VARIEDADES SIMPLECTICAS HOMOGENEAS

JORGE SAENZ

1. INTRODUCCION

Las estructuras simplécticas constituyen un tema importante de la Geometría Diferencial, conocido con el nombre de Geometría Simpléctica. Estas estructuras cobraron especial relevancia en la Mecánica Clásica con la introducción, por parte de Poincaré, de métodos cualitativos en la Física. De hecho, los nuevos modelos de la mecánica consisten, fundamentalmente, de una variedad simpléctica y un campo vectorial hamiltoniano.[1], [2].

Una variedad homogénea es un espacio cociente $\frac{G}{K}$ de un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado K de G. El grupo G actúa sobre $\frac{G}{K}$ a la izquierda, de la manera obvia. En este tipo muy especial de variedades, el interés se concentra en los tensores que son invarientes por la acción del grupo; es decir en los tensores G-invariantes.

En el presente trabajo se prueba:

Si una variedad homogénea $\frac{G}{K}$, con G compacto, tiene una estructura simpléctica homogénea (G-invariante), entonces $\frac{G}{K}$ posee una estructura casi-hermitiana homogénea.

Este resultado es ya conocido para estructuras simplécticas generales (no necesariamente homogéneas) [7]. En nuestro caso, a la estructura se le exige la condición adicional, bastante fuerte, de ser G-invariante.

Todas las variedades y tensores que aparecen son diferenciables de clase C^∞, y este hecho se expresa diciendo simplemente que son diferenciables. En la notación seguiremos a [6], [10] y [11].

2. VARIEDADES HOMOGENEAS

A continuación presentamos algunos resultados conocidos sobre variedades homogéneas.

Sea G un grupo de Lie y $K \subset G$ un subgrupo cerrado. G actúa sobre el cociente $\frac{G}{K}$ a la izquierda y transitivamente del modo siguiente:

$$G \times \frac{G}{K} \longrightarrow \frac{G}{K}$$

$$(a, bK) \longrightarrow abK$$

$\frac{G}{K}$ tiene una única estructura diferenciable [11] tal que:

i) La proyección $\pi : G \to \frac{G}{K}$ es diferenciable.

ii) Cada punto de $\frac{G}{K}$ tiene una vecindad U y una sección diferenciable $s : U \longrightarrow G$.

LLamaremos *variedades homogéneas* a las variedades del tipo $\frac{G}{K}$, con la estructura antes mencionada.

Para cada $a \in G$ se tiene el difeomorfismo

$$\mathbb{L}_a : \frac{G}{K} \longrightarrow \frac{G}{K}$$

$$\mathbb{L}_a(bK) = abK$$

Si $L_a : G \longrightarrow G$ es la traslación a la izquierda $L_a(b) = ab$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \frac{G}{K} \\ {\scriptstyle L_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_a} \\ G & \xrightarrow[\pi]{} & \frac{G}{K} \end{array} \qquad \pi \circ L_a = \mathbb{L}_a \circ \pi$$

Cada elemento $a \in G$ determina el automorfismo interno de G,

$$A_a : G \longrightarrow G$$

$$A_a(g) = a g a^{-1} = (R_{a^{-1}} \circ L_a)(g) = (L_a \circ R_{a^{-1}})(g),$$

donde $R_{a^{-1}}$ es la traslación derecha $R_{a^{-1}}(g) = g a^{-1}$. La derivada de este automorfismo nos da otro automorfismo,

$$Ad(a) = (R_{a^{-1}} \circ L_a)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

del algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Además, la función $a \to Ad(a)$ nos proporciona una representación de G en $\mathfrak{g}$, llamada la *representación adjunta* de G.

DEFINICION 2.1 Una variedad homogénea $\frac{G}{K}$ es *reductiva* si el algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G puede descomponerse como una suma directa del algebra de Lie $\mathfrak{k}$ de K y un subespacio $\mathfrak{m}$ que es $Ad(K)$-invariante; esto es, si

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 2) $Ad(K)\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$

Se prueba fácilmente que $\frac{G}{K}$ es reductiva si K es compacta [6].

DEFINICION. Una métrica riemanniana g en un grupo de Lie G es biinvariante si g es invariante por traslaciones a la izquierda y a la derecha. Esto es, si $\forall\ a \in G$ y $\forall\ X, Y$, campos en G, se cumple:

1) $g((L_a)_* X, (L_a)_* Y) = g(X, Y)$ 2) $g((R_a)_* X, (R_a)_* Y) = g(X, Y)$

Observar que si g es biinvariante, entonces también se cumple que:

$$3) \quad g(Ad(a)X, Ad(a)Y) = g(X, Y), \ \forall\ a \in G$$

Esta última expresión nos dice que $Ad(a)$ es una transformación ortogonal.

Una métrica riemanniana g de $\frac{G}{K}$ es invariante por G o, simplemente, invariante, si $\forall\ a \in G$ y $\forall\ X, Y$ campos de $\frac{G}{K}$,

$$4) \quad g(\mathbb{L}_a)_* X), (\mathbb{L}_a)_* Y) = g(X, Y), \ \forall\ a \in G$$

Si G es compacto, entonces G tiene una métrica riemanniana biinvariante [11], y si K es compacto $\frac{G}{K}$ tiene una métrica invariante [6].

Ahora consideremos una variedad homogénea $\frac{G}{K}$ y la proyección natural $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{K}$. Para cada $a \in G$ y para cada $k \in K$, se tiene que

$$5) \quad \mathbb{L}_a \circ \pi = \pi \circ L_a \qquad 6) \quad \pi = \pi \circ R_k$$

Luego,

$$7) \quad \mathbb{L}_k \circ \pi = (\pi \circ R_{k^{-1}}) \circ L_k = \pi \circ A_k$$

De donde, derivando,

$$8) \quad (\mathbb{L}_k)_* \circ \pi_* = \pi_* \circ Ad(k)$$

Sea e el elemento neutro de G, o la clase K en $\frac{G}{K}$ y π_* es la derivada de π en e. Se tiene la función lineal

$$\pi_* : T_e(G) \longrightarrow T_0(\frac{G}{K})$$

cuyo núcleo es $\{ X_e \,/\, X \in \mathfrak{k} \}$

Ahora si $\frac{G}{K}$ es reductiva, con descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

y si identificamos $\mathfrak{g}$ con $T_G(G)$ mediante el isomorfismo $X \longrightarrow X_e$, entonces obtenemos el isomorfismo $\pi_* : \mathfrak{m} \longrightarrow T_0(\frac{G}{K})$. Además (8) nos proporciona el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m} \arrow[r, "Ad(k)"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \mathfrak{m} \arrow[d, "\pi_*"] \\ T_0(\frac{G}{K}) \arrow[r, "\mathbb{L}_k"] & T_0(\frac{G}{K}) \end{tikzcd}$$

LEMA 2.2 Si $\frac{G}{K}$ es reductiva con descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

entonces existe una correspondencia natural biunívoca entre las métricas riemannianas invariantes g en $\frac{G}{K}$ y los productos internos $Ad(K)$-invariantes $<\ >$ de $\mathfrak{m}$. La correspondencia es dada por

10) $$< X, Y > = g_0(\pi_* X, \pi_* Y), \quad X, Y \in \mathfrak{m}$$

Demostración.

Dado g definimos $< >$ como en (10). Como g_0 es un producto interno y π_* es un isomorfismo, $< , >$ también es un producto interno.

Para todo $k \in K$, usando (9) y la hipótesis de que g es invariante, se tiene que

$$\begin{aligned} < Ad(k) X, Ad(k) Y > &= g_0((Ad(k) \circ \pi_*) X, (Ad(k) \circ \pi_*) Y) \\ &= g_0((\mathbb{L}_k \circ \pi_*) X, (\mathbb{L}_k \circ \pi_*) Y) \\ &= g_0(\pi_* X, \pi_* Y) \\ &= < X, Y > . \end{aligned}$$

Recíprocamente, dado $< , >$, definamos g: Sea $\bar{a} = aK$ un punto cualquiera de $\frac{G}{K}$

$$g_{\bar{a}} : T_{\bar{a}}\left(\frac{G}{K}\right) \times T_{\bar{a}}\left(\frac{G}{K}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{\bar{a}}(X, Y) = < (\mathbb{L}_a \circ \pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_a \circ \pi_*)^{-1}(Y) >$$

Debemos verificar que g está bien definida. Si $bK = aK$, entonces $b = ak$ con $k \in K$. Por (9) y por el hecho de que $< , >$ es $Ad(K)$-invariante, se tiene:

$$\begin{aligned} g_{\bar{b}}(X, Y) &= < (\mathbb{L}_b \circ \pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_b \circ \pi_*)^{-1}(X) > \\ &= < (\mathbb{L}_a \circ \mathbb{L}_k \circ \pi_*)^{-1}(X), (\mathbb{L}_a \circ \mathbb{L}_k \circ \pi_*)^{-1}(Y) > \\ &= < (\mathbb{L}_a \circ \pi_* \circ Ad(k))^{-1}(X), (\mathbb{L}_a \circ \pi_* \circ Ad(k))^{-1}(Y) > \\ &= < Ad(K^{-1})(\mathbb{L}_a \circ \pi_*)^{-1}(X), Ad(K^{-1})(\mathbb{L}_a \circ \pi_*)^{-1}(Y) > \end{aligned}$$

$$= < (\mathbb{L}_a \circ \pi_*)^{-1}(X),\ (\mathbb{L}_a \circ \pi_*)^{-1}(Y) >$$

$$= g_{\bar{a}}(X, Y) .$$

Es evidente, de la misma definición, que g es invariante. ∎

LEMA 2.3 Sea $\frac{G}{K}$ reductiva con descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

a) Existe una correspondencia biunívoca natural entre las r-formas invariantes Ω de $\frac{G}{K}$ y las funciones r-lineales alternantes Ad (K)-invariantes ω en $\mathfrak{m}$. La correspondencia está dada por

$$\textbf{11)} \quad \omega = \pi^*(\Omega_0)$$

b) Existe una correspondencia biunívoca natural entre los tensores de tipo (1, 1) invariante J en $\frac{G}{K}$ y las funciones lineales Ad(K)-invariantes $\tilde{J}$ en $\mathfrak{m}$. La correspondencia está dada por

$$12) \quad \tilde{J} = \pi_*^{-1} \circ J_0 \circ \pi_*$$

c) Existe una correspondencia biunívoca natural entre los campos vectoriales invariantes E en $\frac{G}{K}$ y los elementos $\tilde{E}$ en $\mathfrak{m}$ que son Ad(K)-invariantes. La correspondencia está dada por

$$13) \quad E_0 = \pi_*(\tilde{E})$$

Demostración.

Se procede de manera similar a la demostración del lema anterior. ∎

3. VARIEDADES SIMPLECTICAS HOMOGENEAS

En toda esta sección G es un grupo de Lie compacto y conexo. Se probará que toda estructura simpléctica homogénea en $\frac{G}{K}$ induce en la variedad una estructura casi-hermitiana homogénea.

DEFINICION 3.1 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una forma bilineal

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

es *no degenerada* si

$$B(v_1, v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

Si $\beta = \{v, \ldots, v_n\}$ es una base de V y

$$b_{ij} = B(v_i, v_j) \ ,$$

la matriz $n \times n$ (b_{ij}) es la matriz de B en la base β.

Se prueba fácilmente que las siguientes proposiciones son equivalentes [1] :

a) B es no degenerada

b) (b_{ij}) es no singular

c) V tiene dimensión par, digamos $n = 2m$, y

$$B^m = \underbrace{B \wedge \quad \wedge B}_{m} \neq 0$$

DEFINICION 3.2 Una *forma simpléctica* en un espacio vectorial real V es una forma bilineal B que es antisimétrica y no degenerada. El par (V,B) es llamado espacio vectorial simpléctico.

DEFINICION 3.3 Una estructura simpléctica en una variedad M es una 2-forma Ω en M que es cerrada ($d\Omega = 0$) y no degenerada. El par (M, Ω) se llama *variedad simpléctica.* Si además M es una variedad homogénea $\frac{G}{K}$ y Ω es invariante, entonces Ω es una ***estructura simpléctica homogénea*** y $(\frac{G}{K}, \Omega)$ es una variedad simpléctica homogénea.

DEFINICION 3.4 Una estructura casi-compleja sobre una variedad M es un campo tensorial del tipo (1, 1) que asigna a cada punto $x \in M$ un endomorfismo

$$J_x : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$$

tal que

$$J_x^2 = -I$$

donde I es la transformación identidad de $T_x(M)$. El par (M, J) es una *variedad casi-compleja.*

Una ***métrica hermitiana*** sobre una variedad casi-compleja (M, J) es una métrica riemanniana de M que es invariante respecto a J; esto es,

$$(1)\quad g(JX, JY) = g(X, y), \quad \forall\ X, Y, \text{ campos en } M$$

Una variedad casi-hermitiana es una tríada (M,J,g), donde g es una métrica hermitiana en la variedad casi compleja (M, J). Además, si M es homogénea, $M = \frac{G}{K}$ y J y g son invariantes, entonces $(\frac{G}{K}, J, g)$ es una *variedad casi-hermitiana homogénea.*

Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de matrices reales de orden $n \times n$ que son invertibles, $O(n)$ el subgrupo ortogonal y $H(n)$ el subconjunto de $GL(n,\mathbb{R})$ formado por todas las matrices simétricas y positivas definidas. El siguiente teorema se debe a Chevalier [3] y a Hatakeyama [4] :

TEOREMA 3.4

a) Toda matriz invertible $\tau \in GL(n, \mathbb{R})$ se puede descomponer de una única manera como un producto:

$$\tau = \sigma\alpha\,, \text{ donde } \sigma \in O(n) \text{ y } \alpha \in H(n)$$

b) La función $GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n) \times H(n)$, $\tau \longrightarrow (\sigma, \alpha)$ es un difeomorfismo analítico.

Ahora ya estamos preparados para enunciar y demostrar el resultado del presente trabajo.

TEOREMA 3.5 Sea $M = \frac{G}{K}$ una variedad homogénea con G compacta. Si $\frac{G}{K}$ tiene una estructura simpléctica homogénea, entonces $\frac{G}{K}$ tiene una estructura casi-hermitiana homogénea.

Demostración.

Sea Ω la estructura simpléctica invariante definida en $\frac{G}{K}$.

$\frac{G}{K}$ es reductiva, por ser G compacto. Sea

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad , \text{ con } Ad(K)\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

Por el lema 2.3,

$$\omega = \pi^*(\Omega_0)$$

es una forma bilineal alternante y $Ad(H)$-invariante en $\mathfrak{m}$. Además, como $\pi_* : \mathfrak{m} \longrightarrow T_0(\frac{G}{K})$ es un isomorfismo, ω es no degenerada; es decir ω es una forma simpléctica en $\mathfrak{m}$.

Tomemos una métrica riemanniana biinvariante en G. Esta existe por ser G compacto. Esta métrica nos proporciona un producto interno $Ad(G)$-invariante en $\mathfrak{g} = T_e(G)$. Sea

$$\beta = \{X_1, \ldots, X_n\}$$

una base ortonormal de $\mathfrak{m}$ respecto a esta métrica, sea

$$b_{ij} = \omega(X_i, X_j) \text{ y } B = (b_{ij}).$$

Por ser ω no degenerada, B es invertible. Luego, por el teorema 3.4, existe una única matriz de $O(n)$ y una única matriz $C \in H(n)$ tales que

$$(2) \quad B = DC$$

Por otro lado, por ser ω $Ad(K)$-invariante, para $k \in K$, se tiene que

$$(3) \quad \omega(Ad(k)X, Ad(k)Y) = \omega(X,Y)$$

Sea A la matriz de $Ad(k)$ en la base β. Por ser la métrica biinvariante, A es ortogonal. Además, (3) es equivalente a

$$(4) \quad A^t B A = B$$

Ahora, de (2) y tomando en cuenta que B es asimétrica, C es simétrica y D ortogonal, se tiene que

$$B = DC \Rightarrow B^t = C^t D^t \Rightarrow$$

$$-B = CD^t \Rightarrow DC = -CD^t \Rightarrow$$

$$C = -DCD \Rightarrow C = (-D^2)(D^t CD)$$

Pero $-D^2 \in O(n)$ y $D^t C D \in H(n)$. Luego, por la unicidad del teorema 3.4, se tiene que

$$(5) \quad D^2 = -I \qquad\qquad (6) \quad D^t C D = C$$

Además, de (2) y (4) y del hecho de que A es ortogonal, se tiene

$$DC = A^t(DC)A = (A^t D A)(A^t C A)$$

Pero $A^t D A \in O(n)$ y $A^t C A \in H(n)$. Luego, nuevamente por 3.4,

$$(7) \quad A^t D A = D \quad ó \quad DA = AD\,, \qquad (8) \quad A^t C A = C$$

La matriz $D = (d^i_j)$ nos proporciona la siguiente transformación lineal

$$\tilde{J} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m} \quad , \quad \tilde{J}(X_j) = \sum_i d^i_j X_i$$

La igualdad (5) nos dice que $\tilde{J}$ es una estructura casi-compleja en $\mathfrak{m}$, y la igualdad (8) dice que $\tilde{J}$ es Ad(K)-invariante; esto es,

$$(9) \quad \tilde{J}^2 = -I \qquad\qquad (10) \quad \tilde{J} \circ Ad(k) = Ad(k) \circ \tilde{J}, \quad \forall\, k \in K$$

Aplicando el lema 2.3 parte b, obtenemos un tensor J de tipo (1,1) sobre $\frac{G}{K}$, que es invariante. Además, de (9), se tiene

$$J^2 = -I\,;$$

es decir J es una estructura casi-compleja y homogénea en $\frac{G}{K}$.

Por otro lado, la matriz $C = (C_{ij})$ nos proporciona el siguiente producto interno

$$<\;>\; : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad < X_i, X_j > = C_{ij}$$

La igualdad (8) nos dice que este producto interno es Ad(K)-inva riante, y la igualdad (6) dice que éste es invariante respecto a $\tilde{J}$; es to es, para X , Y en $\mathfrak{m}$ y para $k \in K$, se tiene

(11) $\langle Ad(k)X, Ad(k)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ (12) $\langle \tilde{J}X, \tilde{J}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$

Aplicando el lema 2.2 obtenemos una métrica riemanniana g en $\frac{G}{K}$ que es invariante. Además, la igualdad (12) nos dice que

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \text{para campos en } \frac{G}{K} ;$$

es decir $\left(\frac{G}{K}, J, g\right)$ es una variedad casi-hermitiana homogénea. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J., *Foundations of Mechanics*, Second edition, Benjamin, 1978.

[2] ARNOLD, V., *Méthodes Mathématiques de la Mécanica Classique*, MIR, Moscou, 1974.

[3] CHEVALIER, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, 1946

[4] HATAKEYAMA, Y., "*On the Existance of Riemann Metrics Associate with a 2-form of rank 2^r* ", Tohoku Mathematical Journal, 14, 1962 pp. 161-166.

[5] KOBAYASHI, S., "*Principal toroidal bundles with 1-dimensional toroidal group*, Tohoku Mathematical Journal 8 (1956) pp. 29-45.

[6] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, New York, John WIley & Sons, Vol. 1, 1963; Vol. 2 1969.

[7] MONTGOMERY, D., "*Simply Connected Homogéneos Spaces*", Procceding of the American Mathematical Society, 1, 1950, pp. 467-469.

[8] MURACAMI, S.,"*Sur Certain Espaces Fibres Principales, Diferenciables et Holomorphes*", Nagoya Mathematical Journal, 15, 1959, pp. 171-177.

[9] PLANCHART, E., *Geometría Simpléctica*, VII ELAM, Caracas, 1984.

[10] SAENZ, J., *Variedades Diferenciables*, Escuela de Ciencias, UCLA,1980.

[11] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, 1970, Vol. 5, 1975, Publish or Perish.

[12] WANG, H. C., "*Closed Manifolds with Homogeneuss Complex Structures*" Americal Journal of Mathematics, 76,1954; pp. 1-32.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO