.c.t.h.$$

(ver apéndice). Partiendo la primera integral y aplicandoles a los dos términos las dos acotaciones de (4.6), encontramos

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\pi}\int_0^\delta K_n(\tau) \left[\frac{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)}{2} - f(t_0) \right] d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\left| \int_0^{1/n} \cdots \right| + \frac{1}{\pi}\left| \int_{1/n}^{\delta} \cdots \right| \\
&\leq \frac{n+1}{\pi}\Phi(1/n) + \frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta} \left| \frac{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)}{2} - f(t_0) \right| \frac{d\tau}{\tau^2}
\end{aligned}$$

El término $\frac{n+1}{\pi}\Phi(1/n)$ tiende a cero, en virtud de (4.5). El segundo término es igual a $\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta} \Phi'(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2}$ y lo vamos a integrar por partes:

$$\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta} \Phi'(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{\pi}{n+1}\left.\frac{\Phi(\tau)}{\tau^2}\right|_{\tau=1/n}^{\tau=\delta} + \frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta} \frac{\Phi(\tau)}{\tau^3} d\tau.$$

Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces (4.5) nos permite fijar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$

$$\Phi(\tau) < \varepsilon\tau \quad \text{cuando} \quad 0 < \tau \leq \delta = n^{-1/4}.$$

Por tanto, tenemos para cada $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n+1}\frac{\Phi(\tau)}{\tau^2}\bigg|_{\tau=1/n}^{\tau=\delta} + \frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta}\frac{\Phi(\tau)}{\tau^3}d\tau &\leq \frac{\pi\varepsilon n^{1/4}}{n+1} + \frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\int_{1/n}^{\delta}\frac{d(\tau)}{\tau^2} \\ &< 3\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto establece la condición buscada, puesto que ε es arbitrario.

5 Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier

Ya vimos que los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^1(T)$ tienden a cero-lema de Riemann-Lebesgue- ¿Podemos ambicionar más de este resultado?. La respuesta es negativa, y en realidad como muestra el teorema que sigue, se puede construir f tal que $(\widehat{f}(n))$ tiende a cero de una manera tan lenta como querramos.

Teorema 5.1 *Sea $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión par ($a_n = a_{-n}$) de números no negativos tal que $a_n \to 0$ cuando $|n| \to \infty$. Supongamos además que*

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0, \quad \textit{para cada} \ \ n > 0 \tag{5.1}$$

entonces existe $f \in L^1(T)$ tal que $\widehat{f}(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Notemos primero que la condición de convexidad (5.1) significa que $a_{n-1} - a_n \geq a_n - a_{n+1}$, de modo que $(a_n - a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero. Además, afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0 \tag{5.2}$$

Es claro que sólo basta comprobar esto para valores pares. Pero esto es sencillo ya que

$$\begin{aligned} 2n(a_{2n} - a_{2n+1}) &\leq 2[(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})] \\ &= 2(a_n - a_{2n}) \leq 2a_n \to 0, \text{ cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

Podemos concluir a continuación que la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \ \text{ converge, con suma } \ a_0 \tag{5.3}$$

De hecho se verifica fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}),$$

de modo que (5.3) se deduce de (5.2).

Ahora ponemos

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1} \tag{5.4}$$

(donde K_n es el núcleo de Fejer de orden n). Nótese que (5.4) converge en $L^1(T)$, por (5.3) y el hecho de que $\|K_n\|_1 = 1$, para cada n. Entonces $f \in L^1(T)$ está bien definida, y evidentemente es no negativa. Finalmente, al hacer un cálculo elemental se muestra que f tiene los coeficientes de Fourier deseados:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\widehat{K}_{n-1}(j) \\
&= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\left(1-\frac{|j|}{n}\right) \\
&= a_j
\end{aligned}$$

El resultado precedente muestra que sucesiones **pares** de coeficientes de Fourier puede tender a cero de modo arbitrariamente lento, lo cual pone en manifiesto la fuerza del lema de Riemann-Lebesgue. En contraste con este hecho, sucesiones (**impares** ($a_n = -a_{-n}$) de coeficientes de Fourier no pueden acercarse a cero de modo arbitrariamente lento, al menos si $a_n \geq 0$ cuando $n > 0$: necesariamente satisface $\sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n} < \infty$. La demostración de este enunciado lo vamos a presentar a continuación, pero primero notemos la siguiente relación interesante entre los coeficiente de Fourier de f y los de su integral $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$:

Lema 5.2 *Sea $f \in L^1(T)$ y supongamos que $\hat{f}(0) = 0$. Entonces, si definimos*

$$F(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

F es continua, periódica con período 2π, y

$$\hat{F}(n) = -\frac{i}{n}\hat{f}(n), \qquad \textit{para cada } n \neq 0. \tag{5.5}$$

Demostración: Es claro que F es continua (más aún, lo es absolutamente), mientras que la periodicidad de F es evidente:

$$F(t+2\pi)-F(t)=\int_t^{t+2\pi} f(\tau)d\tau = 2\pi\hat{f}(0)=0\,,\quad \text{para cada t.}$$

Finalmente, una integración por partes da lugar a (5.5):

$$\begin{aligned}\hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-i\,n\,t}dt\\ &= \frac{i}{2\pi n}\int_0^{2\pi} F(t)d(e^{-int})\\ &= -\frac{i}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-int}F'(t)dt\\ &= -\frac{i}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-int}f(t)dt\\ &= -\frac{i}{n}\hat{f}(n).\end{aligned}$$

Teorema 5.3 *Sea $f\in L^1(T)$ y supongamos que $\hat{f}(|n|)=-\hat{f}(-|n|)\geq 0$, para cada $n\in\mathbb{Z}$. Entonces*

$$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\hat{f}(n)<\infty. \tag{5.6}$$

Demostración: Nótese que la suposición implica que todos los términos de (5.6) son no negativos, y en particular que $\hat{f}(0)=0$. Poniendo $F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$, el lema establecido arriba nos indica que $F\in C(T)$ y que

$$\hat{F}(n)=-\frac{i}{n}\hat{f}(n),\qquad \text{para cada } n\neq 0. \tag{5.7}$$

Vamos a aplicar el Teor 4.1 de Fejer a la función $F-\hat{F}(0)$ en el punto $t_0=0$, teniendo en cuenta que (5.7) y la suposición implican

$$\widehat{(F-\hat{F}(0))}\,(n)=\begin{cases}0 & \text{cuando } n=0\\ -\dfrac{i}{|n|}\hat{f}(|n|) & \text{cuando } n\neq 0\end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}[K_N*(F-\hat{F}(0))](0) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)\widehat{(F-\hat{F}(0))}\,(n)\\
&= \lim_{N\to\infty}2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left[-\frac{i}{n}\hat{f}(n)\right]\\
&= F(0)-\hat{F}(0)
\end{aligned}$$

y, por tanto

$$\lim_{N\to\infty}2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n}=i(F(0)-\hat{F}(0)).$$

Siendo $\frac{\hat{f}(n)}{n}\geq 0$ para cada $n\neq 0$, concluimos que $i(F(0)-\hat{F}(0))$ es una constante no negativa C, y que

$$2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n}\leq C\,,\ \text{para cada } N\in\mathbb{N}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{\hat{f}(n)}{n} &\leq 2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{2N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n}\\
&\leq 2\sum_{n=1}^{2N}\left(1-\frac{n}{2N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n}\leq C,
\end{aligned}$$

para cada N, y esto establece la relación (5.6).

Observación 5.4 Formalmente podemos representar cada serie trigonométrica en términos de senos y cosenos, recordando las fórmulas

$$e^{it}=\cos t+i\mathrm{sen}\,t\,,\quad \cos t=\frac{1}{2}[e^{it}+e^{-it}]\,,\quad \mathrm{sen}\,t=\frac{1}{2i}[e^{it}-e^{-it}].$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{int} &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+a_{-n}]\cos nt+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+a_{-n}]\mathrm{sen}\,nt\\
&= \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\mathrm{sen}\,nt),
\end{aligned}$$

donde,

$$\frac{A_0}{2} := a_0\,, \quad A_n := a_n + a_{-n}\,, \quad B_n := i[a_n - a_{-n}]\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Recíprocamente, cada serie de la forma

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \text{sen}\, nt),$$

puede escribirse como $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, cuando hacemos

$$\begin{aligned} a_0 := \frac{A_0}{2}\,,\ a_n :&= \frac{1}{2}[A_n - iB_n]\,, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \\ a_n :&= \frac{1}{2}[A_{-n} + iB_{-n}]\,, \quad \text{para} \quad n = -1, -2, \ldots \end{aligned}$$

En particular, si $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ es la serie de Fourier de una $f \in L^1(T)$, es decir $a_n = \hat{f}(n)$, tenemos

$$\frac{A_0}{2} := \hat{f}(0)\,, \quad A_n := \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\,, \quad B_n := i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)]\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

lo que es equivalente a

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt\,, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \text{sen}\, nt dt\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

Estas fórmulas arriba establecidas fácilmente implican las siguientes equivalencias:

$$\left.\begin{array}{lllll} f \text{ real} & \Leftrightarrow & \hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)} & \Leftrightarrow & A_n \text{ y } B_n \text{ son reales} \\ f \text{ par} & \Leftrightarrow & \hat{f}(n) = \hat{f}(-n) & \Leftrightarrow & B_n = 0 \\ f \text{ impar} & \Leftrightarrow & \hat{f}(n) = -\hat{f}(-n) & \Leftrightarrow & A_n = 0 \end{array}\right\},$$

para cada $n = 0, 1, \ldots$

En particular, la serie de Fourier de f se convierte en serie "seno" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\, nt$ si, y sólo si, f es impar, y en una serie "coseno" $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cos nt$ si, y sólo si, f es par.

Ejemplo 5.5 Afirmamos que la serie "coseno"

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} \quad \text{es una serie de Fourier,} \tag{5.8}$$

mientras que la serie "seno"

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{\log n} \quad \text{no es una serie de Fourier.} \tag{5.9}$$

De hecho, aplicando las fórmulas de la observación precedente, encontramos en el caso (5.8) que

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\log|n|} & \text{cuando } |n| \geq 2 \\ 0 & \text{cuando } |n| < 2 \end{cases}$$

Puesto que además, la función $\dfrac{1}{\log t}$ $(t > 1)$ es convexa, los a_n satisfacen las condiciones del teorema (5.1), de modo que (5.8) está establecida.

En el caso de (5.9) vamos a considerar la serie $\sum_{n=2}^{\infty} i\dfrac{\operatorname{sen} nt}{\log n}$ (esta es una serie de Fourier si, y sólo si, $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nt}{\log n}$ lo es, evidentemente). Tenemos que:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\log n} & \text{cuando } |n| \geq 2 \\ 0 & \text{cuando } n = -1, 0, 1, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\log|n|} & \text{cuando } |n| \leq -2. \end{cases}$$

Entonces, $a_{|n|} = -a_{-|n|} \geq 0$, y T.5.3 nos dice que una condición necesaria para que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ sea una serie de Fourier, es que $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{n} < \infty$. Es claro que esta condición no se verifica en nuestro caso. Por tanto $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nt}{\log n}$ no es una serie de Fourier, a pesar de que los coeficientes de Fourier tienden a cero (pero de un modo no suficientemente rápido).

Los dos últimos ejemplos son de gran importancia: (5.9) es la llamada "serie conjugada" de (5.8). Luego, acabamos de ver, que la serie conjugada de una serie de Fourier no necesariamente es una serie de Fourier. La trascendencia de este hecho va a ponerse en evidencia, más adelante, cuando tratemos el operador de conjugación con más profundidad.

6 Series de Fourier en $L^2(T)$.

La mayoría de los resultados más profundos del análisis de Fourier se reducen a trivialidades cuando se trabaja en $L^2(T)$. La razón es que $L^2(T)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Iniciemos nuestras observaciones recordando que $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$ es el espacio de Hilbert compuesto de todas las sucesiones complejas $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ que satisfacen $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Se define el **producto interno** por

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle := \sum a_n \overline{b_n},$$

y la **norma** por

$$\|(a_n)\| := \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Suponemos conocido el hecho de que con estas definiciones los axiomas de un espacio de Hilbert se satisfacen. En particular, ℓ^2 es completo, es decir, cada sucesión de Cauchy en ℓ^2 converge.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definamos el enésimo **vector unidad** $e_n \in \ell^2$, como $e_n := (\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, donde 1 va en el enésimo lugar y cero en los demás lugares.

Entonces, $< e_n, e_m >= 0$ cuando $n \neq m$ y $\|e_n\| = \sqrt{< e_n, e_n >} = 1$, para cada n.

Esto se expresa diciendo que $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ es una **sucesión ortonormal** en ℓ^2. Es claro que cada elemento $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ en el que a lo sumo un número finito de los a_n es $\neq 0$, se escribe como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión arbitraria de números complejos (no necesariamente en ℓ^2), vamos a considerar la sucesión $\left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\right)_{N=1}^{\infty}$ en ℓ^2. Puesto que, para $N < M$ tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=-M}^{M} a_n e_n - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\right\|^2 &= \left\|\sum_{N<|n|\leq M} a_n e_n\right\|^2 \\ &= \sum_{N<|n|\leq M} |a_n|^2,\end{aligned}$$

podemos concluir que $\left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en ℓ^2 si, y sólo si, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Bajo esta condición el límite se denota por $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$, y decimos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ converge en ℓ^2. Notemos de paso que no importa el orden que se adopte para sumar la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$, porque la condición de convergencia equivalente $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, es invariante por permutaciones de $\mathbb{Z}$.

También observamos que la continuidad de la norma (que vale en cada espacio de Hilbert) implica que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n\right\| &= \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\right\| \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Ahora tenemos una nueva descripción de ℓ^2 en términos del sistema ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

ℓ^2 consiste en todas las sumas $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ con $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ y

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e_n \, , \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e_n \right\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \overline{b}_n, \quad \left\| \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e_n \right\| = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Además el subespacio generado por los e_n es denso en ℓ^2, puesto que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n,$$

para cada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n \in \ell^2$.

En un espacio de Hilbert abstracto se llama **sistema ortonormal** a cada colección $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ tal que

$$< e_\alpha, e_\beta >= 0 \quad \text{cuando} \quad \alpha \neq \beta, \quad \text{y} \quad \|e_\alpha\| = (< e_\alpha, e_\alpha >)^{1/2} = 1.$$

Eso implica que para todas las sumas finitas $\sum\limits_\alpha a_\alpha e_\alpha$ y $\sum\limits_\alpha b_\alpha e_\alpha$ tenemos que:

$$\left\langle \sum_\alpha a_\alpha e_\alpha, \sum_\alpha b_\alpha e_\alpha \right\rangle = \sum_\alpha a_\alpha \overline{b}_\alpha$$

y

$$\left\| \sum_\alpha a_\alpha e_\alpha \right\| = \left(\sum_\alpha |a_\alpha|^2 \right)^{1/2}$$

Tal sistema ortonormal se llama **completo** si el subespacio generado por los $e_\alpha \, , \alpha \in I$, es denso en H. Como notamos arriba, los **vectores unitarios** en ℓ^2 forman un sistema ortonormal completo.

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L^2(T)$, y particularmente los elementos e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$, en $L^2(T)$. La ortonormalidad del sistema $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ es consecuencia inmediata de (1.1), y en el Teor 3.10 ya establecimos que este sistema es completo.

A continuación comparemos ℓ^2 y $L^2(T)$. Existe una aplicación muy natural S:

$$\ell^2 \ni \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \xrightarrow{\text{S}} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \in L^2(T)$$

del subespacio de ℓ^2 generado por $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, a $L^2(T)$.

Evidentemente esta aplicación es lineal, uno a uno, y más aún: una isometría. Por eso se le puede extender a una isometría $S : \ell^2 \longrightarrow L^2(T)$. Puesto que ℓ^2 es completo, $S(\ell^2)$ es un subespacio completo de $L^2(T)$, y claramente contiene el subespacio cerrado de $L^2(T)$ generado por los e^{int} , $n \in \mathbb{Z}$. Pero este último subespacio coincide con $L^2(T)$, debido al hecho de que el sistema $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ es completo. Luego, $S(\ell^2) = L^2(T)$ y evidentemente la isometría S extendida tiene la forma

$$S\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

Los hechos dados arriba de ℓ^2 ahora se traducen, por vía de S, en la siguiente descripción de $L^2(T)$: cada $f \in L^2(T)$ se puede representar únicamente como una serie (¡convergente en el sentido de la norma de $L^2(T)$!)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} ,$$

donde los a_n son números complejos tales que $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Además, $\|f\| = \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right)^{1/2}$.

Dados dos elementos $f = \sum a_n e^{int}$ y $g = \sum b_n e^{int}$ en $L^2(T)$, tenemos

$$< f, g > \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} \tag{6.1}$$

(porque S preserva el producto interno).

Por último, notemos que los únicos coeficientes a_n en la expansión $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ son exáctamente los coeficientes de Fourier de f.

Esto se deduce directamente de (6.1), a saber:

Si $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= < f, e^{ikt} > \\
&= \langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, e^{ikt} \rangle \\
&= a_k .
\end{aligned}$$

Resumamos nuestras conclusiones en el siguiente enunciado.

Teorema 6.1 *Sean $f, g \in L^2(T)$. Entonces*

(a) $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int}$, *en la norma de $L^2(T)$.*

(b) $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$

(c) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$

(d) *Para cada sucesión $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complejos tales que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, existe una única $f \in L^2(T)$ tal que $\hat{f}(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Observación 6.2 La transformación de Fourier

$$L^2(T) \ni f \longrightarrow (\hat{f}(n))_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2$$

es una isometría de $L^2(T)$ sobre ℓ^2 (esta aplicación no es más que la inversa de S^{-1} de S)

7 Series de Fourier de medidas

Hay dos espacios fuera de la familia de los espacios de Banach homogéneos que todavía no hemos considerado. El primero es $L^\infty(T)$, el espacio de las funciones f esencialmente acotadas, con la norma $\|f\|_\infty := \sup\limits_{0\le t<2\pi} \text{es}\, |f(t)|$. Recordemos que $L^\infty(T) \cong L^1(T)^*$; por esta razon podemos dotar a este espacio con la topología W^*, con respecto a $L^1(T)$. Aunque no es verdad que $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ en la topología de la norma, para cada $f \in L^\infty(T)$, sí lo es con respecto a la topología $W^* : \sigma_n(f) \xrightarrow{W^*} f$ (que veremos en esta sección).

La situacion es análoga en el caso de $M(T)$, el espacio de las medidas de Borel, complejas, de variación acotada sobre T, con la norma $\|\mu\| := \mathrm{Var}\,(\mu)$. Hay dos hechos importantes concernientes a $M(T)$ que necesitamos resaltar. El primero es que $L^1(T) \subset M(T)$: cada $f \in L^1(T)$ puede identificarse con la medida μ sobre T definida por

$$\mu(E) := \frac{1}{2\pi}\int_E f\,dt\,, \quad \text{o concisamente,} \quad d\mu = \frac{1}{2\pi} f\,dt.$$

Nótese que $\|\mu\| := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|dt = \|f\|_1$, de modo que la inclusión $L^1(T) \subset M(T)$ es una isometría. El rango de esta inclusión consiste exáctamente de las medidas absolutamente continuas. Esto es lo que dice el famoso teorema de Radon - Nikodym. Las medidas singulares están en $M(T)\backslash L^1(T)$.

El segundo hecho importante es que $M(T)$ es isomorfo isométricamente con el espacio dual de $C(T)$, según el teorema de representación de Riesz (la "acción" de $\mu \in M(T)$ sobre $f \in C(T)$ es $\displaystyle\int_0^{2\pi} f d\mu$). Este hecho nos permite definir sobre $M(T)$ la topología W^* con respecto a $C(T)$. Vamos a demostrar que, igual que en el caso de $L^\infty(T)$, la serie de Fourier de cada $\mu \in M(T)$ es Cesaro - convergente a μ, en el sentido de la topología W^*. Pero antes tenemos que definir los coeficientes de Fourier de una medida.

Definición 7.1 *Sea $\mu \in M(T)$. Entonces los números*

$$\hat{\mu}(n) := \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

se llaman los **coeficientes de Fourier** *de* μ *y* $S[\mu] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n)e^{int}$ *es la* **Serie de Fourier** *de* μ.

Es importante notar que cuando $d\mu = \frac{1}{2\pi} f dt$, $f \in L^1(T)$, entonces $\hat{\mu}(n) = \hat{f}(n)$, de modo que esta definición es consistente.

Ejemplo 7.2 Sea δ_o la medida de Dirac en $t = 0$. Equivalentemente, visto como elemento de $C(T)^*$, δ_o se define por

$$\int_0^{2\pi} f d\delta_o = f(0), \quad \text{para cada} \quad f \in C(T).$$

Entonces $\hat{\delta}_o(n) = 1$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, y esto muestra que los coeficientes de Fourier de una medida, no necesariamente tienden a cero -Ver el lema de Riemann- Lebesgue.

Como en el caso de funciones, hacemos, para cada $\mu \in M(T)$, $S_n(\mu) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{\mu}(k)e^{ikt}$ y $\sigma_n(\mu) := \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{\mu}(k)e^{ikt}$.

Para poder escribir estas sumas como $D_n * \mu$ y $K_n * \mu$, respectivamente, tenemos que extender la definición de convolución.

Aunque es perfectamente posible definir $\mu * \nu$ para dos medidas, nos basta el caso en que una de las medidas sea absolutamente continua. Esto es, definimos $f * \mu$, para $f \in L^1(T)$, $\mu \in M(T)$, por

$$(f * \mu)(t) := \int_0^{2\pi} f(t - \tau) d\mu(\tau).$$

Nótese que $f * \mu \in L^1(T)$, y que $\|f * \mu\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|\mu\|$, puesto que, según el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} \|f * \mu\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t - \tau) d\mu(\tau) \right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(t - \tau)| d|\mu|(\tau) \right] dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t-\tau)| dt \right] d|\mu|(\tau) \\
&= \|f\|_1 \cdot \|\mu\|.
\end{aligned}
$$

Comprobemos a continuación que

$$
(\widehat{f * \mu})(n) = \widehat{f}(n)\widehat{\mu}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}
$$

(ver (2.5)). La prueba se basa una vez más en el teorema de Fubini:

$$
\begin{aligned}
(\widehat{f * \mu})(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(t-\tau) d\mu(\tau) \right] e^{-int} dt \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-in\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)} dt \right] d\mu(\tau) \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{\mu}(n).
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que

$$
S_n(\mu) = D_n * \mu \quad \text{ y } \quad \sigma_n(\mu) = K_n * \mu :
$$

puesto que $S_n(\mu)$ y $D_n * \mu$ tienen los mismos coeficientes de Fourier estas funciones coinciden. El caso $\sigma_n(\mu) = K_n * \mu$ es análogo.

Ahora vamos a demostrar, como ya anunciamos, que $\sigma_n(f) \xrightarrow{W^*} f$, para cada $f \in L^\infty(T) = L^1(T)^*$, y $\sigma_n(f) \xrightarrow{W^*} f$ para cada $\mu \in M(T) = C(T)^*$. Nos conviene utilizar aquí la notación usual del análisis funcional: cuando X es un espacio de Banach y X^* su dual, entonces $< x, x^* >$ denota el valor de $x^* \in X^*$ en $x \in X$. [La simetría de esta notación sugiere que, en cambio, x pueda ser visto como funcional sobre X^*; esto se corresponde con la inclusión canónica π de X en X^{**}. Más formalmente: $< x, x^* > = < x^*, \pi(x) >$.]

Verifiquemos a continuación las fórmulas

$$
\begin{aligned}
&< f, \sigma_n(g) > = < \sigma_n(f), g >, \qquad &&\text{para } f \in L^1(T),\ g \in L^\infty(T) = L^1(T)^* \\
&< f, \sigma_n(\mu) > = < \sigma_n(f), \mu >, \qquad &&\text{para } f \in C(T),\ \mu \in M(T) = C(T)^*.
\end{aligned}
$$

Chequearemos solamente la segunda fórmula. La prueba de la primera casi es caso especial, cuando se identifica $g \in L^\infty(T)$ con la medida $d\mu = gdt$. Usando Fubini y la paridad K_n tenemos

$$\begin{aligned}
< f, \sigma_n(\mu) > &= < f, K_n * \mu > \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\int_0^{2\pi} K_n(t-\tau)d\mu(\tau)\right] dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t-\tau)f(t)dt\right] d\mu(\tau) \\
&= < K_n * f, \mu > \\
&= < \sigma_n(f), \mu > .
\end{aligned}$$

El significado de estas fórmulas es que en $L^\infty(T)$ [resp. en $M(T)$] el operador lineal $f \to \sigma_n(f)$ [resp. $\mu \to \sigma_n(\mu)$] es el operador **adjunto** del operador $f \to \sigma_n(f)$ en $L^1(T)$ [resp. en C(T)]. En particular, puesto que los operadores $f \to \sigma_n(f)$ en $L^1(T)$ y $C(T)$ tienen norma igual a 1, lo mismo vale para los adjuntos $f \to \sigma_n(f)$, $\mu \to \sigma_n(\mu)$ en $L^\infty(T)$ y $M(T)$, respectivamente. Por supuesto, esto también puede verificarse directamente.

Una consecuencia más importante es que

$$\sigma_n(f) \overset{W^*}{\to} f \quad \text{en} \quad L^\infty \quad , \quad \sigma_n(\mu) \overset{W^*}{\to} \mu \quad \text{en} \quad M(T).$$

Por definición, $\sigma_n(\mu) \overset{W^*}{\to} \mu$ quiere decir que $< f, \sigma_n(\mu) > \to < f, \mu >$ para cada $f \in C(T)$. Acabamos de mostrar que $< f, \sigma_n(\mu) > = < \sigma_n(f), \mu >$. Puesto que ya sabemos que $\sigma_n(f) \to f$ en la norma de $C(T)$, se deduce inmediatamente que $< \sigma_n(f), \mu > \to < f, \mu >$. La segunda fórmula queda establecida, y la prueba de la primera es análoga.

Hagamos notar además el hecho siguiente:

Teorema 7.3 *Sea X cualquiera de los espacios $C(T)$, $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, y sea X^* su dual [con lo cual X^* incluye $L^\infty(T)$ y $M(T)$]. Entonces, si $f \in X$ y $\mu \in X^*$ [Nótese que μ es una función $g \in L^1(T)$ a menos que $X = C(T)$], tenemos*

$$< f,\mu >= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\hat{\mu}(-n)$$

En particular, la serie $\sum_{n=-\infty}^{N} \hat{f}(n)\hat{\mu}(-n)$ *es Cesaro-sumable.*

Demostración: Es claro que para un polinomio trigonométrico

$$P = \sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)e^{int}$$

tenemos

$$\begin{aligned} < P,\mu > &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)e^{int}\right) d\mu(t) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)\hat{\mu}(-n) \end{aligned}$$

Para $f \in X$ arbitraria, $\sigma_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)e^{int}$ es un polinomio trigonométrico, y $\sigma_N(f) \to f$ en norma cuando $N \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} < f,\mu > &= \lim_{N\to\infty} < \sigma_N(f),\mu > \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\hat{\mu}(-n) \end{aligned}$$

Corolario 7.4 (Teorema de unicidad) *Cuando* $\mu \in M(T)$ *y* $\hat{\mu}(n) = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\mu = 0$.

Demostración: La fórmula anterior implica que $< f,\mu >= 0$ para cada $f \in C(T)$, es decir, $\mu = 0$.

Observación 7.5 El hecho de que

$$f * K_n \to f \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \quad \text{para cada} \quad f \in L^1(T),$$

significa que los operadores

$$L^1(T) \ni f \longrightarrow f * K_n \in L^1(T)$$

se aproximan al operador identidad con respecto a la topología de la convergencia puntual. En particular, tomando $f = e^{ikt}$ (k fijo), tenemos que

$$\widehat{K}_n(k) = \widehat{(e^{ikt} * K_n)}(k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{e^{ikt}}(k) = 1 = \widehat{\delta}_o(k).$$

Luego los coeficientes de Fourier de K_n tienden a los de δ_o cuando $n \to \infty$. Naturalmente esto también puede verificarse directamente, y corresponde al hecho de que $f = f * \delta_o$ para cada $f \in L^1(T)$.

Esta última fórmula nos dice que δ_o actua como elemento unidad sobre $L^1(T)$, con respecto a la convolución. Pero $\delta_o \notin L^1(T)$, y en realidad el álgebra de Banach $L^1(T)$ no tiene elemento unidad (¿por qué no ?). Por otra parte los K_n si pertenecen a $L^1(T)$ y se aproximan a δ_o de cierto modo. Por eso a veces (K_n) se llama una **unidad aproximada** en $L^1(T)$.

Para comodidad del lector resumimos lo que hasta ahora hemos probado sobre sumabilidad en el sentido de Cesaro:

Teorema 7.6

(a) Si $f \in C(T)$ o $L^p(T)$, $1 \le p < \infty$, entonces $\sigma_n(f) \to f$ en norma.

(b) Si $f \in L^\infty(T)$ o $\mu \in M(T)$, entonces $\sigma_n(f) \overset{W^*}{\to} f$, $\sigma_n(\mu) \overset{W^*}{\to} \mu$.

El último lema que vamos a discutir en esta sección es el siguiente: Dada una serie trigonométrica formal $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, ¿cómo saber si es una serie de Fourier?, y si lo es, ¿representa a una función de $L^1(T)$, de $L^p(T)$, de $C(T)$, o a una medida?. Ya hemos establecido unas condiciones necesarias. Por ejemplo, para ser serie de Fourier de una $f \in L^1(T)$, debe satisfacerse $\lim\limits_{|n|\to\infty} a_n = 0$ (lema de Riemann-Lebesgue). En el caso de

$L^2(T)$ la condición $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ es necesaria y suficiente (T.6.1). En general este problema no es tan fácil, y en realidad no existen condiciones numéricas satisfactorias sobre los a_n. Pero si formamos los promedios de Cesaro

$$\sigma_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}$$

y estudiamos su comportamiento, entonces llegamos a las siguientes condiciones.

Teorema 7.7 *Sea* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ *una serie trigonométrica formal y formemos las sumas parciales Cesaro* $\sigma_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}$. *Entonces* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ *es la serie de Fourier de*

(*i*) *Una* $f \in L^p(T)$, $1 < p \leq \infty \Leftrightarrow (\sigma_N)_{N=1}^{\infty}$ *es acotada en la norma* $\|\cdot\|_p$.

(*ii*) *Una* $f \in L^1(T) \Leftrightarrow (\sigma_N)$ *converge en la norma* $\|\cdot\|_1$.

(*iii*) *Una* $f \in C(T) \Leftrightarrow (\sigma_N)$ *converge uniformemente.*

(*iv*) *Una medida* $\mu \in M(T) \Leftrightarrow (\sigma_N)$ *es acotada en la norma* $\|\cdot\|_1$.

(*v*) *Una medida positiva* $\mu \in M(T) \Leftrightarrow \sigma_N \geq 0$ *para cada* $N \in \mathbb{N}$.

Demostración: La necesidad de estas condiciones ya fue comprobada en su mayor parte para los casos $(i) - (iv)$: sólo se necesita notar que tanto la convergencia en norma como la convergencia W^* de (σ_N) implican que (σ_N) es acotada en la norma. La necesidad en (v) también resulta clara, puesto que $\sigma_N = K_N * \mu$ y $K_n \geq 0$.

Antes de comprobar la suficiencia de las condiciones, notemos un hecho general, a saber que

$$\widehat{\sigma_N}(n) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} a_n \quad , \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7.1}$$

Esta observación establece inmediatamente la prueba de la suficiencia en los casos (ii) y (iii). De hecho, si f es el límite en norma de (σ_N), entonces $\hat{f}(n) = \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{\sigma_N}(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Luego $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} = S[f]$. En el caso (i) la demostración es un poco más delicada. Pero debido a que $L^p(T)$, $1 < p \leq \infty$ es un espacio dual [de $L^q(T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$], la sucesión acotada (σ_N) tiene un punto límite W^*, digamos f. Entonces $\hat{f}(n)$ es punto límite de $(\widehat{\sigma_N(n)})_{N=1}^{\infty}$. Pero acabamos de observar que esta última sucesión tiende a a_n. Por tanto $\hat{f}(n) = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ [Nótese que acabamos de utilizar el hecho de que todas las funciones e^{int} pertenezcan a $L^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$].

El razonamiento en el caso (iv) es análogo: consideramos la sucesión L^1−acotada (σ_N) como una sucesión de medidas [$L^1(T) \subset M(T)$ isométricamente]. Siendo $M(T) = C(T)^*$ un espacio dual, y estando $e^{int} \in C(T)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, el argumento previo puede repetirse y produce una $\mu \in M(T)$ tal que $S[\mu] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$.

Por último, para la suficiencia en el caso (v), nótese que las σ_N son L^1−acotadas, puesto que $\|\sigma_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_N(t)dt = a_0$, para cada $N \in \mathbb{N}$. Por tanto, según (iv), $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ es la serie de Fourier de una $\mu \in M(T)$, y queda por comprobar que $\mu \geq 0$. Pero si $f \in C(T)$ es no negativa, tenemos $\langle f, \sigma_N(\mu)\rangle \geq 0$ para cada N, ya que $\sigma_N(\mu) = \sigma_N \geq 0$. Con lo cual $\langle f, \mu\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle f, \sigma_N(\mu)\rangle \geq 0$, lo que implica $\mu \geq 0$, puesto que la $f \in C(T)$ no negativa es arbitraria.

8 Convergencia en norma de series de Fourier. Los operadores de conjugación y proyección.

Para el estudio de convergencia en norma nos basta considerar los espacios homogéneos $C(T)$, $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, puesto que en $L^\infty(T)$ y $M(T)$ ciertamente no tenemos convergencia en norma (por falta de separabilidad, por ejemplo). Resultará que en los espacios $C(T)$, $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$ la cuestión de si cada serie de Fourier converge en norma, está íntimamente relacionada con la existencia de los llamados operadores de conjugación y de proyección. Nuestro propósito en esta sección es aclarar esas relaciones y establecer unas equivalencias. Del teorema principal, que dice que tenemos convergencia en norma en los espacios $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, mientras no lo tenemos en $C(T)$ y $L^1(T)$, vamos a comprobar aquí sólo el caso negativo.

El caso afirmativo depende de un estudio más profundo del operador de conjugación y volveremos a este más adelante.

Primero vamos a introducir algo de terminología. Sea B un espacio de Banach homogéneo. Entonces decimos que

(A) B **admite convergencia en norma** si

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0 \quad , \text{ para cada } \quad f \in B.$$

Para cada serie trigonométrica formal $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ definimos la **serie conjugada** como $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sgn}(n) a_n e^{int}$, donde

$$\operatorname{Sgn}(n) := \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad n > 0 \\ 0 & \text{cuando} \quad n = 0 \\ -1 & \text{cuando} \quad n < 0 \end{cases}$$

Si $f \in L^1(T)$, entonces la serie conjugada de su serie de Fourier no necesariamente es una serie de Fourier. Pero si lo es, y si representa a una $g \in L^1(T)$, entonces g se llama la **función conjugada** de f, y denotamos a g por $\tilde{f}$. De este modo tenemos definido el **operador de conjugación** $f \to \tilde{f}$, pero sólo sobre un subespacio de $L^1(T)$. Esta definición provisional es adecuada por el momento. Más adelante veremos como se puede extender el operador de conjugación sobre todo $L^1(T)$ [sin embargo, el rango del operador extendido no estará contenido en $L^1(T)$]. A continuación introducimos, para cada espacio de Banach homogéneo B, las siguientes nociones:

(B) B **admite conjugación** si para cada $f \in B$, $\tilde{f}$ está definida y pertenece a B.

Nuestra tercera definición va a imitar estrechamente a la del operador de conjugación. Para cada $f \in L^1(T)$ consideremos la serie trigonométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$. Esta puede ser o no una serie de Fourier. Si lo es, y si representa a una $g \in L^1(T)$, entonces

g se llama la **función proyectada** de f y se denota por $\tilde{\tilde{f}}$. Esta define el **operador de proyección** $f \to \tilde{\tilde{f}}$, pero una vez más, sólo sobre un subespacio de $L^1(T)$.

A continuación decimos, para cada espacio homogéneo B, que

(C) B **admite proyección** si para cada $f \in B$, $\tilde{\tilde{f}}$ está definida y pertenece a B.

Ahora vamos a demostrar la equivalencia de (A), (B) y (C) para cada $B = C(T)$ o $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, y a continuación que para $B = L^1(T)$ y $B = C(T)$ cada una de (A), (B) y (C) deja de ser satisfecha. El hecho de la validez de (A), (B) y (C) para cada $B = L^p(T)$, $1 < p < \infty$ debe ser postergado al capítulo IV.

En lo que queda de esta sección, B va a denotar cualquiera de los espacios $C(T)$, $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, mientras que B_o denota $\mathrm{Sp}\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$, es decir, el subespacio (no cerrado) generado por las funciones e^{int} (todas pertenecen a B). Recordemos que B_o es denso en B (por el Teor 3.10).

Sobre B introducimos los siguientes operadores lineales:

$$\begin{aligned} S_n(f) &:= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \\ P_n(f) &:= \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \qquad\qquad (n = 0, 1, \ldots) \\ C_n(f) &:= -i \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{Sgn}\,(k)\hat{f}(k)e^{ikt} \end{aligned}$$

y sobre B_o También definimos:

$$\begin{aligned} P(f) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt} \\ C(f) &:= -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}\,(k)\hat{f}(k)e^{ikt} \end{aligned}$$

Notemos que en los últimos dos casos no hay problema de convergencia, porque restringimos el dominio a B_o. También se debe observar que para cada polinomio trigonométrico f de grado N tenemos $P(f) = P_n(f)$ y $C(f) = C_n(f)$, para cada $n \geq N$.

Las relaciones siguientes entre las operaciones arriba definidas se verifican fácilmente. Como de costumbre I es la identidad.

$$\left.\begin{aligned} P_{2n}(f) &= e^{int} S_n(f \cdot e^{-int}) && (8.1)\\ P_{2n-1}(f) &= P_{2n}(f) - \hat{f}(2n)e^{2int} && (8.2)\\ \frac{1}{2}(S_n + iC_n)f + \frac{1}{2}\hat{f}(0) &= P_n(f) && (8.3) \end{aligned}\right\} \quad (f \in B)$$

$$\left.\begin{aligned} &S_n(f) = e^{-int}P(e^{int}f) - e^{i(n+1)t}P(e^{-i(n+1)t}f) && (8.4)\\ &\frac{1}{2}(I + iC)f + \frac{1}{2}\hat{f}(0) = P(f) && (8.5) \end{aligned}\right\} \quad (f \in B_o)$$

Nótese además que para cada $n \in \mathbb{Z}$ los operadores $f \longrightarrow e^{int} \cdot f$ y $f \longrightarrow \hat{f}(n)$ son acotados con norma 1, y también que $\|e^{int}\| = 1$.

El resultado principal de esta sección se basa en el siguiente lema elemental que es bien conocido.

Lema 8.1 *Sea X un espacio de Banach arbitrario y X_o un subespacio denso. Además sea (T_n) una sucesión de operadores lineales acotados de X a X cuyas normas están uniformemente acotadas. Supóngamos también que $(T_n x)$ converge para cada $x \in X_o$. Entonces $(T_n x)$ converge para cada $x \in X$, y la fórmula*

$$Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x, \qquad x \in X$$

define un operador lineal acotado sobre X tal que $\|T\| \leq \sup \|T_n\|$

Demostración: Hagamos $M := \sup \|T_n\|$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Fijemos $x \in X$ de modo arbitrario. Entonces podemos seleccionar $x_o \in X_o$ tal que $\|x - x_o\| < \varepsilon$, y tenemos, para cada $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x_o - T_m x_o\| + \|T_n(x - x_o)\| + \|T_m(x - x_o)\| \\ &\leq \|T_n x_o - T_m x_o\| + 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\lim_{n,m\to\infty} \|T_n x_o - T_m x_o\| = 0$ y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que $\lim_{n,m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| = 0$. Por consiguiente, $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ existe. Además $\|Tx\| := \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$, de manera que $\|T\| \leq M$.

Aplicando este lema repetidamente con $X = B$ y $X_o = B_o = sp\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ se deduce el siguiente resultado.

Teorema 8.2 *Los siguientes cuatro enunciados son equivalentes (Recuerde que B es cualquiera de los espacios $C(T)$, $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$):*

(a) $(\|S_n\|)_{n=0}^{\infty}$ *es acotada,*

(b) $\|f - S_n f\| \to 0$, *para cada* $f \in B$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ *es la serie de Fourier de una función* $\tilde{\tilde{f}} \in B$, *para cada* $f \in B$ *[y si definimos* $Pf := \tilde{\tilde{f}}$, *entonces* P *es un operador acotado sobre* B. *Nótese que* P *extiende al operador* P *que definimos arriba solamente sobre* B_o.*]*

(d) $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sgn(n)\hat{f}(n)e^{int}$ *es la serie de Fourier de una función* $\tilde{f} \in B$, *para cada* $f \in B$ *[y si definimos* $Cf := \tilde{f}$, *entonces* C *es un operador acotado sobre* B. *Nótese que* C *extiende al operador* C *que definimos arriba solamente sobre* B_o.*]*

Nota. En cada una de las condiciones (c) y (d) la parte entre paréntesis se sigue del enunciado principal y la incluiremos en la demostración.

Demostración:
$(a) \Rightarrow (b)$: Está claro que $\lim S_n f = f$ para cada $f \in B_o$. Luego la suposición de que las normas $\|S_n\|$ son uniformemente acotadas, implica, según el lema, que

$$Sf := \lim S_n(f) \quad \text{existe para cada} \quad f \in B,$$

y define un operador acotado S sobre B. Puesto que S evidentemente coincide con I sobre el subesapcio denso B_o, debe tenerse $S = I$ sobre B. Por lo tanto (b) queda establecido.

$(b) \Rightarrow (a)$: Para cada $f \in B$, $(S_n f)$ converge (a f), y por tanto $(S_n f)$ es acotada. Entonces $(\|S_n\|)$ es acotada según el teorema de Banach-Steinhaus.

$(a) \Rightarrow (c)$: (a) y las fórmulas (8.1) y (8.2) implican que $(\|P_n\|)$ es acotada. Tambien es claro que $(P_n f)$ converge para cada $f \in B_o$ (a saber a Pf). Entonces, según el lema, $(P_n f)$ converge para cada $f \in B$, y eso significa que $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ converge en B para cada $f \in B$. Denotaremos el límite por $\tilde{\tilde{f}}$. Así tenemos, por la continuidad de $f \to \hat{f}(n)$ sobre B, que

$$\hat{\tilde{\tilde{f}}}(n) = \begin{cases} \hat{f}(n) & \text{cuando} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{cuando} \quad n < 0 \end{cases},$$

de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ es la serie de Fourier de $\tilde{\tilde{f}}$.

Por último definamos $Pf := \tilde{\tilde{f}}$. Entonces $Pf = \lim_{n\to\infty} P_n f$ y el hecho de que P es acotado, resulta del lema.

$(c) \Rightarrow (a)$: El operador $f \to Pf := \tilde{\tilde{f}}$ es cerrado: si $f_k \to f$ y $Pf_k \to g$, entonces, en virtud de la continuidad de los coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) = \lim_{k\to\infty} \widehat{Pf_k}(n) &= \left\{ \begin{matrix} \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(n) & \text{cuando} & n \geq 0 \\ 0 & \text{cuando} & n < 0 \end{matrix} \right\} \\ &= \begin{cases} \hat{f}(n) & \text{cuando} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{cuando} \quad n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Así, g y Pf tienen los mismos coeficientes de Fourier, lo que implica que $g = Pf$. Del teorema del gráfico cerrado resulta entonces que P es acotado. Finalmente, la fórmula (8.4) nos permite concluir que $(\|S_n\|)$ es acotada.

$(a) \Rightarrow (d)$: de (a) y de las fórmulas (8.1), (8.2) y (8.3) concluimos que $(\|C_n\|)$ es acotada. Está claro también que $(C_n f)$ converge para cada $f \in B_o$ (a saber, a Cf). Luego el lema implica que $(C_n f)$ converge para cada $f \in B$, lo que significa que $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}$ converge en B, para cada $f \in B$. Sea $\tilde{f}$ el límite. Luego, usando una vez más la continuidad de los coeficientes de Fourier, tenemos, como en la demostración de $(a) \Rightarrow (c)$, que $\hat{\tilde{f}}(n) = -i\mathrm{Sgn}(n)\hat{f}(n)$. Esto dice que $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}$ es la serie de Fourier de $\tilde{f}$. Por último, definamos $Cf := \tilde{f}$. Entonces $Cf = \lim C_n f$. El hecho de que C es acotado es consecuencia del lema.

$(d) \Rightarrow (a)$: El operador $f \to Cf := \tilde{f}$ es cerrado, por el mismo razonamiento que usamos en la prueba de $(c) \Rightarrow (a)$, y por tanto acotado. Luego $(\|S_n\|)$ resulta acotado, en virtud de las fórmulas (8.4) y (8.5).

Resulta por último que (A) , (B), y (C) son equivalentes mutuamente (el Teor 8.2 comprueba que cada uno de estos enunciados equivale al hecho de que $(\|S_n\|)$ está acotada). Sin embargo, todavia no sabemos nada sobre la validez o no de (A) , (B), y (C) en los espacios $C(T)$, $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$. Vamos a establecer a continuación que los tres son falsos en los casos de $C(T)$ y $L^1(T)$, mostrando que en estos casos $\|S_n\| \to \infty$.

Recordemos que $S_n(f) = D_n * f \quad (n = 0, 1, \ldots)$, y que

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

De esto se deduce inmediatamente la estimación siguiente de $\|S_n\| = \|S_n\|_B$ para $B = C(T)$ *o* $L^p(T)$, ,$1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|S_n f\| &= \|D_n * f\| \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(\tau) f_\tau d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(\tau)| \|f_\tau\| d\tau \\ &= \|D_n\|_1 \cdot \|f\|, \end{aligned}$$

[utilizamos aquí el hecho de que $D_n * f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(\tau) f_\tau d\tau$; esto se comprueba como (3.16)], de modo que

$$\|S_n\| \leq \|D_n\|_1 \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{8.6}$$

Mostramos en lo que sigue que esta estimación es la mejor en los casos especiales $B = L^1(T)$ y $B = C(T)$.

Lema 8.3 $\|S_n\| = \|D_n\|_1$, *si* $B = L^1(T)$ *o* $B = C(T)$.

Demostración:
(a) En el caso $B = L^1(T)$ vamos a aplicar S_n al núcleo de Fejer K_m (recuerde: $K_m \geq 0$, $\|K_m\|_1 = 1$, $\sigma_m(f) = K_m * f$). Tenemos

$$\begin{aligned}
\|S_n\|_1 &\geq \|S_n(K_m)\|_1 \\
&= \|D_n * K_m\|_1 \\
&= \|K_m * D_n\|_1 \\
&= \|\sigma_m(D_n)\|_1 .
\end{aligned}$$

Puesto que $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m(D_n) = D_n$ en $L^1(T)$ (n fijo), concluimos que $\|S_n\|_1 \geq \|D_n\|_1$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Sólo nos queda combinar esta desigualdad con (8.6).

(b) En el caso $B = C(T)$ seleccionemos, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, una $\psi_n \in C(T)$ tal que $|\psi_n| \leq 1$ y $\psi_n(-t) \equiv \operatorname{Sgn} D_n(t)$, salvo en pequeños intervalos centrados en los puntos de discontinuidad de Sgn D_n. Denotando por $\mathcal{Y}$ la unión de este número finito de intervalos, tenemos

$$\begin{aligned}
\|S_n\|_\infty &\geq \|S_n(\psi_n)\|_\infty \\
&\geq |(S_n\psi_n)(0)| \\
&= |(D_n * \psi_n)(0)| \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]\setminus\mathcal{Y}} |D_n(t)|dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{Y}} |D_n(t)|dt
\end{aligned}$$

Puesto que la medida de $\mathcal{Y}$ puede hacerse arbitrariamente pequeña, podemos concluir que

$$\|S_n\|_\infty \geq \|D_n\|_1 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Esta última desigualdad nos basta, porque también tenemos (8.6).

Ahora estamos preparados para mostrar que ni $C(T)$, ni $L^1(T)$ admiten convergencia en norma, conjugación o proyección. En vista de Teor 8.2 y Lema 8.3 basta comprobar.

Lema 8.4 $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty$

Demostración: Puesto que $|\operatorname{sen} t| \le t$ cuando $t \ge 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right| dt \\
&\ge \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt \\
&\ge \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} \frac{|\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt \\
&\ge \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+\frac{1}{2}}{(j+1)\pi} \int_{\frac{j\pi}{n+1/2}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1/2}} \left|\operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})t\right| dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+\frac{1}{2}}{(j+1)\pi}\frac{2}{n+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \to \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Observación 8.5 Con un poco más de cuidado, se puede demostrar que en realidad

$$\|D_n\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\log n + \mathcal{O}(1)\ , \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Observación 8.6 En este momento sabemos que existen funciones f en $L^1(T)$ y en $C(T)$ cuyas series de Fourier divergen en el sentido de la norma. A continuación vamos a esbozar un método general para la construcción de tales funciones. B denota cualquiera de los espacios $L^1(T)$ o $C(T)$.

Notemos para empezar que

$$S_m S_n = S_n, \quad \text{y así} \quad S_m = (S_m - S_n)(I - S_n) + S_n, \quad \text{cuando} \quad m \ge n.$$

Eso implica que

$$\begin{aligned}\|S_m\| &\leq \|(S_m - S_n)\Big|_{(I-S_n)B}\| \cdot \|I - S_n\| + \|S_n\| \\ &= \|S_m\Big|_{(I-S_n)B}\| \cdot \|I - S_n\| + \|S_n\| \qquad (m \geq n)\end{aligned}$$

Puesto que $(\|S_m\|)$ no es acotada, se deduce de la última desigualdad que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, la sucesión

$$(\|S_m\Big|_{(I-S_n)B}\|)_{m=n} \quad \text{tampoco es acotada.}$$

Este hecho se puede combinar con el uso de inducción para construir sucesiones crecientes (n_k) y (m_k) en $\mathbb{N}$ tales que

$$n_k < m_k < n_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

y polinomios trigonométricos

$$P_k \in \text{ Sp}\{e^{int} : \ n_k < |n| < n_{k+1}\}$$

tales que

$$\|P_k\| \leq 2^{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{8.7}$$

y

$$\|S_{m_k} P_k\| > 1 \tag{8.8}$$

(dejamos los detalles como ejercicio).

Según (8.7) , $f = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$ converge, mientras que, por otra parte, según (8.8),

$$\|(S_{m_k} - S_{n_k})f\| = \|S_{m_k} P_k\| > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Entonces $(S_n f)_{n=0}^{\infty}$ diverge, es decir, la serie de Fourier de f diverge en la norma.

Observación 8.7 La misma técnica, aplicada a los operadores P_n y C_n, respectivamente, producirá $f \in L^1(T)$ ó $C(T)$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$, respectivamente $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}$ diverge.

Observación 8.8 Sabemos aún más de lo precedente, a saber, que existe f tales que $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$, respectivamente $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}(n)\hat{f}(n)e^{int}$ no son series de Fourier. Ya presentamos el ejemplo estándar en la sección 5:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} = \sum_{|n|\geq 2} \frac{1}{2\log|n|}e^{int}$$

es una serie de Fourier, pero la serie conjugada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{\log n} = -i \sum_{|n|\geq 2} \frac{\mathrm{Sgn}(n)}{2\log|n|}e^{int}$$

no es una serie de Fourier.

Podríamos añadir aquí que puesto que las series de Fourier evidentemente forman un espacio vectorial, tampoco

$$\sum_{|n|\geq 2} \frac{1}{2\log|n|}e^{int} + i\left[-i \sum_{|n|\geq 2} \frac{\mathrm{Sgn}(n)}{2\log|n|}e^{int}\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{int}}{2\log|n|}$$

es una serie de Fourier. Nótese que esta última serie es la proyección de la serie de Fourier $\sum_{|n|\geq 2}^{\infty} \frac{e^{int}}{2\log|n|}$.