NOTAS DE MATEMATICA

Nº 96

SOBRE LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA PARA DOS ESPECIES EN COMPETENCIA

POR

ANTONIO TINEO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA-VENEZUELA

1988

SOBRE LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA PARA DOS ESPECIES EN COMPETENCIA

POR

ANTONIO TINEO

INTRODUCCION. En este artículo consideramos la ecuación de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} u' &= u\,[a(t) - b(t)u - c(t)v] \\ v' &= v\,[d(t) - e(t)u - f(t)v] \end{aligned} \qquad (0.1)$$

donde $a,\ldots, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas positivas y 1-periódicas. Este sistema describe un modelo para dos especies en competencia en un ecosistema periódico. Para más información el lector puede consultar [3] [4] [5] etc.

Nuestro objetivo es probar algunos resultados de existencia, (no existencia) y estabilidad (inestabilidad) de una solución 1-periódica de (0.1) con ambas componentes positivas. Estos resultados, salvo algunos detalles propios del autor, son un resumen de varias ideas expuestas en [1], [2] y [5]. Quizás los argumentos más interesantes que usamos aquí son los de [5], cuya lectura recomendamos ampliamente.

En lo que sigue, U(resp. V) denotará la única solución 1-periodica positiva del sistema de logistica $x' = x\,[a(t)-b(t)x]$ (resp. $y' = y\,[d(t)-f(t)y]$). Probaremos los siguientes resultados:

0.1. TEOREMA (a) Supongamos que:

$$\max(d/f) < \min(a/c) \tag{0.2}$$

$$\max(d/e) \leq \min(a/b) \tag{0.3}$$

Si (u,v) es una solución de (0.1) con ambas componentes positivas entonces

$$\lim_{t\to\infty} [u(t)-U(t)] = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0 \ .$$

En particular el sistema (0.1) no posee soluciones 1-periódicas con ambas componentes positivas.

(b) Supongamos que

$$\max(a/c) \leq \min(d/f) \tag{0.4}$$

$$\max(a/b) < \min(d/e) \tag{0.5}$$

Si (u,v) es una solución de (0.1) con ambas componentes positivas entonces

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} (v(t)-V(t)) = 0 \ .$$

0.2. TEOREMA. Supongamos que (0.2) y (0.5) son satisfechas. Supongamos también que

$$\max(c/f) < \min(b/e) \tag{0.6}$$

Entonces (0.1) posee una solución 1-periódica (u_0,v_0) con ambas componentes positivas tal que

$$\lim_{t\to+\infty} (u(t)-u_0(t) = \lim_{t\to+\infty} (v(t)-v_0(t)) = 0$$

cualquiera sea la solución (u,v) de (0.1) con componentes positivas. En particular (u_0,v_0) es la única solución 1-periódica de (0.1) con ambas componentes positivas.

0.3. TEOREMA. Supongamos que (0.3) y (0.4) son satisfechas estrictamente. Supongamos además que

$$\max(b/e) < \min(c/f) \qquad (0.7)$$

Entonces el sistema (0.1) posee una única solución 1-periódica (u_0,v_0) con ambas componentes positivas. (De hecho $(u_0(0),v_0(0))$ es un "punto de silla" para la aplicación de Poincaré asociada a (0.1). Ver detalles al final del artículo).

El artículo termina estudiando en detalle el caso en que a/b, a/c, d/e y d/f son constantes.

1. UNICIDAD. En esta sección probamos que la condición (0.6) (resp. (0.7)) implica la existencia de a lo sumo una solución 1-periódica de (0.1) con ambas componentes positivas. Parte de nuestro estudio está basado en algunas propiedades de sistemas lineales de la forma

$$x' = -\alpha(t)x - \beta(t)y \ , \quad y' = -\gamma(t)x - \delta(t)y \qquad (1.1)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas positivas definidas en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$.

1.1. PROPOSITION. (a) Sea (h,k) una solución no trivial de (1.1); si $h(t_0)\ k(t_0) = 0$ para algún $t_0 \varepsilon I$ entonces $h.k < 0$ en $I \cap (t_0,\infty)$ y $h.k > 0$ en $I \cap (-\infty, t_0)$.

(b) Si $[0,1] \subset I$ y $\Phi(t)$ es la matriz fundamental de (1.1) con $\Phi(0)$ = identidad entonces los autovalores de $\Phi(1)$ son reales positivos y su producto es menor que 1. En particular $\Phi(1)$ tiene un autovalor en $(0,1)$.

(c) Supongamos que $I = \mathbb{R}$ y que $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ son 1-periódicas; si (h,k) es una solución 1-periódica de (1.1) no trivial entonces $h.k < 0$.

DEMOSTRACION. (a) Sea $Q(t)$ una solución positiva de la ecuación $x' = [\alpha(t) + \delta(t)]\ x$ y pongamos $F(t) = Q(t)h(t)k(t)$; entonces $F' = -Q(\gamma h^2 + \beta\ k^2) < 0$ y el resultado se sigue fácilmente.

(b) De la parte (a) se sigue que los elementos de la diagonal de $\Phi(1)$ son positivas mientras que las restantes son negativas. En particular los autovalores λ,μ de $\Phi(1)$ son reales con $\lambda + \mu > 0$. Por otra parte

$$\lambda.\mu = \det \Phi(1) = \exp(- \int_0^1 [\alpha(t) + \delta(t)]\ dt)$$

de donde $0 < \lambda\ \mu < 1$ y termina la prueba de (b).

(c) De la parte (a) se sigue que $h(t)\ k(t) \neq 0$ para cada $t \varepsilon \mathbb{R}$. Si fuera $hk > 0$ se seguiría de (1.1) que $h\ h' < 0$ $(k\ k'<0)$

lo cual contradice la periodicidad de h. Esto termina la demostración.

1.2. COROLARIO. Si (0.6) (resp. (0.7)) es satisfecha entonces el sistema (0.1) posee a lo sumo una solución 1-periódica con ambas componentes positivas.

DEMOSTRACION. Supongamos que (u_1,v_1), (u_2,v_2) son soluciones 1-periódicas de (0.1) con componentes positivas y pongamos $h = -1 + u_2/u_1$, $k = -1 + v_2/v_1$; entonces (h,k) es una solución 1-periódica no trivial del sistema

$$x' = -\, bu_2\, x - e\,\frac{u_2\, v_1}{u_1}\, y \,, \quad y' = -e\,\frac{u_1\, v_2}{v_1}\, x - fv_2\, y$$

y por la proposición anterior $h.k < 0$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad $h > 0 > k$; equivalentemente: $u_2 > u_1$, $v_2 < v_1$.

Por otra parte; de la relación

$$(u_2/u_1)' \,/\, (u_2/u_1) = b(u_1-u_2) + c(v_1 - v_2)$$

concluimos que

$$\int_0^1 b(u_2 - u_1)dt = \int_0^1 c(v_1 - v_2)dt \qquad (1.2)$$

y de manera semejante que

$$\int_0^1 e(u_2 - u_1)dt = \int_0^1 f(v_1 - v_2)dt \qquad (1.3)$$

Supongamos ahora que (0.7) es satisfecha, entonces de (1.2) y (1.3) obtenemos

$$\max(b/e)\int_0^1 e(u_2-u_1)dt \geq \int_0^1 b(u_2-u_1)dt = \int_0^1 c(v_1-v_2)dt \geq$$

$$\geq \min(c/f)\int_0^1 f(v_1-v_2)dt = \min(c/f)\int_0^1 e(u_2-u_1)dt$$

lo cual implica $\max(b/e) \geq \min(c/f)$; contradiciendo (0.7) y terminando la prueba en este caso. El caso en que (0.6) es satisfecha se prueba de manera semejante.

NOTA. El Corolario 1.2 fué probado en [2] bajo la hipótesis (0.6).

2. LA APLICACION DE POINCARE. Las ideas expuestas en esta sección fueron tomadas de [ ]. En lo que sigue P (resp. P_0) denotará el primer cuadrante cerrado (resp. abierto) de $\mathbb{R}^2$. Dado $p \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $(u(t,p), v(t,p))$ la solución de (0.1) determinada por la condición inicial $(u(0),v(0)) = p$. Dicha solución está definida en $[0,\infty)$ y es acotada en ese dominio.

Recordamos que la aplicación de Poincaré $T: P \to P$ viene dada por $T(p) = (u(1,p), v(1,p))$ y goza de las siguientes propiedades:

1) $T(P_0) \subset P_0$; $T(P|P_0) \subset P|P_0$

2) $p \in P$ es punto fijo de T si y sólo si $(u(t,p), v(t,p))$ es

solución 1-periódica de (0.1). Además dicha solución tiene sus componentes positivas si y sólo si $p \in P_0$.

3) Si $T^n(q) \to p$ entonces p es punto fijo de T y $u(t,q)-u(t,p) \to 0$, $v(t,q) - v(t,p) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

Sea Fix(T) el conjunto de puntos fijos de T y pongamos $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (U(0),0)$, $p_2 = (0,V(0))$ (ver definición de U y V en la introducción), es conocido que p_0, p_1, p_2 son los únicos puntos fijos de T en el borde ∂P de P. Dado $p \in Fix(T)$ pondremos $W^s(T,p) = \{q \in P: T^n(q) \to p\}$. Este conjunto se conoce como la variedad estable de T en p. Es bien sabido que $W^s(T,p_0)= \{p_0\}$; $W^s(T,p_1) \supseteq (0,\infty) \times \{0\}$ y $W^s(T,p_2) \supseteq \{0\} \times (0,\infty)$.

2.1. TEOREMA ([5]). La sucesión $\{T^n(q)\}$ es convergente para cada $q \in P$. Es decir:

$$P = \cup \{W^s(T,p): p \in Fix(T)\}.$$

DEMOSTRACION. Si $q \in \partial P$ ó si $T(q) = q$ el resultado es trivial. Supongamos ahora que $q \in P_0$ y $T(q) \neq q$; entonces $(u_1(t),v_1(t)) := (u(t,q), v(t,q))$; $(u_2(t),v_2(t)) := (u(t+1,p),v(t+1,p))$ son soluciones diferentes de (0.1) y razonando como en la sección precedente vemos que ocurre uno de los siguientes casos:

1) Existe $t_0 \geq 1$ tal que $(u_2-u_1)(v_2-v_1) < 0$ en (t_0,∞).

2) $(u_2-u_1)(v_2-v_1) > 0$ en $[1,\infty)$.

Ahora, teniendo en cuenta que $T^n(q) = (u(n,q), v(n,q))$

concluimos que las coordenadas de $T^n(q)$ son sucesiones monótonas a partir de algún entero $n_0 \geq 1$. El resultado se sigue ahora del hecho que $\{T^n(q)\}$ es acotada.

2.2. PROPOSICION. (a) Supongamos que

$$\int_0^1 [a(t) - c(t)\, V(t)]\, dt > 0 \tag{2.1}$$

entonces $W^s(T,p_2) = \{0\} \times (0,\infty)$; mientras que si el signo en (2.1) es invertido (<) se tiene que $W^w(T,p_2)$ es un abierto de P.

(b) Supongamos que

$$\int_0^1 [d(t) - e(t)\, U(t)]\, dt > 0 \tag{2.2}$$

entonces $W^s(T,p_1) = (0,\infty) \times \{0\}$ y si asumimos la desigualdad contraria entonces $W^s(T,p_1)$ es un abierto de P.

DEMOSTRACION. (Esbozo) Los autovalores de $T'(p_2)$ son

$$\exp\left(\int_0^1 [a(t)-c(t)V(t)]\, dt\right) \quad y \quad \exp\left(-\int_0^1 f(t)V(t)dt\right)$$

y el resultado (a) se sigue de la teoría de los puntos fijos hiperbólicos [6] ó de los argumentos más sencillos de [5]. La parte (b) se muestra de manera similar.

2.3. COROLARIO. Supongamos que (2.1) y (2.2) son satisfechas entonces (0.1) posee una solución 1-periódica con ambas componentes positivas.

DEMOSTRACION. De la proposición anterior y el teorema 2.1 se tiene que $P_0 = \cup \{W^s(T,p) : p \in Fix(T) \cap P_0\}$; luego $P_0 \cap Fix(T) \neq \emptyset$ y esto termina la prueba.

NOTA. Si en el Corolario 2.3 se asume además que Fix(T) es finito; puede probarse (ver [5]) que T tiene un punto fijo en P_0 es cual es un atractor (local).

2.4. COROLARIO. Supongamos que

$$\int_0^1 [a(t) - c(t)\, V(t)]\, dt < 0 \quad y \quad \int_0^1 [d(t)-e(t)U(t)]\, dt < 0 \tag{2.3}$$

entonces (0.1) posee una solución 1-periódica con ambas componentes positivas.

DEMOSTRACION. En caso contrario tendremos $Fix(T)= \{p_0, p_1, p_2\}$ y $P|\{p_0\} = W^s(T,p_1) \cup W^s(T,p_2)$. Es decir, $P|\{p_0\}$ sería reunión de dos abiertos disjuntos y no vacíos. Esto contradice la conexidad de $P|\{p_0\}$ y termina la demostración.

2.5. NOTA. Sea $p \in P_0$ un punto fijo de T y pongamos $u(t)=u(t,p)$ $v(t) = v(t,p)$; entonces $T'(p) = \Phi(1)$ donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental; con $\Phi(0)$ = identidad; del sistema

$$\begin{aligned} x' &= x\,[a - bu - cv] - b\,u\,x - c\,u\,y \\ y' &= y\,[d - eu - fv] - e\,v\,x - f\,v\,y \end{aligned} \tag{2.4}$$

ya que $a - bu - cv = u'/u$ y $d - eu - fv = v'/v$ entonces, poniendo $z = x/u$, $w = y/v$, el sistema (2.4) se transforma en

$$z' = -b\, u\, z - c\, v\, w, \quad w' = -\, e\, u\, z - f\, v\, w. \tag{2.5}$$

Sea $\psi(t)$ la matriz fundamental de (2.5) con $\psi(0)$ = identidad; entonces $\psi(1)$ y $\phi(1)$ son matrices similares y en consecuencia tienen las mismas autovalores. Por la proposición 1.1 los autovalores de $\psi(1)$ son reales positivos y con producto mènor que 1. Supongamos en fin que (0.6) ó (0.7) es satisfecha, entonces un razonamiento parecido al usado en el Corolario 2.1, muestra que (2.5) no posee soluciones 1-periódicas no triviales. Es decir, 1 no es autovalor de $\psi(1)$. En conclusión, si (0.6) ó (0.7) es satisfecha y $p \in P_0$ es un punto fijo de T entonces los autovalores de $T'(p)$ son reales positivos diferentes de 1 y uno de ellos está en (0.1).

La nota 2.5 generaliza el Teorema 4 de [3], el cual fué mal utilizado en [5] para probar su Teorema 5.8. Sería interesante dar una prueba correcta de este resultado.

3. PRUEBA DE LOS RESULTADOS PRINCIPALES. Probaremos aquí los resultados enunciados en la introducción.

PRUEBA DEL TEOREMA 0.1. Comenzaremos probando que $Fix(T) = \{p_0, p_1, p_2\}$. Para ello asumamos lo contrario; entonces T tiene un punto fijo en P_0 y así (0.1) posee una solución 1-periódica (u,v) con ambas componentes positivas.

(a) Supongamos que (0.2) y (0.3) son satisfechas y pongamos

$u_L = \min(u)$, $v_M = \max(v)$. Escojamos ahora t_o, $t_1 \in \mathbb{R}$ tales que $v_M = v(t_o)$ y $u_L = u(t_1)$; ya que $v'(t_o)=u'(t_1)=0$ concluimos que

$$d(t_o) = e(t_o)\, u(t_o)+f(t_o)v_M \geq e(t_o)u_L+f(t_o)v_M$$

$$a(t_1) = b(t_1)\, u_L + c(t_1)v(t_1) \leq b(t_1)\, u_L+ c(t_1)v_M$$

En consecuencia

$$a(t_1)f(t_o)-c(t_1)d(t_o) \leq [b(t_1)f(t_o)-c(t_1)e(t_o)]u_L \tag{3.1}$$

$$b(t_1)d(t_o)-a(t_1)e(t_o) \geq [b(t_1)f(t_o)-c(t_1)e(t_o)]v_M \tag{3.2}$$

Pero de (0.2), $a(t_1)\, f(t_o) - c(t_1)\, d(t_o) > 0$ y como $u_2 > 0$ se sigue de (3.1) que $b(t_1)\, f(t_o) - c(t_1)\, e(t_o) > 0$. Ahora de (3.2) concluimos que $b(t_1)\, d(t_o) - a(t_1)\, e(t_o) > 0$ lo cual contradice (0.3) y prueba que $Fix(T) = \{p_o, p_1, p_2\}$.

Por otra parte $\max(V) \leq \max(d/f)$ y de aquí

$$\int_0^1 [a(t)-c(t)V(t)]dt = \int_0^1 c(t)\left[\frac{a(t)}{c(t)} - V(t)\right]dt \geq$$

$$\geq [\min(a/c) - \max(d/f)] \int_0^1 c(t)dt > 0$$

Así $W^s(T,p_2) = \{0\} \times (0,\infty)$ y por el Teorema 2.1 $P_o \subset W^s(T,p_1)$. Esto termina la prueba de la parte (a). La prueba de la parte (b) se realiza de manera semejante ($u_M = \max(u)$, $v_L = \min(v)$) y esto termina la demostración.

NOTA. Parte de las ideas en la demostración anterior fueron encontradas en [ ].

PRUEBA DEL TEOREMA 0.2. Es claro que (0.2) y (0.5) implican (2.1) y (2.2) respectivamente; así por el Corolario 2.3, T posee un punto fijo en P_0, el cual por el Corolario 1.2 es único. El resultado se sigue ahora del Teorema 2.1.

NOTA. El Teorema 0.2 fué probado en [2] usando una técnica un poco diferente.

3.1. TEOREMA. Supongamos que (0.3) y (0.4) son satisfechas estrictamente y que (0.7) es satisfecha. Entonces T tiene un único punto fijo p en P_0; $T'(p)$ tiene un autovalor en $(0,1)$ y el otro autovalor en $(1,\infty)$. Además $W^s(T,p)$ es el gráfico de una función continua $\psi: [0,r) \to [0,\infty)$ estrictamente creciente tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi(t) \to +\infty$ si $t \to r$ y $r < +\infty$.

DEMOSTRACION. Ya que $\min(U) \geq \min(a/b)$ y $\min(V) \geq \min(d/f)$ se sigue facilmente que si (0.3) y (0.4) son estrictas entonces (2.3) es satisfecha. En consecuencia los Corolarios 2.4 y 1.2 dicen que T tiene un único punto fijo p en P_0; además la nota 2.5 dice que $T'(p)$ tiene un autovalor en $(0,1)$ y el otro es real positivo diferente de 1. Supongamos que ambos autovalores de $T'(p)$ están en $(0,1)$, entonces $W^s(T,p)$ es abierto y de la proposición 2.2 y el Teorema 2.1 se tendría que $P \setminus \{p_0\}$ es unión de tres abiertos disjuntos. Esto prueba que $T'(p)$ tiene un autovalor en $(0,1)$ y otro en $(1,\infty)$. El resto de la prueba se sigue del Teorema 4.8 de [5] .

NOTA. Sin hacer uso de las hipótesis (0.2) - (0.7) y siguiendo la exposición de [ ] se muestra la existencia de una función continua y estrictamente decreciente $\phi:[0,U(0)] \to [0,V(0)]$ tal que $\phi(0) = V(0)$, $\phi(U(0)) = 0$, cuyo gráfico es invariante por T y tal que los puntos fijos de T, distintos de p_0, están ubicados en dicho gráfico. Haciendo uso de este hecho es fácil probar que la "variedad inestable" del punto fijo p, dado por el teorema anterior, es precisamente el gráfico de ϕ.

4. UN EJEMPLO. Supondremos en esta sección que a/b, a/c, d/e y d/f son constantes. En este caso el sistema (0.1) toma la forma

$$u' = b(t)\,u\,[\alpha_0 - u - \beta_0 v], \quad v' = f(t)v\,[\gamma_0 - \delta_0 u - v] \tag{4.1}$$

para ciertas constantes positivas $\alpha_0,\ldots,\delta_0$. Haciendo el cambio de variables $(u,v) \longleftrightarrow (u/\alpha_0,\ v/r_0)$ es sistema (4.1) se transforma en

$$u' = g(t)u\,[1 - u - \alpha v], \quad v' = h(t)\,v\,[1 - \beta u - v] \tag{4.2}$$

donde α,β son constantes positivas y $g,h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas positivas y 1-periódicas.

Nuestro objetivo es ver que el sistema (4.2) tiene el "mismo" comportamiento que el caso constante. Usando las notaciones de las secciones precedentes tenemos $U \equiv V \equiv 1$; $p_1 = (1,0)$ y $p_2 = (0,1)$. Además las condiciones (0.2) - (0.5) son equivalentes a $\alpha < 1$, $\beta \geq 1$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ respectivamente.

Es fácil ver que las condiciones (0.2) y (0.5) implican, en una gran cantidad de casos ($b/e \equiv$ constante ó f/c = constante), la condición (0.6). Sin embargo es bastante sencillo construir ejemplos de sistemas (4.2) que satisfacen (0.2) y (0.5) pero no (0.6). En lo que sigue $T: P \to P$ denota la aplicación de Poincaré asociada a (4.2).

4.1. PROPOSICION. Supongamos que $\mathrm{Fix}(T) \cap P_0 \neq \emptyset$.

(a) Si $\alpha\beta = 1$ entonces $\alpha = \beta = 1$.

(b) Si $\alpha\beta \neq 1$; entonces $(1-\alpha)(1-\beta) > 0$ y $\mathrm{Fix}(T) \cap P_0 = \{p_3\}$, donde

$$p_3 = \frac{1}{1-\alpha\beta}(1-\alpha,\ 1-\beta) \tag{4.3}$$

En particular (4.2) posee a $(u(t,p_3), v(t,p_3)) \equiv p_3$ como única solución 1-periódica positiva.

DEMOSTRACION. Ya que $\mathrm{Fix}(T) \cap P_0 \neq \emptyset$, el sistema (4.2) posee una solución 1-periódica positiva (u,v). Usando las notaciones y argumentos de la prueba del Teorema (0.1) concluimos que

$$\begin{aligned}(1-\alpha\beta)u_L &\geq 1-\alpha \geq (1-\alpha\beta)u_M\\ (1-\alpha\beta)v_L &\geq 1-\beta \geq (1-\alpha\beta)v_M\end{aligned} \tag{4.4}$$

La prueba de la parte (a) se sigue rápidamente de (4.4). Supongamos ahora que $1 - \alpha\beta > 0$; de (4.4) se sigue que $\alpha < 1$ $\beta < 1$; $u_L \geq u_M$ y $v_L \geq v_M$. De aquí $(1-\alpha)(1-\beta) > 0$, y (u,v) es constantemente igual a p_3.

Supongamos ahora que $1 - \alpha\beta < 0$, entonces (4.4) dice que $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, en particular $(1-\alpha)(1-\beta) > 0$. También tenemos

$$u_L \leq \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} \leq u_M , \qquad v_L \leq \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \leq v_M . \tag{4.5}$$

Supongamos que $(u,v) \neq (u(.,p_3), v(.,p_3))$; siguiendo la prueba del Corolario 1.2 concluimos que

$$\left(u(t) - \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\right)\left(v(t) - \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right) < 0 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Esto contradice (4.5) y muestra que $(u(t),v(t)) \equiv p_3$. La prueba es ahora completa.

4.2. TEOREMA. (a) $\alpha = 1$, $\beta = 1$ si y sólo si $\mathrm{Fix}(T)$ contiene el segmento de recta que une p_1 con p_2.

(b) $\alpha < 1$, $\beta < 1$, si y sólo si $\mathrm{Fix}(T) \cap P_0$ se reduce a un punto p con $W^s(T,p) = P_0$.

(c) $\alpha \leq 1 \leq \beta$, $\alpha < \beta$ si y sólo si

$$u(t) \to 1, \quad v(t) \to 0 \qquad (t \to \infty) \tag{4.6}$$

cualquiera sea la solución positiva (u,v) de (4.2).

(d) $\alpha \geq 1 \geq \beta$ $\alpha > \beta$ si y sólo si $u(t) \to 0$, $v(t) \to 1$ $(t \to \infty$ cualquiera sea la solución positiva (u,v) de (4.2).

(e) $\alpha > 1$, $\beta > 1$ si y sólo si $Fix(T) \cap P_0$ se reduce a un punto P y $T'(p)$ tiene un autovalor en $(0,1)$ y otro en $(1,\infty)$.

DEMOSTRACION. (a) Si $\alpha = \beta = 1$ es obvio que $Fix(T)$ contiene el segmento $[p_1, p_2]$. Recíprocamente, si $Fix(T) \supseteq [p_1,p_2]$ se sigue de la proposición 4.1 (b) que $\alpha\beta = 1$ y el resultado se sigue de la parte (a) de esta misma proposición.

(b) Si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$ entonces $p_3 \in Fix(T) \cap P_0$ y por la proposición 4.1, $Fix(T) \cap P_0 = \{p_3\}$. Ahora del Teorema 2.1 y la proposición 2.2 concluimos que $W^s(T,p_3) = P_0$.

Recíprocamente; supongamos que $Fix(T) \cap P_0 = \{p\}$ y $W^s(T,p) = P_0$. Si fuera $1 - \alpha\beta = 0$ se tendría $\alpha = \beta = 1$ y en consecuencia $Fix(T)$ contendría el segmento de recta que une p_1 con p_2. Esto prueba que $\alpha\beta \neq 1$ y por la proposición 4.1, $(1-\alpha)\cdot(1-\beta) > 0$.

No puede ser $\alpha > 1$ y $\beta > 1$ porque, de acuerdo a la proposición 2.2, se tendría $W^s(T,p) \neq P_0$. Esto termina la prueba de (b).

(c) Si $\alpha < 1 \leq \beta$ el Teorema 0.1 dice que (4.6) es satisfecha. Supongamos ahora que $\alpha = 1 < \beta$; por la proposición (4.1) tenemos que $Fix(T) \cap P_0 = \emptyset$. Por otra parte, el Teorema 2.1 y la proposición 2.2 dicen que $P_* = W^s(T,p) \cup W^s(T,p_2)$

y que $W^s(T,p_1)$ es un abierto de P_* donde $P_* = P \mid \{p_0\}$. Debemos probar que $P_0 \subset W^s(T,p_1)$. Si este no fuera el caso se tendría que la frontera de $W^s(T,p_1)$ es un subconjunto A de P_0 no vacío e invariante por T. en consecuencia (Teorema 2.1) T tendría un punto fijo en A. Esto contradice $Fix(T) \cap P_0 = \emptyset$ y termina la primera mitad de la prueba.

Supongamos ahora que (4.6) es satisfecha para cada solución positiva (u,v) de (4.2); de los Corolarios 2.3 y 2.4 y del Teorema 0.1, parte (b) se concluye que

$$(\alpha,\beta) \in \{(x,y) \in P:\ 0 < x \leq 1 \leq y\} \cup \{(x,y) \in P:\ x > 1 = y\} \tag{4.7}$$

AFIRMACION. No puede ser $\alpha > 1 = \beta$. En efecto, supongamos que esto fuera cierto y tomemos una solución positiva (u,v) de (4.2) con $u(0) + v(0) < 1$; entonces existe $t_* > 0$ tal que $u(t_*) + v(t_*) = 1$. Pues, en caso contrario se tendría $v'(t) > 0$ $(t \geq 0)$ lo cual contradice el hecho que $v(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$. Escojamos $t_0 > 0$ tal que $u(t) + v(t) < 1$ si $0 \leq t < t_0$ y $u(t_0) + v(t_0) = 1$ entonces $v'(t) > 0$ si $0 \leq t < t_0$ y $v'(t_0)=0$. Por otra parte v'/h es diferenciable y

$$(v'/h)'(t_0) = (\alpha - 1)\ g(t_0)u(t_0)\ v(t_0)^2 > 0$$

Luego, v'/h es estrictamente creciente alrededor de t_0 y de aquí $v'(t) < 0$ si $t \in (t_0 - \varepsilon,\ t_0)$ para algún ε; $0 < \varepsilon < t_0$. Esto contradice $v' > 0$ en $(0,t_0)$ y prueba la afirmación.

Ahora de (4.7) se tiene $\alpha \leq 1 \leq \beta$ y por la parte (a) no puede ser $\alpha = \beta = 1$. Esto termina la prueba de (c).

(d) Es análoga a la prueba de (c).

(e) Supongamos $\alpha > 1$, $\beta > 1$; del Corolario 2.4 y la proposición 4.1 tenemos $Fix(T) \cap P_0 = \{p_3\}$. Ya que $(u(t,p_3), v(t,p_3)) \equiv p_3$ se sigue de la nota 2.5 que $T'(p)$ tiene los mismos autovalores que $\Lambda(1)$, donde $\Lambda(t)$ es la matriz fundamental, con $\Lambda(0)$=identidad, de un sistema de la forma

$$x' = - G(t)\,[x + \gamma y]\ ,\quad y' = - H(t)\,[\delta x + y] \tag{4.8}$$

con $G, H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas positivas 1-periódicas y γ, δ constantes positivas tales que $\gamma\delta = \alpha\beta$.

De la nota 2.5 tenemos que los autovalores de $\Lambda(1)$ son reales positivos con producto menor que 1. Por otra parte $W^s(T,p_3)$ no es abierto (pues en caso contrario $P \mid \{p_0\}$ sería unión de tres abiertos disjuntos) y así $\Lambda(1)$ tiene un autovalor en $[1,\infty)$. Supongamos que $\lambda = 1$ es un autovalor de $\Lambda(1)$ y sea (x,y) una solución 1-periódica no trivial de (4.8). De la proposición 1.1 tenemos $x.y < 0$ y sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x > 0 > y$.

Elijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) \leq x(t_0)$ $(t \in \mathbb{R})$, entonces $x'(t_0)=0$ y existe una sucesión $t_n \to t_0$, $t_n < t_0$ tal que $x'(t_n) \geq 0$. De aquí; teniendo en cuenta que x'/G es diferenciable, concluimos que

$$(x'/G)(t_0) = \lim_{u\to\infty} \frac{x'(t_n)}{(t_n - t_0)G(t_n)} \leq 0$$

lo cual equivale a decir que $y'(t_0) \geq 0$. Esto muestra que $\delta x(t_0) + y(t_0) \leq 0$; pero sabemos que $x'(t_0) = 0$ luego $x(t_0) = -\gamma y(t_0)$ y en consecuencia $(1 - \gamma\delta)\, y(t_0) \leq 0$. Ahora teniendo en cuenta que $y < 0$, deducimos $1 - \gamma\delta \geq 0$. Esto contradice $\alpha\beta > 1$ y prueba la primera mitad de (d).

Recíprocamente, supongamos que $Fix(T) \cap P_0 = \{p\}$ y que $T'(p)$ tiene un autovalor en $(0,1)$ y otro en $(1,\infty)$. De la proposición 4.1 (a) se tiene $\alpha\beta \neq 1$ (en caso contrario Fix(T) contendría el segmento que une p_1 con p_2). Y por la proposición 4.1(b) $(1-\alpha)(1-\beta) > 0$. Si fuera $\alpha < 1$, $\beta < 1$ se tendría de la parte (b) de este teorema que $W^s(T,p) = P_0$ y en consecuencia $T'(p)$ tendría sus autovalores en $(0,1]$. De aquí $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, lo cual termina la demostración.

En la parte (b) del teorema 4.2 también puede probarse que $T'(p)$ tiene sus autovalores en $(0,1)$.

En la parte (a) del Teorema 4.2 puede probarse, usando los argumentos del Corolario 1.2, que $Fix(T) = [p_1, p_2]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ahmad S. and Lazer A. Asymptotic behavior of solutions of periodic competition diffusion systems.

[2] Alvarez C. and Tineo A. Asymptotically stable solutions of Lotka-Volterra equations. Por aparecer Vol. 4, issue 2 1988, Radovi Matematicki.

[3] Cushing J.M. Two species competition in a periodic environment. J. Math. Biol. 10,385-400 (1980).

[4] Gopalsamy K. Global asymptotic stability in an almost periodic Lotka-Volterra System. J. Austral. Math. Soc. Ser. B 27 (1986) 346-360.

[5] Mottoni P.-Schiaffino A. Competition systems with periodic coefficients: A geometric Approach. J. Math Biol. 11 319-335 (1981).

[6] Sotomayor J. Licoes de equacaoes diferenciais ordinarias. Projeto Euclides I.M.P.A. Rio de Janeiro Brasil (1979).