NOTAS DE MATEMATICAS
Nº 105

SOBRE LOS ESPACIOS L-KR

POR

JOSE R. MORALES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1990

SOBRE LOS ESPACIOS L-KR

POR

JOSE R. MORALES

En estas notas se estudian los espacios de Banach que gozan de la propiedad L-KR y se demuestra que esta propiedad siempre implica la propiedad (G). También se introduce una propiedad más general que la propiedad (M) llamada la propiedad (K-M), probándose que en espacios de Banach estrictamente convexos, (R), la propiedad (K-M) implica L-KR.

INTRODUCCION.

En el año 1955, K-Fan y I. Glicksberg, [1], introdujeron los espacios KR como una generalización de la propiedad 2R anteriormente estudiada por Smulyan en el año 1939. En el año 1979, F. Sullivan, [5], introduce los espacios K-UR y LK-UR, y muy recientemente, en el año 1988, N. Chao-Xun y W. J. Hua, [G] definen los espacios L-KR demostrando que LK-UR + R implica L-KR.

A continuaciónes daremos las definiciones y notaciones que usaremos en el desarrollo de este trabajo.

Por $(E, \|\cdot\|)$ denotamos un espacio de Banach real. Por S_E y B_E denotamos la esfera unitaria y bola unitaria de E.

DEFINICION 1. [1]. Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio KR, $K \geq 1$, si para cada sucesión $(X_n)_1^\infty$ de E que satisface

$$\lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \frac{1}{K} \left\| \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1,$$

se cumple que $(x_n)_1^\infty$ es de Cauchy.

DEFINICION 2. [6]. Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio L-KR, $K \geq 1$, si para cada sucesión $(x_n)_1^\infty$ de E y cada $x \in E$ tales que:

(i) $\|x\| = 1;$

(ii) $\lim\limits_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1;$

(iii) $\|k_n\| \to 1.$

Se satisface que $x_n \to x$.

DEFINICION 3. [2]. Un espacio de Banach $(E_1 \|\cdot\|)$ tiene la propiedad $(\acute{G})$ si para cada $x \in S_E$ y cada $\varepsilon > 0$, $x \notin \overline{C}_o\, M(x,\varepsilon)$, donde

$$M(x,\varepsilon) = \{y \,/ y \in B_E,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\}\ .$$

La siguiente noción la propiedad (K-M) generaliza la propiedad (M), la cual fue introducida por L.P. Vlasov, [7].

DEFINICION 4. Un espacio de Banach $(E,\|\,.\,\|)$ posee la propiedad (K-M), $k \geq 1$, si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n)_1^\infty$ en B_E tales que,

$$\lim_{n_1,\ldots n_k \to\infty} \frac{1}{k+1} \left\|x + x_{n_1} + \ldots x_{n_k}\right\| = 1$$

entonces $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E.

Nótese que la propiedad (M) coincide con la propiedad (1-M).

LOS RESULTADOS

TEOREMA 1. Si $(E,\|\,.\,\|)$ es un espacio L-KR, entonces $(E,\|\,.\,\|)$ tiene la propiedad (G).

PRUEBA:

Supongamos que E es un espacio L-KR pero que no posee la propiedad (G). Entonces existen un $x \in S_E$ y un $\varepsilon > 0$ tal que $x \in \overline{C}_o\, M(X,\varepsilon)$. Seleccionemos ahora un $x^* \in E^*$, $\|x^*\| = 1$ tal que $x^*(x) = 1$. Puesto que,

$$\sup x^*(\overline{C}_o\, M(x,\varepsilon)) = \sup x^*(M(x,\varepsilon)) \leq 1$$

y $x^*(X) \leq \sup X^*(\overline{C}_o\, M(x,\varepsilon))$, se concluye que

$$\sup x^*(M(x,\varepsilon)) = 1.$$

Sea ahora $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en $M(x,\varepsilon)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n)=1.$

De esto se deduce que $\| x_n \| \to 1$. Más aún,

$$1 \geq \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \geq \frac{1}{k+1} x^*(x + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k})$$

$$= \frac{1}{k+1} \left[x^*(x) + x^*(n_1) + \ldots + x^*(n_k) \right] \to 1,$$

por lo que,

$$\lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1$$

ya que E es L-KR se concluye que $x_n \to x$, lo que es imposible, pues $(x_n) \subset M(x,\varepsilon)$. Esta contradicción establece el resultado. #

El teorema 1, generaliza el resultado logrado por K. Fan y I. Glicksberg, [1] quienes mostraron que (LUR) implica la propiedad (G), y así tenemos el siguiente.

COROLARIO 1. Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach localmente uniformemente convexo, (LUR) entonces E posee la propiedad (G).

PRUEBA:

Como LUR => L-KR, el resultado sigue inmediatamente del teorema 1. #

TEOREMA 2. Para cada espacio de Banach, $(E, \| \cdot \|)$ se cumple la propiedad (K-M) + R implica L-KR.

PRUEBA: Sean $x \in S_E$ y $(x_n)_1^\infty$ B_E tales que,

$$\lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1 \quad \text{y} \quad \| x_n \| \to 1.$$

Como E es un espacio que posee la propiedad (K-M), entonces $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E.

Argumentando enteramente similar como en la prueba del teorema 3 de [6], concluimos que $(x_n)_1^\infty$ tiene un único punto límite x, y en consecuencia, $x_n \to x$. Esto es, E es L-KR.#

El teorema 2 es una generalización del teorema 3 de [6].

Ahora dejaré planteados dos problemas, y considero que su respuesta es afirmativa.

PROBLEMA 1: Sea $(E, \| . \|)$ un espacio de Banach L-KR. ¿Posee el espacio ℓ_p(E_, $1 \leq p < \infty$ la propiedad L-KR?.

PROBLEMA 2: Sea $(E, \| . \|)$ un espacio de Banach que posee la propiedad (K-M). ¿Posee el espacio $\ell_p(E)$, $1 \leq p < \infty$ la propiedad (K-M)?.

AGRADECIMIENTO: Mis más sinceros agradecimientos al Profesor Wilman Brito por sus observaciones para la culminación de este trabajo. #

P.D. Después de haber finalizado la escritura de este artículo me enteré por comunicación personal enviada por el Prof. B. Lin que el teorema 1 fue probado por uno de sus estudiantes y que el problema Nº 1 ya fue resuelto por Nan Chaoxun en J. of Math. (PRC). Volúmen 8(1988) Nº 2.

R E F E R E N C I A S

[1] K. FAN AND I. GLICKSBERG, "Fully convex linear spaces" Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41. (1955), 947-953.

[2] "Some geometric properties of the sphere in a normed linear space", Duke Math. J. 25 (1958). 553-568.

[3] W.A. KIRK, "Non expansive Mappings in producto spaces, set-valued mappings an K-uniform rotundity", Proc. Simp. Proc. Math. Vol. 45, (1986) part 2 51-64.

[4] B.B. PANDA Y A.O. KAPPOR. "A generalization of local uniform convexity of the norm", Jour. Math. Anal and Appl. 52, (1975), 300-308.

[5] F. SULLIVAN."A Generalization of uniformly rotund Banach spaces". Canad. J. Math, 31, (1979), 628-646.

[6] N. CHAO-XUNG-W. HUA. "On the LK-UR and L-KR spaces" Math Proc. Camb. Phil. Soc. 104, (1988), 521-526.

[7] L.P. VLASOV. "Approximative properties of sets in normed linear spaces. Russian Math. Suive.