NOTAS DE MATEMATICAS
Nº 84

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE LIAPUNOV A PROBLEMAS DE ESTABILIDAD Y DE EXISTENCIA DE VARIEDADES INVARIANTES.

POR

ABEL CASTRO FIGUEROA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1987

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE LIAPUNOV A PROBLEMAS DE ESTABILIDAD Y DE EXISTENCIA DE VARIEDADES INVARIANTES.

POR

ABEL R. CASTRO FIGUEROA

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

FACULTAD DE FISICA - MATEMATICA

UNIVERSIDAD DE LA HABANA

CUBA -1984

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE LIAPUNOV A PROBLEMAS DE ESTABILIDAD Y DE EXISTENCIA DE VARIEDADES INVARIANTES.

AUTOR: LIC. ABEL R. CASTRO FIGUEROA

TESIS PRESENTADA COMO ASPIRANTE AL GRADO DE CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS EN EL DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA FACULTAD DE FISICA-MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD DE LA HABANA.

TUTOR: C. DR. NIKOLAI ALEXANDROVICH BODUNOV

CIUDAD DE LA HABANA
FEBRERO DE 1984

INDICE

INTRODUCCION

La larga cadena de resultados que conforman el desarrollo del método Directo o Segundo Método de Liapunov, llamado así desde la publicación de la famosa memoria de su iniciador, tiene su antecedente más inmediato en el Teorema de Lagrange de la Mecánica Analítica, el que da una condición suficiente para que cierta posición de un sistema mecánico conservativo sea un punto de equilibrio estable del sistema. Este teorema, que fue formulado por Lagrange y más tarde demostrado por Dirichlet, puede enunciarse del siguiente modo: "Si en cierta posición del sistema la energía potencial $V = V(x)$ tiene un mínimo, entonces esta posición es un punto de equilibrio estable". Aquí se supone que el estado del sistema se describe por cierto vector $x(t) \in E^n$ y su derivada $\dot{x}(t)$, y que existen dos funciones continuas $K = K(x,\dot{x})$ y $V = V(x)$ (energía cinética y energía potencial) que satisfacen la ley de conservación $K+V =$ etc. Si estas funciones son de clase C^1, las posiciones de equilibrio pueden definirse como aquellas en las que grad $V = 0$. Al estudiar un punto de equilibrio puede suponerse que es el origen $x=x = 0$ y además que $V(0)=0$, ya que esta función se define salvo una constante arbitraria.

En la estática, Torricelli había enunciado cierto principio (anterior a él) para las posiciones de equilibrio estable, una versión del cual podría ser: "En un sistema de cuerpos sólidos en equilibrio, el centro de gravedad ocupa la posición relativa más baja posible".

El Teorema de Lagrange puede considerarse una generalización del Principio de Torricelli.

Un poco más tarde, Routh aplicó el Teorema de Lagrange y encontró un criterio de estabilidad para ciertos movimientos periódicos . Muchos eminentes matemáticos y físicos del siglo XIX se ocuparon de cuestiones de estabilidad-Lagrange, Kelvin, Routh, Zhukovskii, Poincaré-pero el problema general de la estabilidad del movimiento en su forma clásica fue resuelto por Liapunov en 1892 y, por cierto, en una forma completamente satisfactoria. Liapunov considera una función V, hoy llamada función de Liapunov, que generaliza la energía potencial del Teorema de Lagrange, demostrando que bajo ciertas condiciones,el punto de mínimo de esa función es una solución estable o "equilibrio" del sistema. El núcleo del Método Directo de Liapunov está constituido por tres teoremas: sobre estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad, respectivamente, cuyas demostraciones son relativamente fáciles, y se basan en el uso de la función V y de su derivada a lo largo de las soluciones del sistema.

Durante 30 ó 40 años los trabajos de Liapunov apenas si tuvieron continuadores, pero a partir de la década del 40 se produce un desarrollo cada día más vertiginoso en un gran número de temas originados o relacionados con los métodos de Liapunov y la teoría de la estabilidad, y se reconoce cada vez más su importancia teórica y práctica , tanto en la ingeniería como en otras ramas de las ciencias aplicadas.

En la disertación de Liapunov (la memoria de que hablamos es su Tesis Doctoral) es ya importante la misma definición de estabilidad, que se introduce por primera vez con rigor matemático. Esta noción probablemente es la que más diversas acepciones tiene en toda la Matemática. Después de los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica introducidas por Liapunov, aparecen la estabilidad uniforme , asintótica uniforme, exponencial, equiasintótica, global, cuasi-asintótica, y muchas otras, así como sus combinaciones, como la estabilidad asintótica uniforme global o la cuasi uniformemente asintótica. Además se estudian conceptos relacionados como la estabilidad segun Poisson y otros tipos de acotación. Considérese además que estas definiciones corresponden a cierta "clase" de estabilidad: la estabilidad respecto a perturbaciones instantáneas. En cuanto a perturbaciones "permanentes" o "de acción continuada" (Duboshin) existen la estabilidad total, la integral, la estabilidad en media, etc. Para estudiar los movimientos periódicos se utiliza la estabilidad orbital (Poincaré). Posteriormente se han introducido la estabilidad eventual, la estabilidad práctica, los distintos tipos de estabilidad "en variaciones", la estabilidad absoluta (para sistemas de control), la estabilidad respecto a una función (Corne), la estabilidad de conjuntos, las estabilidades L^p, la estabilidad parcial (Rumiántsev), la estabilidad relativa, y muchas otras.

Los prefijos y combinaciones de palabras no son ni con mucho suficientes, y llega a hacerse necesario numerar las definiciones. Se comprende que haya existido una enorme proliferación de trabajos, y al mismo tiempo, esfuerzos encaminados a lograr regularidad en ese caos de conceptos y de terminologías.

Uno de los primeros intentos en tal sentido los realiza Massera [77] aunque reconoce que considera sólo una parte de los conceptos - (aparte de que en esa fecha aún eran relativamente pocos). En ese trabajo, plantea la necesidad de considerar también perturbaciones en el flujo del tiempo e introduce distintas topologías en el espacio de los "relojes" (funciones de $[0,+\infty)$ en $[0,+\infty)$; estas ideas no se han desarrollado posteriormente. Massera argumenta su opinión de que no debe existir un concepto de estabilidad óptimo y que en cada situa - ción debe utilizarse uno que corresponda no sólo el fenómeno que se estudie, sino al punto de vista que se adopte. Hoy en día se mantie ne la opinión de que es efectivamente así.

Otros intentos de crear una teoría unificada han sido realizados por Movchan, Gilbert y Knops, etc., y sobre todo por Hahn [49] donde se establecen unas 80 definiciones de conceptos relacionados con la estabilidad. En [26] mediante el uso de cuantificadores, se efectuá una división en estabilidad de Liapunov (19 de cuyos tipos se refie - ren con la nomenclatura en uso) y de Poisson (se mencionan 9 nombres) y se establecen propiedades relativas a la comparación entre los ti - pos de estabilidad. Otro empeño bastante fructífero que continúa al anterior es [44] (aquí llegan a considerarse formalmente 184,320 con ceptos diferentes).

En resumen, no puede decirse, hasta el momento, si algún tipo de estabilidad es más importante que otros. No obstante, juzgando por las aplicaciones y la frecuencia de su estudio, podemos pensar que la estabilidad asintótica y la global, consideradas en este trabajo, se encuentran entre las más importantes.

Para el análisis de la estabilidad de los sistemas no lineales se puede utilizar en determinados casos el método de la primera aproximación (que históricamente ha jugado un papel relevante). Pero el único método general que se aplica a sistemas no lineales es el Segundo Método de Liapunov, que presenta ventajas ostensibles.

En el gran desarrollo que ha tenido este método y la enorme proliferación de trabajos destinados a demostrar la estabilidad bajo condiciones menos restrictivas que las planteadas originalmente por su creador, pueden distinguirse dos enfoques fundamentales: el que utiliza el llamado Principio de Comparación cuyos comienzos deben buscarse en los trabajos de Chaplyguin, Kamke, Wazevski y A. Stokes y que fue desarrollado fundamentalmente por Corduneanu [32], [33], [35] y extendido por Lakhsmikantem, Leela, Matrosov, Peiffer, Rouché, etc. y el de trabajar directamente modificando los mismos teoremas e intentando rebajar hipótesis. Por ejemplo, se trata de que V no sea definida positiva, sino solamente no negativa, que V' no sea definida negativa, que V no sea diferenciable, etc. Todo esto, por supuesto, tiene su fundamento en las necesidades de la práctica. En esta línea se inscriben los resultados de los capítulos I y II del presente trabajo.

Este enfoque ha sido el más trabajado, y resultaría extremadamente engorroso relatar siquiera los resultados más importantes y la situación actual en todos los aspectos relacionados con nuestros resultados. Digamos, no obstante, que en los últimos tiempos la teoría clásica de Liapunov se ha desarrollado consideramente para los sistemas autónomos, pero mucho menos para los sistemas no autónomos (que en este trabajo se consideran), y el encontrar funciones de Liapunov que satisfagan tales o cuales hipótesis de algún teorema que dé cierto tipo de estabilidad es aún un serio problema, y por eso es sumamente conveniente tener criterios que exijan menos condiciones a las funciones de Liapunov.

En los resultados que se obtienen en los capítulos I y II, la idea común es que se exige a V' determinada mayoración solamente en cierto conjunto y no en toda una vecindad de la situación trivial,con lo cual no se le exige que sea definida negativa y ni siquiera no positiva. Tampoco se exige a la función V que tenga cota superior infinitamente pequeña (ver observación 1.4). Esto hace que los criterios sean muy flexibles y relativamente fáciles de aplicar en casos en que los criterios clásicos no funcionan, como se puede comprobar en los ejemplos que planteamos. En particular, pueden aplicarse a casos en que la región de atracción es asintóticamente contractiva [43]. Los resultados de los capítulos I y II generalizan teoremas clásicos como los de Liapunov, Malkin y Krasovskii, y otros más recientes como el de Haddock [46].

En los capítulos III y IV se utilizan también funciones de Liapunov, pero con el objetivo de demostrar la existencia de variedades invariantes para ciertos sistemas diferenciales. Esta propiedad cualitativa, así como el estudio del comportamiento de las trayectorias en las cercanías de esos conjuntos excepcionales, ha sido un tema de estudio de primera magnitud en la Teoría Cualitativa desde los tiempos de Poincaré, quien introdujo el concepto de variedad invariante (en su caso, curva invariante). Los primeros resultados sobre Estabilidad Condicional se deben a Liapunov (bajo condiciones de analiticidad) y Poincaré. Perron estudió casos no analíticos ni lineales, pero aún bajo condiciones muy restrictivas. No obstante, la versión usual del teorema correspondiente [18] [31] se conoce como Teorema de Perron. Pliss [91] demuestra la existencia de una variedad invariante para un sistema autónomo con parte principal lineal, y Monakov [85] [86] desarrolla el trabajo de Pliss, analizando el caso en que la parte principal del miembro derecho del sistema está constituida por formas de grados mayores que 1 (y el miembro derecho es continuamente diferenciable). Otros resultados, también con ciertas particularizaciones se dan en [15] y [37] . Nosotros consideramos en el Capítulo III una situación más general que en todos estos casos, en la cual la parte principal no es lineal ni homogénea, y además hay dependencia del tiempo.

Respecto al Capítulo IV, para sistemas con órbitas periódicas se han estudiado sobre todo perturbaciones que son también periódicas, o dependientes de un parámetro pequeño ([92], [25], etc.) y no conocemos de antecedentes en la literatura sobre resultados semejantes al que se plantea.

Los teoremas principales de los capítulos III y IV se demuestran utilizando el principio de Wacevsky que hoy en día constituye una herramienta importante en la Teoría Cualitativa. Fue establecido inicialmente para ecuaciones ordinarias con unicidad, y se extendió después a ecuaciones sin unicidad, y también a ecuaciones diferenciales generalizadas. Además, se ha aplicado a resultados de inestabilidad, de continuación de soluciones, etc. El procedimiento que introducimos para demostrar los resultados fundamentales de los capítulos III y IV tiene su antecedente en ideas utilizadas en [37] y [16] .

En lo que sigue, los números que aparecen a la derecha en una línea indican, como es usual, la fórmula, desigualdad, etc. que aparece en esa línea; pero también, según el contexto, puede representar la proposición que comienza después del último punto ortográfico y termina en la fórmula o desigualdad en cuestión. Por ejemplo, en la Proposición 2.2, donde dice "si se satisfacen... (2.7)..." el número (2.7) equivale a la proposición que empieza con "Dados $t_o \geq a$..." y termina con la desigualdad que está en la línea de (2.7).

CAPITULO I

CONDICIONES SUFICIENTES DE ESTABILIDAD

§0. INTRODUCCION.

En este capítulo se obtienen cuatro teoremas que dan condiciones suficientes de estabilidad, equiestabilidad asintótica, estabilidad asintótica y estabilidad asintótica global, respectivamente, que generalizan resultados conocidos (véase Observación 1.6). La idea básica, común a todos los resultados, está relacionada con el conjunto sobre el cual se exigen condiciones a la derivada de la función de Liapunov con que se trabaja. Se plantean ejemplos que aclaran los resultados y sus relaciones con otros ya conocidos.

§0. NOTACIONES Y DEFINICIONES BASICAS.

Consideraremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y) \qquad (1.1)$$

donde $y \in E^n$ y $Y:H_{a,h} \to E^n$ es un campo vectorial continuo.

$$H_{a,h} = \{(t,y) \in E \times E^n : t \geq a, \ |y| < h \}.$$

$a \in E$ y $h > 0$ son números reales (puede ser también $h = +\infty$). E^n es el espacio real n-dimensional. $|.|$ representa cualquier norma en E^n ; $E = E^1$.

Se supone que en $H_{a,h}$ la función $Y(t,y)$ satisface alguna condición suficiente para la unidad de las soluciones de (1.1) por cada punto, es decir, para cada $(t_o,y_o) \in H_{a,h}$ existe una única solución $y(t,y_o, t_o)$ que satisface $y(t_o,y_o,t_o) = y_o$ y está definida en algún intervalo maximal $t_o \leq t < t_1$ a la derecha de t_o. El valor t_1 se caracteriza porque o es $+\infty$, o $|y(t,t_o,y_o)| \to h$ si $t \to t_1^-$.

Si no hay lugar a dudas, pondremos $H_{a,h}$=H, y $y(t,t_o,y_o)$ y(t). S denotará al conjunto de las soluciones de (1.1). La clausura, el interior y la frontera de un conjunto A se denotan, respectivamente, por $\overline{A}$, $\overset{o}{A}$, F_rA.

Es conocido que de la unicidad se infiere la continuidad de la función $y(t,y_o,t_o)$ respecto a todas sus variables. Además, de la existencia y la unicidad se deduce la siguiente propiedad, denominada "continuidad integral" ([18], [100]).

"Dada $\phi(t) \varepsilon S$ y dados ξ, T y t_o, $\xi > 0$ y $T \geq t_o \geq a$, existe $\delta > 0$ tal que si $y(t) \varepsilon S$ y $|y(t_o)-\phi(t_o)| < \delta$, entonces para todo $t \varepsilon [t_o,T]$ se tiene que $|y(t) - \phi(t)| < \xi$".

Supondremos que para todo $t \geq a$ es $Y(t,0) \equiv 0$, lo cual significa que el sistema (1,1) posee la solución trivial $y \equiv 0$ (vector nulo de E^n).

Si M es una matriz, $|M|$ denotará su norma:

$$|M| = \sup\{ \frac{|Mx|}{|x|} : x \varepsilon E^n\}$$

o equivalentemente; M es la raíz cuadrada del mayor valor propio de M^tM. M^t es la transpuesta de M. I es la matriz identidad en E^n.

DEFINICION 1.1.

Diremos que la función V(t,y) definida en H y con valores en E es definida positiva, si existe una función $w:\{y \varepsilon E^n;\ |y| < h\} \to E$ continua tal que para $(t,y) \varepsilon H$ es $V(t,y) \geq W(y) > 0$ si $y \neq 0$, $V(t,0)=0$. A W la llamaremos función asociada a V(t,y).

En lo que sigue, las funciones V(t,y) serán consideradas a lo largo de las trayectorias del sistema, y pondremos para una solución $y(t,y_o,t_o)$ $\overline{V}(t,y_o,t_o) = V(t,y(t,y_o,t_o))$ o simplemente V(t). Si existe la derivada total $\frac{dV(t)}{dt}$ se dice que la función V(t,y) es dife -

renciable respecto al sistema (1.1) a lo largo de la trayectoria en cuestión. Si esta derivada existe para cualquier trayectoria en los puntos de H, se dice simplemente que V es diferenciable respecto al sistema. Para trabajar con hipótesis menos restrictivas, suele asumirse la existencia de solamente uno de los números derivados de $V(t)$. Consideraremos la derivada superior por la derecha

$$D^+ V(t) = \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(t+\tau)-V(t)}{\tau} . \tag{1.2}$$

Si $V(t,y)$ satisface localmente una condición de Lipschitz en H, puede probarse que

$$D^+ V(t) = \limsup_{h \to 0} \frac{1}{h} \{V(t+h, y+h\, Y(t,y))-V(t,y)\} \tag{1.3}$$

(véase, por ejemplo |100|). Y si $V(t,y) \varepsilon C^1(H)$ entonces es evidente que

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(t,y).Y(t,y) \tag{1.4}$$

$\frac{\partial V}{\partial y}(t,y)$ es el gradiente de la función $V(t,y)$ respecto a $(y_1,\ldots,y_n)=$ $= y$. "." denota el producto escalar en E^n.

De este modo, en ambos casos (V localmente lipschitziana o continuamente diferenciable) puede calcularse $D^+V(t)$ ó $\frac{aV(t)}{dt}$ a partir de $V(t,y)$ y del miembro derecho de (1.1) sin necesidad de utilizar las soluciones del sistema. Precisamente en esto consiste la ventaja del 2do. método de Liapunov, que por ello se llama también "directo".

DEFINICION 1.2.

Diremos que $V(t,y)$ es una función de Liapunov (pondremos $V(t,y) \varepsilon \mathcal{L}$) si $V(t,y)$ es definida positiva y continua en H y existe $D^{+}V(t)$ para cada solución $y(t)$ con $(t,y(t)) \varepsilon H$.

En lo que sigue denotaremos por $V'(t,y)$ a la derivada $D^{+}V(t)$ y también a $\frac{dV(t)}{dt}$ en caso de que exista.

Si A H la restricción $V'(t,y)\Big|_{A}$ significa que para $(\bar{t},\bar{y}) \varepsilon A$ se calcula (1.2) en $t=\bar{t}$ con $V(t) = V(t,\bar{y},\bar{t})$, o bien (1.3) ó (1.4) en $t=\bar{t}$, $y=\bar{y}$.

Las diferentes definiciones de estabilidad que aparecen en la literatura a veces tienen los mismos nombres y no son equivalentes (véase [26], [43] , [44], etc.) de modo que precisaremos las que vamos a utilizar. Se supone que el estado de equilibrio (solución trivial) de (1.1) es aislado, o sea, no existe $\bar{y} \neq 0$ con $|\bar{y}| < h$ tal que $Y(t,\bar{y}) = 0$ para $t \geq t_o$.

DEFINICION 1.3.

El estado de equilibrio $y=0$ es

(a) *ESTABLE* si:

Dados $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ existe $\delta = \delta(\xi,t_o) > 0$ tal que si $|y_o| < \delta$ entonces para $t \geq t_o$ es $y(t,y_o,t_o)| < \xi$.

(b) *ATRACTIVO* si:

Para $t_o \geq a$ existe $\delta = \delta(t_o) > 0$ tal que dados $\xi > 0$ y y_o con $|y_o| < \delta$ existe $\tau = \tau\ (\xi, t_o, y_o)$ que verifica: si $t \geq t_o + \tau$ entonces $|y(t, y_o, t_o)| < \xi$.

Con otras palabras: dado $t_o \geq a$ existe $\delta = \delta(t_o) > 0$ tal que si $|y_o| < \delta$, entonces $\lim_{t \to +\infty} y(t, y_o, t_o) = 0$.

(c) *ASINTOTICAMENTE ESTABLE* si:

Es estable y atractivo.

(d) *EQUASINTOTICAMENTE ESTABLE* si:

Dado $t_o \geq a$ existe $\delta = \delta(t_o) > 0$ y dado $\xi > 0$ existe un valor $\tau = \tau\ (\xi, t_o)$ tal que si $|y_o| < \delta$ y $t \geq t_o + \tau$, entonces $|y(t, y_o, t_o)| < \xi$. Más brevemente: es equasintóticamente estable si es estable y atractivo y además el límite en (b) es uniforme respecto de y_o para $|y_o| < \delta$.

(e) *GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE ESTABLE* si:

Es estable, $h = +\infty$ y dados $t_o \geq a$ y y_o arbitrario, se tiene que $|y(t, y_o, t_o)| \to 0$ si $t \to +\infty$.

En estas definiciones se sobrentiende que la solución $y(t, y_o, t_o)$ está definida para todo $t \geq t_o$. Las definiciones originales de "estable" y "asintóticamente estable" dadas por Liapunov [70] consideran el instante inicial t_o fijo. Aquí se plantea el caso más general en que t_o es arbitrario en el intervalo $[a, +\infty)$ como en [40], [96], [93], etc. Tomando la definición de Liapunov, puede comprobarse que si una solución es estable respecto a un instante inicial t_o, lo es respecto a cualquier otro instante inicial $t'_o > t_o$, y lo mismo vale para la estabilidad asintótica, pero el número δ depende de t_o y esto es importante en las aplicaciones. Es interesante señalar que las propiedades "estables" y "atractivo" son independientes; la combinación "inestable (que significa no estable) y atractivo" puede darse, incluso en sistemas autónomos de segundo orden, como muestra un ejemplo construido por Vinograd [104]. La definición de equiasintóticamente estable es introducida por Massera en [78]. La estabilidad asintótica global fue estudiada por Barbashin y Krasovskii [11].

Un análisis muy cuidadoso de la definición de estabilidad en relación con la uniformidad aparece en [43] donde también se analiza la importancia de tomar el instante inicial t_o arbitrario en cierto conjunto.

§2. CONDICIONES SUFICIENTES DE ESTABILIDAD Y ESTABILIDAD ASINTOTICA.

Consideremos la siguiente proposición.

(α) Dados $t_o \geq a$ y $\theta > 0$ existe $\delta = \delta(\theta, t_o) > 0$ tal que si $y(t, y_o, t_o) \in S$ y $|y_o| < \delta$ entonces para $t \geq t_o$ es $V(t) < \theta$.

LEMA 1.1.

Si $V(t,y)$ es definida positiva y se satisface (α), entonces la solución trivial de (1.1) es estable.

DEMOSTRACION.

(Supongamos (α) cierta y sean $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ ($\xi < h$). Sea $W(y)$ la función asociada a $V(t,y)$ y tomemos

$$\theta_\xi = \inf\{W(y): |y| = \xi\} > 0 . \tag{1.5}$$

Para $\theta = \theta_\xi$ consideremos δ determinado por la condición (α) y que además cumpla $\delta < \xi$. Si $y(t,y_o,t_o) \in S$ y $|y_o| < \delta$, necesariamente para $t \geq t_o$ tiene que ser $|y(t)| < \xi$ ya que si para algún valor $t = t_1 > t_o$ es $|y(t_1)| = \xi$ tendríamos según (1.5) que $V(t_1) \geq W(y(t_1)) \geq \geq \theta\ \xi$ y esto contradice (α).

La demostración de este lema, así como la del Lema 1.2, están contenidas en las de los correspondientes teoremas de Liapunov [18] ; los exponemos para mayor comodidad y para destacar que en los mismos no se impone ninguna condición sobre $V'(t,y)$. Sea ahora la condición siguiente:

A. Existe $V(t,y) \in$ tal que dados $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ existen $T_\xi \geq t_o$ y una función $\ell_\xi(t) \in C^1[T_\xi,+\infty)$ que verifican

$$\ell_\xi(t) > 0; \ \lim_{t\to+\infty} \sup \ell_\xi(t) \leq \xi \ V'(t,y)\Big|_{R_\xi} < \ell'_\xi(t) \tag{1.6}$$

donde $R_\xi = \{(t,y) \in H: t \geq T_\xi, V(t,y) = \ell_\xi(t)\}$.

TEOREMA 1.1.

Si se cumple la condición A, la solución trivial de (1.1) es estable.

De acuerdo con el Lema 1.1 basta probar la condición (α). Sean $t_o \geq a$ y $\theta > 0$, y consideremos la hipótesis A con $\xi = \theta/_2$ y correspondientes $T_{\theta/2}$ y $\ell_{\theta/2}(t)$. Como $V(t,y)$ es uniformemente continua en $[t_o, T_{\theta/2}] \times \{|y| < h\}$ y $V(t,0) \equiv 0$ tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|y| \leq \delta_1$ entonces

$$\text{para} \quad t \in [t_o, T_{\theta/2}], \; V(t,y) < \ell_{\theta/2}(T_{\theta/2}) . \tag{1.7}$$

Aplicando la continuidad integral en $[t_o, T_{\theta/2}]$, para δ_1 dado existe $\delta > 0$ tal que si $y(t) \in S$ y $|y(t_o)| < \delta_1$ entonces

$$\text{para} \quad t \in [t_o, T_{\theta/2}] \text{ es } |y(t)| < \delta_1 . \tag{1.8}$$

Combinando estas afirmaciones concluimos que existe cierto $\delta > 0$ para el cual, si $y(t) \in S$ y $|y(t_o)| < \delta$ se tiene que

$$\text{para} \quad t \in |t_o, T_{\theta/2}] \; , \; V(t) < \ell_{\theta/2} (T_{\theta/2}). \tag{1.9}$$

En particular, $V(T_{\theta/2}) < \ell_{\theta/2} (T_{\theta/2})$. Teniendo en cuenta (1.6) la curva $(t, \bar{V}(t, y_o, t_o))$ no puede salirse de la región

$$\{t \geq T_{\theta/2}, \; 0 \leq V(t) < \ell_{\theta/2}(t)\}.$$

De este modo, $\limsup_{t \to +\infty} V(t) \leq \theta/2$ y por lo tanto existe $T \geq t_o$ tal que para $t \geq T$ es $V(t) < \theta$. Ese valor de T es común para todas las soluciones $y(t)$ con $|y(t_o)| < \delta$. Aplicando la continuidad integral en $[t_o, T]$, del mismo modo que se obtuvo (1.9) se comprueba que puede tomarse δ de modo que para $t \in [t_o, T]$ también se tenga $V(t) < \theta$. Queda demostrada la condición (α).

COROLARIO 1.1.

Supongamos que para el sistema (1.1) se satisface la condición siguiente

A_1. Existe $V(t,y) \in \mathcal{L}$ tal que para $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ dados, existe $T_\xi \geq t_o$ tal que

$$V'(t,y)\Big|_{Q_\xi} < 0 \tag{1.10}$$

donde $Q_\xi = \{(t,y) \in H:\ t \geq T_\xi,\ V(t,y) = \xi\}$.

Entonces la solución trivial de (1.1) es estable.

DEMOSTRACION.

Se satisface la hipótesis A con $\ell_\xi(t) \equiv \xi$.

OBSERVACION 1.1.

De la demostración del Teorema 1.1 se desprende que la condición A puede ser modificada tomando en (1.6) el signo $\leq$ en la última desigualdad, pero considerando una región del tipo

$$R_\xi^* = \{(t,y) \in H:\ t \geq T\ ,\ \ell_\xi(t) \leq V(t,y) \leq \ell_\xi(t) + \rho(t)\}$$

con $\rho(t) > 0$. En igual sentido puede modificarse el corolario 1.1.

OBSERVACION 1.2.

Para la demostración del Teorema 1.1 no interesa que sea $R_\xi \neq \emptyset$. Lo mismo es válido para los conjuntos R_o y D_ξ que aparecen en los teoremas 1.2 y 1.3. Sin embargo, puede comprobarse que si ξ es suficientemente pequeño y T_ξ suficientemente grande, estos conjuntos son no vacíos. (ver Apéndice I.1).

Consideremos ahora la condición siguiente:

(β) Dado $t_o \geq a$ existe $\delta = \delta(t_o) > 0$ tal que si $y(t,y_o,t_o) \in S$ y $|y_o| < \delta$, entonces $V(t) \to 0$ si $t \to +\infty$.

LEMA 1.2.

Si $V(t,y)$ es definida positiva y satisface la condición (β) el equilibrio $y=0$ es atractivo.

DEMOSTRACION.

Supongamos (β) y sean $t_o \geq a$ y el valor δ dado por (β). Sea la solución $y(t,y_o,t_o)$ con $|y_o| < \delta$ y tomemos $\xi > 0$ y θ_ξ como en (1.5). De acuerdo con (β) sabemos que existe $\tau = \tau(\theta_\xi,\ t_o,y_o) = \tau(\xi,t_o,y_o)$ para el cual se tiene que si $t \geq t_o + \tau$, es $V(t) < \theta_\xi$. Como en el Lema 1.1 esto implica que si $t \geq t_o + \tau$, es $|y(t)| < \xi$. Queda probado que el equilibrio de (1.1) es atractivo.

OBSERVACION 1.3.

Si en la condición (β) se considera que $V(t) \underset{\to}{\to} 0$ si $t \to +\infty$

respecto de y_o con $|y_o| \leq \delta$, entonces en el Lema 1.2 se obtiene que también $y(t) \underset{\to}{\to} 0$, ya que en ese caso τ no depende de y_o.

Consideremos ahora la condición siguiente:

B. Existe $V(t,y) \in \mathcal{L}$ tal que dado $t_o \geq a$ existen un número $T \geq t_o$ y una función $\ell(t) \in C^1 [T,+\infty)$ tales que

$$\ell(t) > 0 \quad \lim_{t\to+\infty} \ell(t) = 0 \quad V'(t,y)\Big|_{R_o} < \ell'(t) \tag{1.11}$$

donde $R_o = \{(t,y) \in H: t \geq T, V(t,y) = \ell(t)\}$.

TEOREMA 1.2.

Si se satisface la condición B, la solución trivial de (1.1) es equiasintóticamente estable.

DEMOSTRACION.

Como la condición B es más fuerte que A, por el Teorema 1.1 la solución trivial de (1.1) es estable. Sea $t_o \geq a$. Consideremos $T \geq t_o$ dado por la condición B y tomemos δ de modo que si $y(t,y_o,t_o) \in$ $\in S$ y $|y_o| < \delta$ se tenga que $V(t) < \ell(t)$ para $t_o \leq t \leq T$ (esto se hace del mismo modo en que se obtuvo (1.9). De acuerdo con (1.11)es $\bar{V}(t,y_o,t_o) < \ell(t)$ para $t \geq T$. Entonces $\lim_{t\to+\infty} \bar{V}(t,y_o,t_o) = 0$ y el límite es uniforme respecto a y_o para $|y_o| \leq \delta$. Basta ahora aplicar el Lema 1.2 y la Observación 1.3.

EJEMPLO 1.1.

Sea el sistema de orden n

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y + (1 + \exp(t)) \; |y|^2 \; y$$

Tratemos de determinar valores de α para los cuales la solución trivial del sistema es equasintóticamente estable. Consideremos $V(t,y) = |y|^2$ y $\ell(t) = \frac{\beta}{1+\exp(t)}$ con $\beta > 0$. Se tiene que para $\beta < \alpha$ y $\alpha > 1/2$ es

$$V'\Big|_{R_o} < \ell'(t) \quad .$$

Por lo tanto, si $\alpha > 1/2$ según el Teorema 1.2 hay equiestabilidad asintótica. Este ejemplo se analiza en [43] donde se obtienen los mismos valores de α pero se concluye solo estabilidad asintótica.

OBSERVACION 1.4.

Ha sido utilizada por Liapunov en su teorema sobre la estabilidad asintótica, y considerada en [75] ,[78], [49], [48], [109], etc., la condición sobre V que Liapunov llamó de "cota superior infinitamente pequeña", también denominada por otros autores "V es decreciente" o " es uniformemente pequeña". Esta condición es la siguiente: Dado $\xi > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| \leq \delta$ y $t \geq t_o$ entonces $V(t,y) \leq \xi$ (Es decir, $V(t,y) \to 0$ si $|y| \to 0$, uniformemente respecto de $t \geq t_o$). Las hipótesis del Teoremas 1.2 no implican que $V(t,y)$ tenga cota superior infinitamente pequeña, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.

Sea la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2} \quad t \geq t_o \geq a > \sqrt{2}$$

La solución general es $x(t) = x_o \left[\exp - \frac{1}{4}(t^2 - t_o^2)\right]$ por lo que la solución trivial es equiasintóticamente estable.

Sean $V(t,x) = tx^2$ y $\ell(t) = \frac{1}{t}$. Se tiene que

$$V'(t,x)\Big|_{R_o} = \frac{1}{t^2} - 1 < -\frac{1}{t^2} = \ell'(t)$$

de modo que se cumple la condición B para cualquier $T \quad t_o$ y evidentemente, $V(t,x)$ no tiene cota superior infinitamente pequeña. Respecto al Teorema 1.2 véanse también apéndices I.3 y I.4.

TEOREMA 1.3.

La solución trivial de (1.1) es asintóticamente estable si se satisface la siguiente condición:

C. Existe $V(t,y) \in \mathcal{L}$ y para $t_o \geq a$ existe un número $k < 0$ tal que dado $\xi > 0$ existen $T_\xi \geq t_o$ ($T_\xi \to +\infty$ si $\xi \to 0$) y una función $h_\xi(t) \in C[T_\xi, +\infty)$ que verifica

$$h_\xi(t) < 0 \qquad \int_{T_\xi}^{+\infty} h_\xi(t)\,dt \leq k \tag{1.12}$$

y además,

$$V'(t,y)\Big|_{D_\xi} \leq h_\xi(t) \qquad (1.13)$$

donde $D_\xi = \{(t,y) \in H\colon\ t \geq T_\xi,\ V(t,y) \geq \xi\}$.

DEMOSTRACION.

La estabilidad es inmediata a partir del Corolario 1.1. Utilizando el Lema 1.2 es suficiente probar que para $|y_o|$ pequeño se tiene que $V(t) \to 0$ si $t \to +\infty$.

Notemos que la condición C implica la condición A. (En efecto: suponiendo C verdadera, dados t_o y ξ tomamos T_ξ de la condición C y $\ell_\xi(t) \equiv \xi$, con lo cual se verifica A).

Según la demostración del Teorema 1.1, se satisface la condición (α) y podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que si $y(t,y_o,t_o) \in S$ y $|y_o| < \delta$, se tiene que

$$\text{para } t \geq t_o,\quad V(t) \leq -\frac{k}{2}\ . \qquad (1.14)$$

Supongamos por el absurdo que

$$\lim_{t\to+\infty} \sup\, V(t) = \Delta > 0\ . \qquad (1.15)$$

Hay tres posibilidades:

(1) Existe $T \geq t_o$ tal que para $t \geq T$ es $V(t) > \frac{\Delta}{2}$. Tomemos $\xi < \frac{\Delta}{2}$ y suficientemente pequeño de modo que sea $T_\xi \geq T$. Entonces para $t \geq T_\xi$ $(t,y(t) \in D_\xi$. Integrando en (1.13) sobre $[T_\xi,t]$ con

$t > T_\xi$ tenemos

$$V(t) \leq V(T_\xi) + \int_{T_\xi} h_\xi(s)ds \ . \qquad (1.16)$$

De acuerdo con (1.12), para t suficientemente grande es

$$\int_{T_\xi}^{t} h_\xi(s)ds < k/2$$

y como $V(T_\xi) \leq - k(2)$ según (1.14) quedaría que para esos valores de T es $V(t) < 0$ lo que contradice la posibilidad de $V(t,y)$.

(2) Existe $T \geq t_o$ tal que para $t \geq T$ es $V(t) \leq \Delta/2$. Esto es evidentemente imposible, pues se supone (1.15).

(3) Existen sucesiones $\{t_m\}_{m\geq 1}$ y $\{\tau_m\}_{m\geq 1}$ crecientes a $+\infty$ que satisfacen:

$$t_m < \tau_m < t_{m+1}, \ V(t_m) \leq \Delta/2, \ V(\tau_m) > \Delta/2 \ . \qquad (1.17)$$

Si tomamos $\xi = \Delta/2$ y m suficientemente grande de modo que sea $t_m > T_{\Delta/2}$ tendremos, en virtud de (1.13) y de que $V(t_m) \leq \Delta/2$, que la curva $(t,V(t))$ no puede salirse de la región $\{t \geq t_m, V(t) \leq \Delta/2\}$ y eso contradice la última desigualdad de (1.17). El teorema queda demostrado.

OBSERVACION 1.5.

En la condición C se concluye el caso en que para todo ξ sea

$$\int_{T_\xi}^{+\infty} h_\xi(t)dt = -\infty$$

y entonces k puede ser cualquier constante negativa, e incluso $-\infty$ (modificando ligeramente la demostración en el Teorema 1.3). En este caso no hay que asumir que $T_\xi \to +\infty$ si $\xi \to 0$.

OBSERVACION 1.6.

La condición C tampoco implica que V(t,y) tenga cota superior infinitamente pequeña. Esto puede verse utilizando el mismo ejemplo 1.2 con a 2, $V(t,x) = tx^2$, $h_\xi(t) = -\xi\, t/2$. $T_\xi \geq t_o$ arbitrario y $k = -\infty$. Resulta

$$V'(t,x)\Big|_{D_\xi} \leq \xi\left(\frac{1}{t} - t\right) < h_\xi(t).$$

Los Teoremas 1.1 a 1.3 generalizan (en el sentido de que tienen las hipótesis más débiles) los teoremas clásicos de Liapunov y otros resultados posteriores. Por ejemplo, puede demostrarse directamente que las hipótesis de los teoremas de Malkin [75] (el cual da sólo estabilidad) Hhn ([48]) Haddock ([46]) etc. implican la condición C (ver Apéndice I.2).

Otra razón que hace pensar que debe ser difícil debilitar la hipótesis del Teorema 1.3 es la siguiente: como se sabe, la estabilidad asintótica y la estabilidad equiasintótica son propiedad muy cercana (si el sistema es lineal, autónomo, periódico o de dimensión uno, estas propiedades equivalen según demostró Massera en [78]); pues bien, la condición C no implica la estabilidad equiasintótica , como lo muestra el siguiente ejemplo(el sistema está tomado de [96]).

EJEMPLO 1.3.

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{-y^2}{re^t} - x \\[2ex] \dot{y} = \dfrac{xye^t}{r} & \qquad t \geq t_o \geq a \geq 3 \end{cases}$$

donde $r^2 = x^2\, e^{2t} + y^2$, $r > 0$.

Mediante el cambio de variables dependientes

$$x = r\, e^{-t} \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

el sistema queda en la forma

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

y a partir de aquí puede verse que la solución trivial es asintótica mente estable, pero no equiasintóticamente estable.

Puede comprobarse que se satisface la condición C para

$$V(x,y,t) = r^2\, f(t) \quad \text{y} \quad h_\xi(t) = \frac{\xi f'(t)}{f(t)}$$

donde

$$f(t) = 1 + \frac{\ell n t}{t^p} \quad \text{con} \quad 0 < p < 1.$$

TEOREMA 1.4.

Sea el sistema (1.1) con $h = +\infty$ y supongamos que se cumpla la condición C con $k = -\infty$. Entonces la solución trivial de (1.1) es globalmente asintóticamente estable.

DEMOSTRACION.

Sean $t_o \geq a$ y $y_o \in E^n$ arbitrarios, y consideremos la solución $y(t,y_o,t_o)$ y $V(t) = V(t,y(t,y_o,t_o))$. Probaremos que $\lim_{t\to+\infty} V(t) = 0$. Supongamos lo contrario, es decir:

Existe $\delta > 0$ tal que para cualquier T existe $t \geq T$ con $V(t) \geq \delta$.

Se tienen dos posibilidades:

(a) Existe T_o tal que para $t \geq t_o$ es $V(t) \geq \delta$.

En este caso, tomamos el valor T_δ de la condición C, considerando además $T_\delta \geq T_o$. Utilizando (1.13) e integrando en $[T_\delta, t]$ con $t \geq T_\delta$ tenemos

$$V(t)-V(T_\delta) \leq \int_{T_\delta}^{t} h_\delta(s)\,ds$$

y para t suficientemente grande, se contradice que sea $V(t) > 0$.

(b) Existen sucesiones $\{t_m\}_{m\geq 1}$ y $\{\tau_m\}_{m\geq 1}$ crecientes a $+\infty$ que satisfacen, para todo $m \geq 1$:

$$t_m < \tau_m < t_{m+1} \qquad V(t_m) \leq \delta \qquad V(\tau_m) > \delta.$$

Tomemos T_δ de la condición C y m suficientemente grande de modo que sea $t_m \geq T_\delta$. Entonces la curva $(t,V(t))$ no puede salirse de la región $\{t \geq t_m,\ V(t) \leq \delta\}$ en virtud de (1.13). Esto contradice que sea $V(\tau_m) > \delta$.

Queda demostrado que $\lim_{t\to+\infty} V(t) = 0$. En virtud de la demostración del Lema 1.2 (válida también para el caso $\delta = +\infty$) se tiene que $|y(t)| \to 0$ si $t \to +\infty$.

En el capítulo siguiente, veremos aplicaciones de estos resultados en los cuales los teoremas de Liapunov no parecen ser aplicables, por lo menos de una forma razonablemente sencilla.

Consideremos la siguiente ecuación.

EJEMPLO 1.4.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y}{t+1} \qquad y \in E \qquad t_o \geq a > -1$$

Es una sencilla ecuación lineal, cuya solución general es $y(t)=\frac{y_o(t_o+1)}{t+1}$ y obviamente, la solución trivial es equiasintóticamente estable.

Este ejemplo es considerado en [78] donde se demuestra que no existe una función V que satisfaga las hipótesis del teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica, y ni siquiera las hipótesis mas débiles del teorema de estabilidad de Malkin [75] (es decir, tenemos la certeza de que esos teoremas no son aplicables). Si tomamos $V(t,y) = y^2$ y $\ell(t) = t^{-\alpha}$ con $0 < \alpha < 2$ se comprueba fácilmente que es aplicable el Teorema 1.2. También pueden aplicarse los teoremas 1.3 y 1.4 tomando cualquier T_ξ (que tienda a $+\infty$ en el caso del Teorema 1.3) y $h_\xi(t) = \frac{-2\varepsilon}{t+1}$.

CAPITULO II

ALGUNAS APLICACIONES Y EJEMPLOS

§0. INTRODUCCION.

Utilizando los resultados del capítulo anterior se analizan tres tipos de sistemas y se obtienen proposiciones que dan condiciones suficientes para un tipo u otro de estabilidad, planteándose ejemplos concretos que destacan su importancia. En el análisis del tercer tipo de sistema se generaliza un conocido criterio de Krasovskii.

§1. EL SISTEMA $\frac{DY}{DT} = A(T)\ G(Y)-F(T,Y)$.

Sea el sistema

$$\frac{dy}{dt} = A(t)g(y)-f(t,y) \tag{2.1}$$

donde $y = (y_1,\ldots,y_n) \in E^n$, $g\colon E^n \to E^n$ y $f\colon [a,+\infty) \times E^n \to E^n$ $A(t)$ es una matriz cuadrada de orden n. Supondremos que $A(t)$, $g(y)$ y $f(t,y)$ son continuas y satisfacen alguna condición de unicidad. Supondremos también las condiciones siguientes:

$$|A(t)| \to 0 \quad \text{si} \quad t \to +\infty \tag{2.2}$$

$$f(t,0) = g(0) = 0 \qquad t \in [a,+\infty) \quad . \tag{2.3}$$

Dados $\xi > 0$ y $t_o \geq a$ existen $\alpha_\xi > 0$ y $T^\varepsilon \geq t_o$ tales que

$$y.f(t,y)\Big|_{S_\xi} > \alpha_\xi \tag{2.4}$$

donde $S_\xi = \{(t,y)\colon\ t \geq T^\xi\ ,\ |y|^2 = \xi\}$.

PROPOSICION 2.1.

Bajo las suposiciones anteriores, la solución trivial de (2.1) es estable.

DEMOSTRACION.

Consideremos la función $V(t,y) = |y|^2$. Sean $t_o \geq a$ y $\xi > 0$.

Tomemos un número

$$M_\xi \geq \max \{|g(y)| : |y|^2 = \xi\} \quad y \quad M_\xi > 0 \tag{2.5}$$

y de acuerdo con (2.2), un valor $T_1 \geq t_o$ tal que si $t \geq T_1$ entonces

$$|A(t)| < \frac{\alpha_\xi}{\sqrt{\xi}\, M_\xi} \tag{2.6}$$

y sea $T_\xi = \max \{T^\xi , T_1\}$. Si $Q_\xi = \{(t,y) : t \geq T_\xi , |y|^2 = \xi\}$ tenemos

$$\frac{1}{2} V'(t,y)\Big|_{Q_\xi} = [A(t)g(y)y - y.f(t,y)]\Big|_{Q_\xi} < \frac{\alpha_\xi}{\sqrt{\xi}\, M_\xi} \sqrt{\xi}\, M_\xi - \alpha_\xi = 0 \ .$$

Basta ahora aplicar el Teorema 1.1.

Para analizar la estabilidad asintótica consideremos las siguientes condiciones.

Dados $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ existen $\alpha_\xi > 0$ y $T_\xi \geq t_o$ tales que

$$y.f(t,y)\Big|_{D_\xi} \geq \alpha_\xi \tag{2.7}$$

donde

$$D_\xi = \{(t,y) : t \geq T_\xi , |y|^2 \geq \xi\} \ .$$

Dado $\xi > 0$ existe $B_\xi > 0$ tal que para $|y|^2 \geq \xi$ es

$$|y|\ |g(y)| \leq B_\xi \tag{2.8}$$

PROPOSICION 2.2.

Si se satisfacen (2.2), (2.3), (2.7) y (2.8) la solución trivial de (2.1) es globalmente asintóticamente estable.

DEMOSTRACION.

Sean $t_o \geq a$ y $V(t,y) = y^2$. Fijemos $\xi > 0$ y tomemos T_ξ de modo que si

$$t \geq T_\xi \ , |A(t)| \leq \frac{\alpha_\xi}{2B_\xi} \ .$$

Entonces

$$\frac{1}{2} V'(t,y)\Big|_{D_\xi} \leq - \frac{\alpha_\xi}{2}$$

y se cumplen las hipótesis del Teorema 1.4 con $h_\xi(t) = - \alpha_\xi$.

EJEMPLO 2.1.

Sea la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^3}{\ell n(t^2+1)} - (2+\text{sen}t)x^5 \qquad t_o \geq a > 0 \ .$$

Aquí tenemos

$$A(t) = \frac{1}{\ell n(t^2+1)} \quad g(x) = x^3 \qquad f(t,x) = (2+\text{sen}t)x^5$$

y como se cumplen las hipótesis de la Proposición 2.1, la solución trivial es estable.

EJEMPLO 2.2.

La solución trivial de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^{\alpha}(1+x^2)} - (2+\cos\, t)x^3 \qquad t_o \geq a > 0 \quad , \quad \alpha > 0$$

es globalmente asintóticamente estable de acuerdo con la Proposición 2.2 si se toman

$$A(t) = t^{-\alpha},\ g(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad f(t,x) = (2+\cos\, t)x^3$$

§2. EL SISTEMA $\frac{DY}{DT} = -\ Y^{R}\ Y + F(T,Y)$.

Consideremos ahora el sistema

$$\frac{dy}{dt} = -|y|^r\ y + f(t,y) \qquad r \geq 0 \tag{2.9}$$

donde nuevamente $y \in E^n$ y $f\colon [a,+\infty) \times E^n \to E^n$ es continua y satisface alguna condición suficiente para la unicidad, además de que para $t \geq a$, es $f(t,0) = 0$.

Sean las siguientes condiciones:

Para $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ dados, existe $T_\xi \geq t_o$ tal que

$$y.f(t,y)\Big|_{S_\xi} < \xi^r . \tag{2.10}$$

Para $t_o \geq a$ y $\xi > 0$ dados, existen $T_\xi \geq t_o$ y una función $h_\xi(t)$ que satisface las condiciones (1.12) (con $k < 0$ independiente de ξ) y tal que

$$y.f(t,y)\Big|_{D_\xi} \leq |y|^{r+2} + h_\xi(t) \tag{2.11}$$

(Aquí S_ξ es como en (2.4) y D_ξ como en (2.7)).

PROPOSICION 2.3.

Si se satisface la condición (2.10) (resp. (2.11)) la solución trivial de (2.9) es estable (resp. asintóticamente estable).

DEMOSTRACION.

Tomando $V(t,y) = y^2$ y aplicando (2.10) se obtiene

$$V'(t,y)\Big|_{S_\xi} = 2\{ - |y|^{r+2} + y.f(t,y)\}\Big|_{S_\xi} < 0$$

y por el Corolario 1.1 hay estabilidad. Si se supone (2.11) entonces

$$V'(t,y)\Big|_{D_\xi} \leq 2\, h_\xi(t)$$

y aplicando el Teorema 1.3 con $\bar{h}_\xi(t) = 2h_\xi(t)$ hay estabilidad asintótica.

EJEMPLO 2.3.

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\ (u^2+y^2)\ u + \beta v^2 u \\ \dot{v} = -\ (u^2 + v^2) v \end{cases} \tag{2.12}$$

donde

$$\beta = \beta(t,u,v) = 2^{\left(\frac{1}{t+1} - u^2 - v^2\right)} .$$

Se supone $t_o = u = 0$.

Pongamos

$$y = \mathrm{col}(u,v) \quad f(t,y) = \cos(v^2 u, 0) .$$

Entonces (2,12) es de la forma (2.9) con r=2. Se tiene que

$$y.f(t,y)\Big|_{S_\xi} = \beta u^2 v^2\Big|_{S_\xi} < 2^{\left(\frac{1}{t+1} - \xi\right)},\ \xi^2\Big|_{t \geq T_\xi} < \xi^2$$

siempre que $t \geq T_\xi > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Por lo tanto se cumple (2.10) y la solución trivial de (2.12) es estable. En realidad, es asintóticamente estable, pues

$$y.f(t,y)\Big|_{D_\xi} = \beta u^2 v^2\Big|_{D_\xi} \leq \beta(u^2+v^2)^2\Big|_{D_\xi} = (\beta-1+1)(u^2+v^2)^2\Big|_{D_\xi}$$

$$= (|y|^4 + (\beta-1)\ |y|^4)\Big|_{D_\xi} \tag{2.13}$$

y si consideramos $T_\xi > 2/\xi - 1$, para $t \geq T_\xi$ es $\frac{1}{t+1} - \xi < -\xi/2 < 0$ y de (2.13) se obtiene

$$y.f(t,y)\Big|_{D_\xi} \leq |y|^4 + (2^{-\xi/2} - 1)\ \xi^2 .$$

Luego tomando $h_\xi(t) = (2^{-\xi/2} - 1)\ \xi^2$ se satisface (2.11) y hay estabilidad asintótica.

§3. GENERALIZACION DEL CRITERIO DE KRASOVSKII

Sea ahora el sistema

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y) + A(t,y) \tag{2.14}$$

donde $Y(t,y)$ y $A(t,y)$ están definidas en H y toman valores en E^n, son continuas, y satisfacen alguna condición de unicidad. Además $Y(t,y)$ admite derivadas continuas respecto a las componentes de y.

Sea el instante inicial $t_o \geq a$. Se supone, naturalmente, que para

$$t \geq t_o \ , \quad Y(t,0) = A(t,0) = 0 \ . \tag{2.15}$$

Denotemos por $J = \frac{\partial X}{\partial y}(t,y)$ la matriz jacobiana de $Y(t,y)$ respecto a las componentes de y. Supongamos que exista una matriz constante B simétrica y definida positiva tal que si $\lambda_i(t,y)$ $1 \leq i \leq n$ son los valores propios de la matriz $M = J^t\, B+EJ$, entonces existen $k > -1$, $\lambda(t)_k > 0$ y $T_1 \geq t_o$ tales que si

$$t \geq T_1 \ , \ \lambda_i(t,y) \leq - \lambda(t) \ |y|^k \qquad 1 \leq i \leq n \tag{2.16}$$

y además

$$\int_{t_o}^{+\infty} \lambda(t)dt = + \infty \quad . \tag{2.17}$$

Por último, se supone que $\lambda(t)$ es una función continua que satisface

$$A(t,y) = 0(\lambda(t)) \quad (t \to +\infty \ , \quad |y| < h) \tag{2.18}$$

lo cual significa que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A(t,y)}{\lambda(t)} = 0$$

y el límite es uniforme respecto a y.

PROPOSICION 2.4.

Bajo las condiciones señaladas, la solución trivial de (2.14) es asintóticamente estable. Si es $h = +\infty$ entonces la solución trivial es globalmente asintóticamente estable.

DEMOSTRACION.

Sea la forma cuadrática definida positiva $V(y) = y^t By$. Su derivada respecto a (2.14) es

$$V'(y) = (Y+A)^t By + y^t B(Y+A) \quad . \tag{2.19}$$

Demostremos en primer lugar que si se satisface (2.16) entonces se tiene que para $t \geq T_1$

$$Y^t By + y^t BY \leq \frac{-\lambda(t)}{k+1} \quad |y|^{k+2} \quad . \tag{2.20}$$

En efecto

$$Y(t,y) = Y(t,y) - Y(t,0) = \int_0^1 J(t,\theta y) y d\theta$$

de donde

$$y^t BY = \int_0^1 y^t BJ(t,\theta y) y d\theta$$

de igual modo se tiene

$$Y^t By = \int_0^1 y^t \; J^t(t,\theta y) By \; d\theta$$

y sumando

$$y^tBY+Y^tBy = \int_0^1 y^t \left[J^t(t,\theta y)B+BJ(t,\theta y)\right] yd\theta . \tag{2.21}$$

Para cada (t,η) sea $P(t,\eta) = J^t(t,\eta)\ B+BJ(t,\eta)$. $y^tP(t,\eta)\ y$ es una forma cuadrática para la cual existe una transformación ortogonal $y=T(t,\eta)z$ tal que

$$y^tP(t,\eta)\ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t,\eta)z_i^2 \qquad z = (z_1,\dots,z_n) .$$

Por hipótesis se tiene que para $t \geq T_1$, con $\eta = \theta y$

$$\lambda_i(t,\eta) \leq -\lambda(t)\ |\eta|^k = -\lambda(t)\theta^k|y|^k .$$

De este modo, si $t \quad T_1$

$$y^t\ P(t,\eta)y \leq -\lambda(t)\ \theta^k|y|^k \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = -\lambda(t)\ \theta^k\ |y|^k\ z^2$$

y como $|y| = |z|$ queda que

$$y^t\ P(t,\eta)\ y \leq -\lambda(t)\ \theta^k\ |y|^{k+2} .$$

Sustituyendo en (2.21)

$$y^t\ BY+Y^tBy \leq -\int_0^1 \lambda(t)\ |y|^{k+2}\ \theta^k\ d\theta = \frac{-\lambda(t)}{k+1}\ |y|^{k+2}$$

que es (2.20).

Usando ahora (2.19) y (2.20) tenemos

$$V'(y) \leq \frac{-\lambda(t)}{k+1}\ |y|^{k+2} + A^t\ By + y^t\ BA \tag{2.22}$$

De acuerdo con (2.18) existe T_2 tal que

$$\text{Si} \quad |y| < h \quad y \quad t \geq T_2 \quad \left|A(t,y)\right| < \frac{\lambda(t)}{4(k+1)|B|} \left(\frac{\xi}{|B|} \right)^{\frac{k+1}{2}} . \tag{2.23}$$

Sea $T_\xi \geq \max\{T_1, T_2\}$ con $T_\xi \to +\infty$ si $\xi \to 0$. Usando (2.22) y (2.23) se tiene, para $t \geq T_\xi$

$$\begin{aligned} V'(y) &\leq \frac{-\lambda(t)}{k+1} |y|^{k+2} + 2\,|A|\,|B|\,|y| \\ &< \frac{-\lambda(t)}{k+1} |y|^{k+2} + \frac{\lambda(t)}{2(k+1)} \left(\frac{\xi}{|B|} \right)^{\frac{k+1}{2}} |y| \\ &= \left\{ -\frac{\lambda(t)}{k+1} |y|^{k+1} + \frac{\lambda(t)}{2(k+1)} \left(\frac{\xi}{|B|} \right)^{\frac{k+1}{2}} \right\} |y| \end{aligned} \tag{2.24}$$

Sea otra vez $D_\xi = \{(t,y) \in H : t \geq T_\xi \ ; \ V(t,y) \geq \xi\}$. Notemos que si $y^t By \geq \xi$ entonces

$$|y| \geq \left(\frac{\xi}{|B|} \right)^{1/2}$$

y por lo tanto

$$|y|^{k+1} \geq \left(\frac{\xi}{|B|} \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

Entonces de (2.24) se obtiene que

$$V'(y)\Big|_{D_\xi} < \frac{-\lambda(t)}{2(k+1)} \left(\frac{\xi}{|\;|} \right)^{\frac{k+2}{2}}$$

de manera que para $h_\xi(t) = \dfrac{-\lambda(t)}{2(k+1)} \left(\dfrac{\xi}{|B|} \right)^{\frac{k+2}{2}}$, se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.3, y si $h = +\infty$ las del Teorema 1.4. Queda demostrada la Proposición.

OBSERVACION 2.1.

Esta proposición generaliza un conocido criterio de Krasovskii [56] que se obtiene en el caso particular $A(t,y) = 0$, $k=0$, $\lambda(t) = $ etc < 0 . (Véase también el Teorema 55. de [49]). Nótese que los valores propios pueden acercarse a cero con $t \to +\infty$ y también con $y \to 0$. El resultado es próximo a uno de Brauer ([20] sección 3) aun que aquí consideramos un caso más general.

NOTA.

La demostración de (2.20) es una extensión de la que se hace en [17] para el caso en que no hay dependencia de t y B=I.

Demos aún otra variante para el análisis de la estabilidad de (2.14). Supongamos, para simplificar, que se tienen las hipótesis (2.16) y (2.17) en el caso particular B=I, y suprimamos (2.18).

PROPOSICION 2.5.

Supongamos (2.15) (2.16) y (2.17) (con B=I) y además que existe una función continua $\alpha(t) > 0$ tal que para t suficientemente grande es

$$\left| A(t,y) \right| \leq \alpha(t)\,|y|^{k+1} \quad \text{con} \quad \alpha(t) < \frac{\lambda(t)}{k+1} \quad . \tag{2.25}$$

Entonces la solución trivial de (2.14) es estable. Si además dado $\xi > 0$ existe $T_\xi \geq t_o$ ($T_\xi \to +\infty$ si $\xi \to 0$) y se verifica

$$\int_{T_\xi} \left[\frac{-\lambda(t)}{k+1} + \alpha(t) \right] dt = -\infty \tag{2.26}$$

la solución trivial de (2.14) es asintóticamente estable.

DEMOSTRACION.

Del mismo modo que se obtuvo (2.20) se comprueba que

$$y^t\ Y(t,y) \leq \frac{-\lambda(t)}{k+1}\ |y|^{k+2} \quad . \tag{2.27}$$

Tomemos $V(y) = y^2$. Si $Q_\xi = \{t \geq T_\xi\ , |y|^2 = \xi\}$ se comprueba facilmente que $V'(y)\big|_{Q_\xi} < 0$ y por el Corolario 1.1 hay estabilidad. Sea ahora además (2.26). Pongamos

$$h_\xi(t) = \left[\frac{-\lambda(t)}{k+1} + \alpha(t)\right] \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \quad \text{y} \quad D_\xi = \{(t,y)\ \varepsilon\ H:\ t \geq T_\xi\ ,\ |y|^2 \geq \xi\}\ .$$

Se tiene que

$$V'(y)\Big|_{\xi} \leq \left[\frac{-\lambda(t)}{k+1} + \alpha(t)\right] \varepsilon^{\frac{k+2}{2}} .$$

Luego se cumplen las hipótesis del Teorema 1.3.

EJEMPLO 2.4.

Sea el sistema de segundo orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -cx+xy - g(t)y^3 + A_1(t,x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = cx-xy - g(t)x^3 + A_2(t,x,y) \end{cases} \tag{2.28}$$

$c > 0$ es constante y $g(t)$ una función positiva. Obsérvese que uno de los valores propios de la parte Lineal es nulo. Tenemos en este caso

$$Y(t,x,y) = \begin{bmatrix} -cx+cy-g(t)y^3 \\ \\ cx-cy-g(t)y^3 \end{bmatrix} \qquad B = I$$

$$A(t,x,y) = \begin{bmatrix} A_1(t,x,y) \\ \\ A_2(t,x,y) \end{bmatrix} \qquad J(t,x,y) = \begin{bmatrix} -c & c-3g(t)(x^2+y^2) \\ \\ c-3g(t)(x^2+y^2) & -c \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de J es

$$(-c-\lambda)^2 = [c-3g(t)(x^2+y^2)]^2$$

de donde se obtienen

$$\lambda_1 = -3g(t)\ (x^2+y^2)$$

$$\lambda_2 = -2c+3g(t)\ (x^2+y^2)$$

Suponiendo que g(t) es una función acotada, si la constante c es suficientemente grande y h suficientemente pequeña, en la región $x^2 + y^2 \leq h^2$ se cumple

$$\lambda_i(t,x,y) \leq -3g(t)\ (x^2+y^2) \qquad i=1,2$$

de modo que se cumple (2.16) con $\lambda(t) = 3g(t)$ y $k=2$.

Como ilustración tomemos $g(t) = \frac{1}{3t}$, $x = 2$ y

$$A_1(t,x,y) = \frac{x^3+y^3}{t^2} \qquad A_2(t,x,y) = \frac{yx^2-2xy^2}{2t^3} .$$

El sistema (2.28) queda en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y - \dfrac{1}{3t}\, y^3 + \dfrac{x^3+y^3}{t^2} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x-2y- \dfrac{1}{3t}\, x^3 + \dfrac{yx^2-2xy^2}{2t^3} \end{cases} \qquad (2.29)$$

Ahora se cumple (2.17) y es fácil comprobar que para t suficientemente grande es

$$\left|A_i(t,x,y)\right| \leq \frac{2|(x,y)|}{t^2} \qquad i=1,2$$

entonces se satisface (2.18) y por la Proposición 2.4 la solución trivial de (2.29) es asintóticamente estable. Por otro lado, si tomamos $\alpha(t) = \frac{2}{t^2}$, se verifican (2.25) y (2.26) para $t > 6$, luego también se puede aplicar la Proposición 2.5.

CAPITULO III

UN RESULTADO DE ESTABILIDAD CONDICIONAL

§0. INTRODUCCION.

En este capítulo se demuestra un resultado de Estabilidad Condicional bajo condiciones muy generales. La clave de la demostración del teorema es el uso del principio topológico de Wacevski. Los lemas que preparan el teorema expresan propiedades cualitativas de las soluciones que tienen interés independiente. Se dan distintas variantes considerando casos particulares cercanos a los resultados conocidos.

§1. NOTACIONES E HIPOTESIS GENERALES. LEMAS 3.0 Y 3.1.

En este capítulo consideramos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + h_1\ (t,x,y) \\ \dot{y} = g(t,y) + h_2\ (t,x,y) \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $x = (x_1,\dots,x_k) \in E^k$, $y = (y_1,\dots,y_{n-k}) \in E^{n-k}$ y las funciones f,g,h_1 y h_2 son continuas para t a, $x \in H_1$ y $y \in H_2$ donde

$$H_1 = \{x \in E^k\colon |x| < h\} \qquad H_2 = \{y \in E^{n-k}\colon |y| < h\}$$

$h > 0$ y $a \in E$ son números dados.

Se supone que el miembro derecho de (3.1) satisface alguna condición suficiente para la unicidad de las soluciones por cada punto $(T_o, x_o, y_o) \in [a,+\infty) \times H_1 \times H_2$.

Sean $V_1(t,x)$ y $V_2(t,y)$ dos funciones de Liapunov en $[a,+\infty) \times H_1$ y $[a,+\infty) \times H_2$ respectivamente (Definición 1.2).

Para simplificar, consideraremos que son continuamente diferenciables. Además vamos a suponer que la condición de definida positiva para las funciones V_1 y V_2 se da de la forma siguiente, "casi" equivalente a la definición 1.1 (Ver Apéndice III.1).

$$V_1(t,x) \geq \phi_1(|x|)\ ,\ t \geq a,\ \ x \in H_1 \tag{3.2}$$

$$V_2(t,y) \geq \phi_2(|x|)\ ,\ t \geq a,\ \ y \in H_2 \tag{3.3}$$

donde $\phi_i \in K$, $i=1,2$. K es la clase de las funciones continuas de $[0,\gamma)$ en $E_+ = \{r \in E\colon r \geq 0\}$ que se anulan en $r = 0$ y estrictamente crecientes $\gamma >$ es un número dado, $0 + \infty$ ([49]). Se supone, naturalmente, que sea $\gamma \geq h$, y

$$V_1(t,0) = V_2(t,0) = 0 \tag{3.4}$$

Para $T \geq a$ y $\delta > 0$ dados, consideremos la región

$$\sum = \sum_{T,\delta} = \{(t,x,y) \in ExE^k xE^{n-k}:\ t \geq T,\ \ V_1(t,x) \leq \delta,\ V_2(t,y) \leq \delta\} \tag{3.5}$$

Notemos que tomando δ suficientemente pequeño, en virtud de (3.2) y (3.3) se tiene que

$$\sum \subset [a,+\infty) \times H_1 \times H_2\ . \tag{3.6}$$

Siempre supondremos que δ se toma de ese modo, además de que $\delta < h$.

LEMA 3.0.

Supongamos que para cualquier $s \geq a$, $x \in H_1$, $y \in H_2$, se tiene

$$x.\ \frac{\partial V_1}{x}(s,x) \quad 0 \qquad\qquad y.\ \frac{\partial V_2}{y}(s,y) \geq 0 \tag{3.7}$$

Entonces, para cada $s > a$, la región

$$\sum_s = \overset{0}{\sum} \cap \{t=s\} = \{(t,x,y) \in \sum\ :\ t=s,\ V_1(s,x) < \delta,\ \ V_2(s,y) < \delta\}$$

es un conjunto estrellado en el subespacio (hiperplano) de E^{n+1}

$$P = \{(t,x,y) \in ExE^k \times E^{n-k}:\ t=s\}$$

DEMOSTRACION.

Pondremos $0 = (s,0,0) \in E x E^k \times E^{n-k}$.

Comprobemos que $0 \in P$ es un punto central de $\sum_s$. En efecto, sea $s > a$ fijo y sea $(s,\bar{x},\bar{y}) \in \sum_s$. El segmento que une ese punto con el $0 \in P$ es

$$\{(s, \lambda\bar{x}, \lambda \in [0,1]\} .$$

Si un punto de este segmento estuviese fuera de $\sum_s$, para algún $\lambda_o \varepsilon(0,1)$ sería $V_1(s, \lambda_o \bar{x}) \geq \delta$ o bien $V_2(s, \lambda_o \bar{y}) \geq \delta$. Supongamos lo primero (el otro caso es igual). Tomemos la función

$\phi(\lambda) = V_1(\lambda \bar{x}) = V_1(s, \lambda \bar{x})$. Como $\phi \in C^1$, $\phi(\lambda_0) \geq \delta$ y $\phi(1) < \delta$, existe $\lambda_1 \in (\lambda_o, 1)$ tal que

$$\frac{d\phi}{d\lambda}(\lambda_1) = \frac{\lambda V_1}{\lambda x}(\lambda_1 \bar{x}), \bar{x} < 0$$

y eso contradide (3.7). El lema queda demostrado.

Por ser estrellado, $\sum_s$ es simplemente conexo ([53]) y por eso Σ es una región tubular que contiene en su interior al "eje t":

$$\{(t,0,0) \in E x E^k \times E^{n-k}: t \geq T\} .$$

Consideremos ahora las siguientes partes de $F_r \sum$:

$$\Omega_o = \{(t,x,y) \in \textstyle\sum: t = T\}$$

$$\Omega_1 = \{(t,x,y) \in \textstyle\sum: V_1(t,x) = \delta\}$$

$$\Omega_2 = \{(t,x,y) \in \textstyle\sum: V_2(t,y) = \delta\} .$$

Denotemos por $\sum_{se} \mid \sum_{se} \mid$ el conjunto de puntos de entrada estricta (salida estricta) de $\sum$ respecto al sistema (3.1) (ver [50], [58], [94], etc.).

Por la continuidad de las funciones $h_1(t,x,y)$ i=1, 2 y de las derivadas de V_1 y V_2, existen funciones $K_i(t)$, $P_i(t)$, $W_i(t)$ i=1,2 continuas para $t \geq a$ y tales que si $(t,x,y) \varepsilon \sum$ se tiene:

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial t}(t,x) \right| \leq P_1(t) \qquad \left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t,y) \right| \leq P_2(t) \tag{3.8}$$

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial x}(t,x) \right| \leq K_1(t) \qquad \left| \frac{V_2}{x}(t,y) \right| \leq K_2(t) \tag{3.9}$$

$$\left| h_i(t,x,y) \right| \leq W_i(t) \qquad i=1,2. \tag{3.10}$$

Consideremos que existen funciones $\phi(t,r)$ y $\Psi(t,r)$ positivas y continuas en $[a,+\infty) \times [0,h)$ que verifican:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(t,x).f(t,x) \leq -\phi(t,V_1(t,x)) \quad t \geq a \quad x \in H_1 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y}(t,y).g(t,y) \geq \Psi(t,V_2(t,y)) \quad t \geq a \quad y \in H_2 \tag{3.12}$$

LEMA 3.1.

Bajo las condiciones señaladas, si se asume que

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{P_1(t) + K_1(t)\, W_1(t)}{\phi(t,\delta)} < 1 \tag{3.13}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{P_2(t)+K_2(t)W_2(t)}{\psi(t,\delta)} < 1 \tag{2.14}$$

entonces para T suficientemente grande se tiene que

$$\textstyle\sum_{se} = (\Omega_o \cup \Omega_1) \setminus \Omega_2; \ \sum_{se} = \Omega_2 \setminus (\Omega_o \cup \Omega_1) \tag{3.15}$$

DEMOSTRACION.

Es suficiente comprobar que

$$V_1'\Big|_{\Omega_1} < 0 \qquad V_2'\Big|_{\Omega_2} > 0 \tag{3.16}$$

Utilizando (3.8) (3.9)(3.10)(3.11) y (3.12) obtenemos

$$V_1'\Big|_{\Omega_1} \leq -\phi(t,\delta) + P_1(t) + K_1(t)\; W_1(t)$$

y de acuerdo con (3.13) se cumple la primera de las desigualdades (3.16); la otra se comprueba de modo semejante.

En este lema, las condiciones (3.8), (3.9) y (3.10) indican solamente cierta regularidad (3.11) y (3.12) se inspiran en las llamadas condiciones "de muelle" mientras que (3.13) y (3.14) involucran cierta limitación a las "perturbaciones" $h_i(t,x,y)$. El contenido del lema es simple; grosso modo: Las líneas del campo definido por (3.1) entran en Σ por Ω_1 y salen por Ω_2.

§2. LEMAS 3.2 y 3.3.

Si $(t,\bar{x},\bar{y})$ y $(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})$ están en Σ, pondremos $\Delta x = \bar{\bar{x}}-\bar{x}$, $\Delta y = \bar{\bar{y}} - \bar{y}$. Consideraremos en lo que sigue $\delta < h/2$ de modo que $\Delta x \in H_1$ y $\Delta y \in H_2$.

Supongamos que las funciones h_i de (3.1) satisfacen la siguiente condición "de Lipschitz"

$$|h_i(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})=h_1(t,\bar{x},\bar{y})| \leq L_i(t)\{V_1(t,\Delta x))+V_2(t,\Delta y)\}\ . \tag{3.17}$$

Para dos soluciones $(\bar{x}(t),\bar{y}(t)$ y $(\bar{\bar{x}}(t),\bar{\bar{y}}(t))$ pongamos

$$A(t) = L_1(t)\left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \quad (t,\Delta x(t))\right|$$

$$B(t) = L_2(t)\left| \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad (t,\Delta x(t))\right| \tag{3.18}$$

$$C(t) = \frac{\left| \frac{\partial V_1}{\partial t} (t,\Delta x(t)) \right|}{V_2(t,\Delta y(t))}$$

$$D(t) = \frac{\left| \frac{\partial V_2}{\partial t} (t,\Delta y(t)) \right|}{V_2(t,\Delta y(t))} \tag{3.19}$$

y sea

$$E(t) = 2A(t) + 2B(t) + C(t) + D(t). \tag{3.20}$$

Vamos a suponer que

$$\int_a^{+\infty} E(t)dt < +\infty \quad . \tag{3.21}$$

Asumiremos que $V_2(t,y)$ satisface

$$V_2(t,y) \leq \phi_3(|y|) \tag{3.22}$$

donde $\phi_3 \in K$ y está definida en $[0,h)$. Esta condición equivale a que $V_2(t,y)$ tenga cota superior infinitamente pequeña (ver observación 1.4).

Supongamos que existan una función continua y positiva $\mu(t)$ y un número $m \geq 1$ tales que

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} (t,\Delta y).\left[g(t,\bar{\bar{y}})-g(t,\bar{y})\right] \geq \mu(t) \; V_2^m(t,\Delta y) \tag{3.23}$$

donde

$$\int_a^{+\infty} \mu(t)dt = +\infty \tag{3.24}$$

y sea también

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(t,\Delta x).\left[f(t,\bar{\bar{x}}) - f(t,\bar{x})\right] \leq 0 \tag{3.25}$$

LEMA 3.2.

Bajo las condiciones (3.2)(3.3)(3.17)(3.21)(3.22)(3.23)(3.24) y (3.25) sean $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ y $(\bar{\bar{x}}(t),\bar{\bar{y}}(t))$ las soluciones de (3.1) que pasan por los puntos de Σ $(T_o,\bar{x}_o,\bar{y}_o)$ y $(T_o,\bar{\bar{x}}_o,\bar{\bar{y}}_o)$ (donde T_o es suficientemente grande; esta condición se precisa más abajo) y supongamos que δ es suficientemente pequeño y que

$$V_1(T_o, \Delta x_o) < V_2(T_o, \Delta y_o) \tag{3.26}$$

donde $\Delta x_o = \bar{\bar{x}}_o - \bar{x}_o$, $\Delta y_o = \bar{\bar{y}}_o - \bar{y}_o$. Entonces necesariamente una de las trayectorias correspondientes a esas soluciones abandona Σ con el crecimiento de t.

DEMOSTRACION.

Sea $\xi(t)$ la solución de la ecuación

$$\xi^1(t) = E(t)\ \xi^2(t) \tag{3.27}$$

que verifica $\xi(T_o) = 1$. Haremos la demostración en dos partes:

(1) Probemos que mientras ambas trayectorias permanecen en Σ se satisface la desigualdad

$$V_1(t,\Delta x(t) < \xi(t)\ V_2(t,\Delta y(t)) \tag{3.28}$$

Pongamos $F(t) = \xi(t)V_2(t,\Delta y(t))-V_1(t,\Delta x(t))$. Según (3.26) $F(T_o) > 0$. Supongamos por el absurdo que existe un valor $\bar{t} > T_o$ tal que

$$F(\bar{t}) = 0 \ , \quad F(t) > 0 \ \text{ si } \ T_o \leq t < \bar{t} \ . \tag{3.29}$$

De la primera ecuación de (3.1) y usando (3.25) y (3.17) se obtiene :

$$V_1'(t,\Delta x(t)) = \frac{\partial V_1}{\partial t}(t,\Delta x(t)) + \frac{V_1}{x}(t, x(t)).\left[f(t,\bar{x}) - f(t,\bar{x})\right] +$$

$$+ \frac{\partial V_1}{\partial x}(t,\Delta x(t)).\left[h_1(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) - h_1(t,\bar{x},\bar{y})\right]$$

$$V_1'(t,\Delta x(t)) \leq \left|\frac{\partial V_1}{\partial x}(t,\Delta x(x))\right| + A(t)\left[V_1(t,\Delta x(t) + V_2(t,\Delta y(t))\right].\tag{3.30}$$

Usando la segunda ecuación de (3.1), (3.17) y (3.23) se obtiene

$$V_2'(t,\Delta y(t)) \geq \mu(t)\ V_2^m(t,\Delta y(t)) - B(t)\left[V_1(t_1(t,\Delta x(t)) + V_2(t,\Delta y(t))\right] -$$

$$- \left|\frac{V_2}{t}(t,\Delta y(t))\right| \tag{3.31}$$

de donde

$$V_2'(t,\Delta y(t)) - B(t)\left[V_1(t,\Delta x(t)) + V_2(t,\Delta y(t))\right] - \left|\frac{\partial V_2}{t}(t,\Delta y(t))\right| \tag{3.32}$$

De (3.30 y (3.32) queda que

$$F'(t) = \xi'(t)\ V_2(t,\Delta y(t)) + \xi(t)\ V_2'(t,\Delta y(t)) - V_1'(t,\Delta x(t))$$

$$> \xi'(t)\ V_2(t,\Delta y(t)) - \xi(t)B(t)\left[V_1(t,\Delta x(t)) + V_2(t,\Delta y(t))\right] -$$

$$- \xi(t)\left|\frac{\partial V_2}{\partial t}(t,\Delta y(t))\right| - A(t)\left[V_1(t,\Delta x(t)) + V_2(t,\Delta y(t))\right] -$$

$$-\left| \frac{V_1}{t} (t, x(t)) \right| .$$

Si evaluamos en $t=\bar{t}$ y usamos que $F(\bar{t}) = 0$ obtenemos:

$$F'(\bar{t}) > \xi'(\bar{t})\ V_2(\bar{t},\Delta y(\bar{t})) - \xi(\bar{t})\ B(\bar{t}) \left[\xi(\bar{t}) + 1\right] V_2(\bar{t},\Delta y(\bar{t})) -$$

$$-\xi(\bar{t}) \left| \frac{\partial V_2}{\partial t} (\bar{t},\Delta y(\bar{t})) \right| - A(\bar{t}) \left[\xi(\bar{t}) + 1\right] V_2(\bar{t}, y(\bar{t})) -$$

$$-\left| \frac{\partial V_1}{\partial t} (\bar{t},\Delta x(\bar{t})) \right| . \qquad (3.33)$$

Notemos que $V_2(\bar{t}, y(\bar{t})) \neq 0$ ya que si fuese 0, entonces sería $\Delta y(\bar{t})=0$ y según (3.29) $V_1(\bar{t},\Delta x(\bar{t})) = 0$ luego $\Delta x(\bar{t}) = 0$ y se contradiría la unicidad de las soluciones. Entonces podemos dividir en (3.33) por esa cantidad y se obtiene:

$$\frac{F'(\bar{t})}{V_2(\bar{t},\Delta y(\bar{t}))} > \xi'(\bar{t}) - B(\bar{t})\ \xi^2(\bar{t}) - B(\bar{t})\ \xi(\bar{t}) - D(\bar{t})\ \xi(\bar{t}) -$$

$$- A(\bar{t})\ \xi(\bar{t}) - A(\bar{t}) - C(\bar{t}) . \qquad (3.34)$$

Como para $t \geq T_o$ es $\xi(t) \geq 1$ de (3.34) se obtiene:

$$\frac{F'(\bar{t})}{V_2(\bar{t},\Delta y(\bar{t}))} > \xi'(t) - \left[2B(\bar{t}) + 2A(\bar{t}) + C(\bar{t}) + D(\bar{t})\right] \xi^2(\bar{t})$$

Es decir:

$$\frac{F'(t)}{V_2(\bar{t},\Delta y(\bar{t}))} > \xi'(\bar{t}) - E(\bar{t})\ \xi^2(\bar{t}) = 0$$

de donde sería $F'(\bar{t}) > 0$ y eso contradice (3.29)..

(2) Supongamos ahora que para todo $t \geq T_o$ ambas curvas integrales permanecen en Σ .

De (3.31) y (3.28) se sigue que

$$V_2'(t,\Delta y(t)) \geq \mu(t)\; V_2^m(t,\Delta y(t)) - B(t)\left[\xi(t) + 1\right] V_2(t,\Delta y(t)) - $$
$$- \left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t,\Delta y(t))\right| .$$

Como se cumple (3.28) es $V_2(t,\Delta y(t)) > 0$ y la desigualdad anterior puede escribirse

$$\frac{dV_2}{dt}(t,\Delta y(t)) \geq \mu(t)\; V_2^m(t,\Delta y(t)) - \{B(t)\left[1+\xi(t)\right] + D(t)\}\; V_2(t,\Delta y(t)) \tag{3.35}$$

Pongamos $G(t) = B(t)\left[1+\xi(t)\right] + D(t)$ y consideremos la ecuación (de tipo Bernoulli)

$$\frac{dz}{dt} = \mu(t)z^m - G(t)z \quad . \tag{3.36}$$

Analizaremos dos casos:

(a) $m > 1$.

La solución general de (3.36) tiene la forma

$$z(t) = e^{-\int_{T_o}^{t} G(s)ds} \left\{ \left[z(T_o)\right]^{\frac{1}{1-m}} - (m-1)\int_{T_o}^{t} \mu(s)\; e^{(1-m)\int_{T_o}^{s} G(\tau)d\tau}\, ds \right\}^{\frac{1}{1-m}} \tag{3.37}$$

válida si $z(T_o) \neq 0$. Además (3.36) posee la solución trivial $z=0$. Es fácil comprobar que

$$\xi(t) = \frac{1}{1 - \int_{T_o}^{t} E(s)ds} \tag{3.38}$$

y como se supone (3.21) si T_o se toma suficientemente grande será

$$\int_{T_o}^{+\infty} E(t)dt < 1 \quad y \quad \xi(t)$$

está definida y es acotada en $[T_o, \infty+)$. $G(t)$ también es integrable en ese intervalo. Teniendo en cuenta (3.24), por pequeño que sea $z(T_o)>0$ de (3.37) se desprende que existe un valor $T_1 > T_o$ para el cual se tiene

$$\lim_{t \to T_1^-} z(t) = +\infty \tag{3.39}$$

T_1 es el valor para el cual se anula la expresión entre llaves en (3.37).

Si tomamos para (3.36) una condición inicial $z(T_o)$ tal que $z(T_o) < V_2(T_o, \Delta y_o)$, comparando (3.36) con (3.35) se sigue que existe $T_2 \leq T_1$

$$V_2(t, \Delta y(t)) \to +\infty \quad si \quad t \to T_2^- \; . \tag{3.40}$$

Notemos que para la función $\phi_3(r)$ de (3.22) pueden ocurrir las posibilidades siguientes:

(i) $\lim_{r \to h} \phi_3(r) = +\infty$ o bien

(ii) $\lim_{r \to h} \phi_3(r) = \ell < +\infty$.

En el caso (ii) ϕ_3 puede considerarse definida (ya que puede extenderse como elemento de la clase K) en $[0, +\infty)$.

De acuerdo con (3.40) y (3.22) tiene que ocurrir que

$$\phi_3(|\Delta y(t)|) \to +\infty \quad \text{si} \quad t \to T_2^- . \tag{3.41}$$

Entonces según el caso tendremos

$$\begin{aligned} &(i) \quad |\Delta y(t)| \to h \quad \text{si} \quad t \to T_2^- \quad \text{o bien} \\ &(ii) \quad |\Delta y(t)| \to +\infty \quad \text{si} \quad t \to T_2^- . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Por otra parte, es fácil comprobar a partir de (3.2) y (3.3) que tomando δ suficientemente pequeño, si

$$(t,x,y) \in \Sigma \quad \text{se tiene}$$

$$|x| < h/3 \qquad |y| < h/3 \tag{3.43}$$

En este caso

$$|\Delta y(t)| = |\bar{\bar{y}}(t)-\bar{y}(t)| \leq |\bar{\bar{y}}(t)| + \bar{y}(t)| \leq \frac{2h}{3}$$

y esto contradice a (3.42).

(b) m=1.

En este caso la desigualdad (3.35) queda en la forma

$$\frac{dV_2}{dt}(t,\Delta y(t)) \geq \left[\mu(t)-G(t)\right] V_2(t,\Delta y(t)) \tag{3.44}$$

y se puede usar como ecuación de comparación la ecuación lineal homogé nea

$$\frac{dz}{dt} = \left[\mu(t) - G(t)\right] z \tag{3.45}$$

cuya solución general es:

$$z(t)=z(T_o)e^{\int_{T_o}^{t}[\mu(s)-C(s)]ds}$$

luego si $z(T_o) > 0$, $z(t) \to +\infty$ si $t \to +\infty$. Se sigue como en el caso (a) con $T_1 = +\infty$ en este caso. El lema queda demostrado.

LEMA 3.3.

Supongamos (3.2)(3.3)(3.11)(3.12) y (3.22). Las funciones $\phi(t,r)$ y $\psi(t,r)$ de (3.11) y (3.12) supondremos ahora que son crecientes en r para cada t, y tales que para b dado, $0 < b \leq \delta$, se verifique

$$\int_a^{+\infty}\phi(t,b)dt = \int_a^{+\infty}\psi(t,b)dt = +\infty . \tag{3.46}$$

Además, en lugar de (3.13) y (3.14) consideremos las condiciones más fuertes: para todo $b \in (0,\delta]$

$$P_1(t) + K_1(t)W_1(t) = 0\ (\phi(t,b))\ \ (t \to +\infty) \tag{3.47}$$

$$P_2(t) + K_2(t)W_2(t) = 0\ (\psi(t,b))\ \ (t \to +\infty) . \tag{3.48}$$

Entonces, si $(x(t),y(t))$ es una solución de (3.1) tal que para todo $t \geq T$ $(t,x(t),y(t)) \in \Sigma$, se tiene que

$$(x(t),y(t)) \to 0 \quad \text{si} \quad t \to +\infty \tag{3.49}$$

DEMOSTRACION.

Supongamos lo contrario. Entonces teniendo en cuenta (3.2) y (3.3) puede asegurarse que existen: $\delta_1 \in (0,\delta)$, una sucesión creciente $\{t_k\}$

con $t_k \to +\infty$, y una solución $(x(t),y(t))$ de (3.1) tal que

$$(t_k,\ x(t_k),\ y(t_k)) \in \Sigma_0 = \Sigma \setminus \Sigma_1 \text{ donde}$$

$$\Sigma_1 = \{(t,x,y) \in \Sigma :\ V_1(t,x)_1 \leq \delta_1,\ V_2(t,y) \leq \delta_1\} .$$

Pongamos

$$\Sigma_0^1 = \{(t,x,y) \in \Sigma_0 \ :\ V_1(t,x) > V_2(t,y)\} \ \Sigma_0^2 = \Sigma_0 \setminus \Sigma_0^1 \ .$$

Sean también las superficies

$$D_1 = \{(t,x,y) \in \Sigma_1 :\ V_1(t,x) = \delta_1,\ V_2(t,y) \leq \delta_1\}$$

$$D_2 = \{(t,x,y) \in \Sigma_1 :\ V_1(t,x) \leq \delta_1,\ V_2(t,y) = \delta_1\} .$$

Los puntos de D_1 D_2 son de entrada estricta en Σ_1 y los puntos de $D_2 \setminus (D_1 \cup \{(t,x,y) \in \Sigma_1 :\ t = T\})$ son de salida estricta de Σ_1. Esta afirmación se demuestra en el Lema 3.1. Además, sobre la superficie

$$Z = \{(t,x,y) \in \Sigma \ :\ t \geq T,\ \delta_1 \leq V_1(t,x) = V_2(t,y) < \delta\}$$

el campo va de Σ_0^1 a Σ_0^2 , ya que

$$V_2'(t,y)\Big|_Z > 0 \qquad V_1'(t,x)\Big|_Z < 0 \tag{3.50}$$

lo cual también se comprueba como se hizo para (3.16) utilizando que $\psi(t,V_2(t,y)) \geq \psi\ (t,\delta_1)$ y $\phi(t,V_1(t,x)) \geq \phi(t,\delta_1)$. Esto significa que Z separa localmente los conjuntos Σ_0^1 y Σ_0^2 (y no dos partes de uno de ellos).

Consideremos los dos casos posibles:

(a) Existe un valor de k tal que

$$(t_k,x(t_k),\ y(t_k)) \in \textstyle\sum_0^2 \ .$$

De la segunda ecuación de (3.1) y utilizando (3.8, (3.9) y (3.12) se obtiene:

$$V_2'(t,y(t)) \geq -\ P_2(t)-K_2(t)W_2(t)\ +\ \psi(t,V_2(t,y(t))) \tag{3.51}$$

Notemos que según (3.50) y teniendo en cuenta que los puntos de $D_2\setminus(D_1 \cup \{(t,x,y) \in \sum_1 : t = T\})$ son de salida estricta de $\sum_1$, si la trayectoria que consideramos permanece en $\sum$ para $t \geq t_k$, tiene que permanecer en $\sum_0^2$. Entonces para $t \geq t_k$ tenemos

$$V_2(t,y(t)) \geq \psi(t,\delta_1)\ -\ P_2(t)-K_2(t)W_2(t).$$

Teniendo en cuenta (3.48) puede asegurarse que existe $\tilde{t} \geq t_k$ tal que

$$V_2'(t,y(t)) \geq \frac{1}{2}\,\psi(t,\delta_1) \text{ para } t \geq \tilde{t}$$

de donde se obtiene

$$V_2(t,y(t)) \geq V_2(\overline{t},y_2(\tilde{t}))\ +\ \frac{1}{2}\int_{\tilde{t}}\psi(s,\delta_1)ds \tag{3.52}$$

De acuerdo con (3.46) se tendría que $V_2(t,y(t)) \to +\infty$ si $t \to +\infty$, pero entonces de (3.22) se sigue que

$$\phi_3(|y(t)|) \to +\infty \quad \text{si} \quad t \to +\infty\ ,$$

y con un razonamiento semejante al que sigue a (3.40) se concluye que $(t,x(t),y(t))$ no puede permanecer en $\sum$.

(b) Para algún valor de k, $(t_k,x(t_k),y(t_k)) \in \sum_0^1$.

Por (a) sabemos que la curva integral no puede pasar a $\sum_0^2$, ya que el razonamiento hecho con t_k vale para cualquier valor de t. Entonces hay dos posibilidades:

(b_1) La trayectoria permanece en $\sum_0^1$.

Utilizando la primera ecuación de (3.1),(3.8),(3.9),(3.10) y (3.11) se obtiene que

$$V_1'(t,x(t)) \leq P_1(t)+K_1(t)W_1(t)-\phi(t,V_1(t,x(t))$$

y considerando que la trayectoria permanece en $\sum_0^1$

$$V_1'(t,x(t)) \leq P_1(t)+K_1(t)W_1(t) - \phi(t,\delta_1) .$$

A partir de (3.47) podemos asegurar que existe $\bar{\bar{t}}$ tal que para $t \geq \bar{\bar{t}}$

$$V_1'(t,x(t)) \leq -\frac{1}{2}\phi(t,\delta_1)$$

con lo cual

$$V_1(t,x(t)) \leq V_1(\bar{\bar{t}},x(\bar{\bar{t}})) - \frac{1}{2}\int_{\bar{\bar{t}}}^{t} \phi(s,\delta_1)ds$$

pero de acuerdo con (3.46) esto es imposible.

Como obviamente una trayectoria que pase por un punto de Z pasa a $\sum_0^2$, la única posibilidad que queda es

(b$_2$) La trayectoria entra en $\sum_1$.

En este caso no puede permanecer en esa región, pues se contradiría la suposición sobre la sucesión $\{t_k\}$. Pero entonces tiene que entrar en $\sum_0^2$ y ya vimos que eso no puede ocurrir. El lema queda demostrado.

§3. VARIACIONES SOBRE LOS LEMAS 3.1, 3.2 Y 3.3.

Comenzaremos por considerar el importante caso particular que queda si se toman $V_1(t,x) = x^2$ $V_2(t,y) = y^2$.

(Si z es un vector, ponemos $z^2 = z.z$). Pueden obtenerse los siguientes resultados, que también llamaremos lemas.

LEMA 3.1A.

Supongamos que para el sistema (3.1) consideramos la región

$$\sum = \{(t,x,y): t \geq T, |x|^2 \leq \delta , |y|^2 \leq \delta\}$$

y sean

$$\Omega_o = \{(t,x,y) \in \sum: t = T\} ,$$

$$\Omega_1 = \{(t,x,y) \in \sum: |x|^2 = \delta\} \ \Omega_2 = \{(t,x,y) \in \sum: |y|^2 = \delta\} .$$

Supongamos que existen funciones continuas $\phi(t,r)$ y $\psi(t,r)$ definidas en $[a, +\infty) \times [0,h)$ tales que

$$x \cdot f(t,x) \leq \phi(t,|x|^2) \quad t \geq a, \quad x \in H_1 \tag{3.11A}$$

$$y \cdot g(t,y) \geq \psi(t,|y|^2) \quad t \geq a, \quad y \in H_2 \ . \tag{3.12A}$$

Y consideremos también que

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \frac{2h \ W_1(t)}{\phi(t,\delta)} < 1 \tag{3.13A}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \frac{2h \ W_2(t)}{\psi(t,\delta)} < 1 \ . \tag{3.14A}$$

Entonces se verifica (3.15).

DEMOSTRACION.

Basta comprobar que se satisfacen las hipótesis del Lema 3.1. Ahora (3.2)(3.3) y (3.4) son obvias, y se tiene

$$K_i(t) = 2h, \ P_i(t) = 0, \quad i=1,2.$$

LEMA 3.2A.

Supongamos que las funciones $h_i(t,x,y)$ $i=1,2$ de (3.1) satisfacen la condición

$$\left| h_i(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) - h_i(t,\bar{x},\bar{y}) \right| \leq L_i(t)\{|\Delta x| + |\Delta y|\} \tag{3.17A}$$

donde $L_i(t)$ $i=1,2$ son funciones positivas que satisfacen,

$$\int_a^{+\infty} (L_1(t) + L_2(t))dt < +\infty \quad . \qquad (3.21A)$$

Supongamos que exista $\mu(t) \geq 0$ continua tal que

$$\Delta y . \left[g(t,\bar{\bar{y}}) - g(t,\bar{y})\right] \geq \mu(t)\,|\Delta y|^m \qquad (3.23A)$$

donde m 2 y se tiene (3.24). También, que

$$\Delta x . \left[f(t,\bar{\bar{x}}) - f(t,\bar{x})\right] \leq 0 \ . \qquad (3.25A)$$

Entonces se verifica la tesis del Lema 3.2 si en lugar de (3.26) se considera

$$|\Delta x_o| < |\Delta y_o| \quad . \qquad (3.26A)$$

OBSERVACION 3.1.

El Lema 3.2A no es propiamente un corolario del Lema 3.2, pues las funciones $V_1(t,x) = |x|$ y $V_2(t,y) = |y|$ de (3.17A) no son de clase C^1 (considerar $V_1 = x^2$ y $V_2 = y^2$ en (3.17A) es, naturalmente, demasiado restrictivo). Sin embargo, el Lema 3.2A puede demostrarse con técnicas similares a las del 3.2 (ver [28]).

LEMA 3.3A.

Supongamos (3.11A) y (3.12A). En lugar de (3.13A) y (3.14A) consideremos que para todo b, $0 < b \leq \delta$.

$$w_1(t) = 0\,(\phi(t,b)) \qquad t \to +\infty \qquad (3.47A)$$

$$w_2(t) = 0\ (\psi(t,b)) \qquad t \to +\infty \tag{3.48A}$$

y que las funciones ϕ y ψ son crecientes en r para cada t y satisfacen (3.46). Entonces es cierta la tesis del Lema 3.3.

Las hipótesis de los lemas 3.1, 3.2 y 3.3 pueden parecer muy sofisticadas; aparecerán más naturales y más cercanas a los resultados clásicos después de las consideraciones que siguen.

PROPOSICION 3.1.

Supongamos que las funciones f y g de (3.1) poseen derivadas parciales continuas respecto a las variables $(x_1,\ldots,x_k)$ y $(y_1,\ldots,y_{n-k})$ respectivamente. Sean $\{\lambda_i(t,x)\}$ $1 \le i \le k$ los valores propios de la matriz

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{f}{x}(t,x) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right]^t\right\} \text{ y } \{\mu_j(t,y)\} \qquad 1 \le j \le n-k$$

los valores propios de

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g}{\partial y}(t,y) + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(t,y)\right]^t\right\}.$$

Supongamos que

$$f(t,0) = g(t,0) = 0 \qquad t \ge a \tag{3.53}$$

y además que existan funciones continuas positivas $\lambda(t)$ y $\mu(t)$, y un valor $t_1 \ge a$ tales que

$$\lambda_i(t,x) \le -\lambda(t)\ |x|^{\ell} \qquad i=1,\ldots,k \qquad t \ge t_1 \tag{3.54}$$

$$\mu_j(t,y) \geq \mu(t)\ |y|^m \qquad j=1,\ldots,n-k \qquad t \geq t_1. \tag{3.55}$$

donde $\ell \geq 0$ y $n \geq 0$ son números dados. Entonces para $t \geq t_1$ se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$x.f(t,x) \leq \frac{-\lambda(t)}{\ell+1}\ |x|^{\ell+2} \tag{3.11B}$$

$$y.g(t,y) \geq \frac{\mu(t)}{m+1}\ |y|^{m+2} \tag{3.12B}$$

$$\Delta y.\left[g(t,\bar{\bar{y}})-g(t,\bar{y})\right] \geq \frac{\mu(t)}{(m+1)2^m}\ |\Delta y|^{m+2} \tag{3.23B}$$

$$\Delta x.\left[g(t,\bar{\bar{x}})-f(t,\bar{x})\right] \leq \frac{-\lambda(t)}{(\ell+1)2^\ell}\ |\Delta x|^{\ell+2} \tag{3.25B}$$

DEMOSTRACION.

(3.11B) ya se obtuvo (Proposición 2.4 con B=I) y (3.12B) se consigue del mismo modo; (3.23B) y (3.25B) pueden obtenerse como en [17] donde estas desigualdades están demostradas para el caso en que no hay dependencia de t.

Combinando la Proposición 3.1 con los lemas 3.1A, 3.2A y 3.3A, se obtienen los tres lemas siguientes (la "variante B") de forma inmediata.

LEMA 3.1B.

Si se satisfacen (3.53) (3.54) (3.55) y además,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{W_1(t)}{\lambda(t)} < 1 \qquad (3.13B)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{W_2(t)}{\mu(t)} < 1 \qquad (3.14B)$$

es válida la tesis del Lema 3.1.

LEMA 3.2B.

Si se cumplen (3.17A)(3.21A)(3.53)(3.54)(3.55) y (3.24) se obtiene la misma conclusión que en el Lema 3.2A.

(Las funciones $\mu(t)$ de (3.23A) y (3.55) juegan el mismo papel,por eso no cambiamos la notación).

LEMA 3.3B.

Bajo las condiciones (3.53)(3.54) y (3.55) supongamos que se tienen:

$$W_1(t) = 0\ (\lambda(t)) \qquad (t \to +\infty) \qquad (3.47B)$$

$$W_2(t) = 0\ (\mu(t)) \qquad (t \to +\infty). \qquad (3.48B)$$

Además, supongamos (3.24) y

$$\int_a^{+\infty} \lambda(t)dt = +\infty\ . \qquad (3.24B)$$

Entonces es cierta la tesis del Lema 3.3.

En este caso se tienen,

$$\phi(t,r) = \frac{\lambda(t)}{\ell+1} r^{\ell} \qquad \psi(t,r) = \frac{\mu(t)}{m+1} r^{m}$$

Ahora veremos que en el caso particular $\ell = m = 0$ en (3.54) y (3.55), el Lema 3.2B puede mejorarse sustancialmente, ya que no hay que exigir (3.21A).

LEMA 3.2C.

Sean las hipótesis de la Proposición 3.1 con $\ell = m = 0$ en (3.54) y (3.55). Supongamos (3.17A) y (3.24). También,

$$2(B_1(t) + L_2(t)) < \lambda(t) + \mu(t) \tag{3.21C}$$

y además,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{W_2(t)}{L_2(t)} e^{\int_{T_0}^{t} [2L_2(s) - \mu(s)]ds} = 0 \tag{3.56}$$

Entonces es válida la tesis del Lema 3.2A.

DEMOSTRACION.

El esquema de la prueba es parecido al del Lema 3.2:

(1) Mientras ambas trayectorias estén en $\sum$, se satisface la desigualdad

$$|\Delta x(t)| < |\Delta y(t)| . \tag{3.28C}$$

Esta parte se demuestra de modo semejante al Lema 3.2.

(2) Supongamos ahora que para $t \geq T_o$ ambas trayectorias están en $\sum$. De (3.28C) y usando la segunda ecuación de (3.1) obtenemos

$$\frac{d(|\Delta y|^2)}{dt} \geq 2 \left[\mu(t) - 2L_2(t) \right] |\Delta y|^2 . \tag{3.57}$$

Y utilizando la segunda ecuación de (3.1) y (3.23B) se obtiene :

$$\frac{d(|\Delta y|^2)}{dt} \geq 2\, \mu(t) |\Delta y|^2 - 2w_2(t) |\Delta y| . \tag{3.58}$$

Consideremos las siguientes ecuaciones de comparación

$$\frac{dz}{dt} = 2 \left[\mu(t) - 2L_2(t) \right] z \tag{3.59}$$

$$\frac{du}{dt} = 2\, \mu(t) u - 2w_2(t) \sqrt{u} . \tag{3.60}$$

La solución general de (3.59) es

$$z(t) = z(T_o)\, e^{2\int_{T_o} (\mu(s) - 2L_2(s))ds} \tag{3.61}$$

Comparando (3.57) y (3.59) vemos que si se tiene

$$0 < z(T_o) \leq |\Delta y(T_o)|^2,$$

será

$$|\Delta y(t)|^2 \geq z(t) \quad \text{para} \quad t \geq T_o \tag{3.62}$$

Por otro lado, la solución general de (3.60) es

$$\sqrt{u(t)} = \left\{ \sqrt{u(T_o)} - \int_{T_o}^{t} w_2(s)\, e^{-\int_{T_o}^{s}\mu(\tau)d\tau} ds \right\} e^{\int_{T_o}\mu(s)ds} \qquad (3.63)$$

Las ecuaciones (3.59) y (3.60) poseen además la solución trivial. Consideremos estas ecuaciones respectivamente en las regiones

$$\{(t,z):\ t \geq T_o,\ z > 0\} \quad y \quad \{(t,u):\ t \geq T_o;\ u > 0\}.$$

Tomemos en (3.63) el valor inicial crítico

$$\sqrt{u(T_o)} = \int_{T_o}^{+\infty} w_2(t) e^{-\int_{T_o}^{t}\mu(s)ds} dt = \sqrt{u_o} \qquad (3.64)$$

La solución correspondiente a este valor inicial es

$$\sqrt{u(t)} = H(t) = e^{\int_{T_o}^{t}\mu(s)ds} \int_{t}^{+\infty} w_2(s)\, e^{-\int_{T_o}^{s}\mu(\tau)d\tau} ds$$

Si como valor inicial se toma $\sqrt{u_o} + \xi$ con $\xi > 0$ puede verse a partir de (3.63) que entonces $\sqrt{a(t)} \to +\infty$ si $t \to +\infty$. Se desprende que si $|y(t)|$ en (3.58) es acotada, tiene que cumplir

$$|\Delta y(t)| \leq H(t) \qquad (3.65)$$

y entonces por (3.62) se tendría que

$$\sqrt{z(t)} \leq H(t)\ . \qquad (3.66)$$

Se calcula a partir de (3,56) que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{H(t)}{\sqrt{z(t)}} = 0$$

y esto está en contradicción con (3.66). El lema queda demostrado.

OBSERVACION 3.2.

Si en el caso considerado en el Lema 3,2C (ℓ=m=0) es además $\lambda(t) = \lambda$= etc, $\mu(t) = \mu$= etc, pueden tomarse $L_i(t) = L_i$ (constantes) i=1,2 en la condición (3.17A) y basta suponer además (3.53) y

$$2L_1 < \lambda \qquad 2L_2 < \mu \ . \tag{3.67}$$

En cuanto al Lema 3.3, puede mejorarse del modo siguiente:

LEMA 3.3C.

Con las hipótesis del Lema 3.3, sin suponer que $\phi(r,t)$ y $\psi(r,t)$ sean crecientes en r, pero añadiendo que (3.47) y (3.48) se verifiquen uniformemente respecto de $b \in [\delta_1, \delta]$ donde δ_1 es arbitrario, $0 < \delta_1 \leq \delta$, y que las integrales de (3.46) diverjan uniformemente respecto de b en el mismo conjunto, se satisface la tesis del Lema 3.3.

DEMOSTRACION.

Se obtiene que

$$V_2'(t,y) \geq \psi(t,V_2(t,y)) - P_2(t)-K_2(t)W_2(t)$$

y como sobre Z es $\delta \leq V_2(t,y) \leq \delta$, si (3.47) y (3.48) se verifican uniformemente respecto de b en $[\delta_1, \delta]$ para T suficientemente grande se obtiene (3.50). Más aún, puede asegurarse que

$$V_2'(t,y) \geq \frac{1}{2}\psi(t,V_2(t,y(t)))$$

y en lugar de (3.52) queda

$$V_2(t,y(t)) \geq V_2(\bar{t},y(\bar{t})) + \frac{1}{2}\int_{\bar{t}}^{t} \psi(s,V_2(s,y(s)))ds$$

de modo semejante cambia la desigualdad correspondiente a V_1 y son válidos los mismos pasos que en la demostración del Lema 3.3 si las integrales divergen uniformemente en el intervalo señalado.

§4. APLICACION DEL PRINCIPIO DE WACEVSLY

OBSERVACION 3.3.

Si la función $V_2(t,y)$ satisface la segunda de las condiciones (3.7), y para $T \geq a$ y x_o fijos consideramos

$$M = \{(t,x,y) \in \textstyle\sum : t=T, \quad x = x_o, \quad V_2(t,y) \leq \delta\}$$

este conjunto, que identificamos con un subconjunto de E^{n-k}, es estrellado (lo cual se demuestra con la misma idea del Lema 3.0) y por lo tanto homeomorfo a una bola cerrada en E^{n-k}. Además es sabido que la restricción del homeomorfismo a F_rM es un homeomorfismo entre las fronteras.

TEOREMA 3.1.

Supongamos que se cumplan las hipótesis de los lemas 3.0 , 3.1, 3.2 y 3.3. Las del Lema 3.1 pueden sustituirse por las de los lemas 3.1A ó 3.1B; las del lema 3.2 por las de los lemas 3.2A, 3.2B ó 3.2C, y las del Lema 3.3 por las de los lemas 3.3A, 3.3B ó 3.3C formando cualquier combinación. Entonces dentro de $\sum$ existe una variedad (k+1) -dimensional Γ formada por semitrayectorias $(t,x(t),y(t))$ (y por lo tanto positivamente invariante) tales que $(x(t),y(t)) \to 0 \in E^k \times E^{n-k}$ si $t \to +\infty$. Además, cualquier curva integral que pase por un punto de $\sum \setminus \Gamma$ abandona $\sum$ con el crecimiento de t.

DEMOSTRACION.

Consideremos en $\sum$ el conjunto

$$M = \{(t,x,y) \in \textstyle\sum : t = \bar{T},\ x=x_o,\ \ V_2(t,y) \leq \delta\}$$

donde $(T,x_o) \in \Pi =\{(T,x_o) \in ExE^k : \bar{T} \geq T,\ \ V_1(\bar{T},x_o) \leq \delta\}$. En el espacio $\{(t,x,y) \in ExE^k xE^{n-k} : t=\bar{T},\ x=x_o\}$, es $F_r M = M \cap \Omega_2 = \{(t,x,y) \in \sum :$ $t=\bar{T},\ x=x_o,\ V_2(t,y) = \delta\}$. $M \cap \Omega_2$ es un retracto de Ω_2 y no lo es de M. En efecto, teniendo en cuenta la Observación 3.3, $M \cap \Omega_2$ es homeomorfo a una esfera (n-k-1)-dimensional, mientras que M es homeomorfo a la correspondiente bola (n-k)-dimensional, y puede comprobarse fácilmente que si $M \cap \Omega_2$ fuese un retracto de M se contradiría el teorema del punto fijo de Brower.

Como aplicación de retracción de Ω_2 en $M \cap \Omega_2$ puede tomarse

$\eta : \Omega_2 \to M \cap \Omega_2$ definida mediante la igualdad $\eta(t,x,y) = (\bar{T},x_o,y)$. Aplicando el principio de Wacevsky ([50], [94]) puede asegurarse que existe al menos un punto $(\bar{T},x_o,y_o) \in M$ tal que la solución que pasa por él permanece en $\sum$ para $t \geq \bar{T}$. De acuerdo con el Lema 3.3, esa solución tiene que tender a 0. Aplicando el Lema 3.2, para cada conjunto M el punto en cuestión es único (nótese que para dos puntos diferentes de M se satisface (3.26)), de modo que queda definida una aplicación $\beta:\Pi \to \sum$ mediante $\beta(\bar{T},x_o) = y_o$.

Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{(t,x,y) \in \textstyle\sum: (t,x) \in \Pi,\ y = \beta(t,x)\} .$$

Evidentemente, todos los puntos de $\sum$ por los que pasa una trayectoria que tiende a 0 para $t \to +\infty$ están en Γ, y Γ está formada solamente por esos puntos, de modo que es un conjunto positivamente invariante. Falta comprobar que la aplicación $W: \Pi \to \Gamma$ definida mediante la relación $W(\bar{T},x_o) = (\bar{T},x_o, \beta(\bar{T},x_o))$ que ya sabemos es biyectiva, es también continua (la inversa es continua por ser una proyección). Supongamos, por el absurdo, que W tiene un punto de discontinuidad (t^*,x^*). Entonces existen un número $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{(t_k,x_k)\} \subset \Pi$ tales que $(t_k,x_k) \to (t^*,x^*)$ y se tiene

$$|\beta(t_k,x_k) - \beta(t^*,x^*)| \geq \varepsilon \qquad (3.68)$$

La sucesión $\{y_k\} = \{\beta(t_k,x_k)\}$ es acotada, ya que $|y_k| \leq \delta$, y por lo tanto contiene una subsucesión convergente (que denotaremos del mismo modo).

Sea $\bar{y}$ su límite. Tenemos entonces que $(t_k,x_k,y_k) \to (t^*,x^*,\bar{y})$ si $k \to +\infty$. Pero según (3.68) $\bar{y} \neq \beta(t^*,x^*)$ luego la solución de (3.1) que pasa por $(t^*,x^*,\bar{y})$ abandona $\sum$ con el crecimiento de t. De acuerdo con la continuidad respecto a las condiciones iniciales cualquier solución que pase por una pequeña vecindad de ese punto también abandona $\sum$ y eso contradice que $(t_k,x_k,y_k) \in \Gamma$. En conclusión, Γ es una variedad homeomorfa a Π. Del contexto anterior se desprende que si una trayectoria pasa por un punto de $\sum \setminus \Gamma$, necesariamente tiene que salir de $\sum$.

OBSERVACION 3.4.

Naturalmente, suprimiendo las hipótesis del Lema 3.3 que no se utilizan en los otros lemas, se concluye la existencia de una variedad (k+1)-dimensional Γ formado por trayectorias, sólo que no puede asegurarse que éstas tiendan a 0.

OBSERVACION 3.5.

En la demostración realizada, se tiene una variedad Γ definida para $t \geq \bar{T}$ con $\bar{T}$ suficientemente grande. Pero si se toma

$$\Gamma \cap \{(t,x,y) \in \textstyle\sum : t = \bar{T}\}$$

como variedad inicial pero se hace *decrecer* el tiempo hasta t_o, se obtiene una variedad con las propiedades de Γ definida para $t \geq t_o$. Para ello hay que considerar además valores suficientemente pequeños de $|x(T)|^2 + |y(T)|^2$ para no "salirnos" de $\sum$ (en base, nuevamente, a la continuidad respecto a las condiciones iniciales).

OBSERVACION 3.6.

Si consideramos el caso particular $h_i(t,x,y) = 0$, $i = 1,2$ y $\ell = m=0$ con $\lambda(t) =$ etc y $\mu(t) =$ etc, se obtiene una situación muy cercana al teorema clásico de Perron ([18], [40]) ya que como es conocido, si se lleva la parte lineal a su forma canónica, el sistema considerado en dicho teorema queda en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t,x,y) \\ \dot{y} = By + g(t,x,y) \end{cases} .$$

También aquí se considera una situación más general que en [91], [85] y [86].

Para más claridad enunciaremos ahora el teorema con todas las hipótesis que se necesitan.

Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + h_1(t,x,y) \\ \dot{y} = g(t,y) + h_2(t,x,y) \end{cases} \qquad (3.1)$$

donde $x \in E^k$, $y \in E^{n-k}$ y las funciones del miembro derecho son continuas para t a, $x \in H_1$, $y \in H_2$ y satisfacen alguna condición de unicidad.

Se supone que existen dos funciones $V_1(t,x)$ y $V_2(t,y)$ de clase C^1 que satisfacen,

$$\phi_1(|x|) \leq V_1(t,x) \qquad t \geq a,\ x \in H_1 \qquad (3.2)$$

$$\phi_2(|y|) \leq V_2(t,y) \leq \phi_3(|y|) \quad t \geq a, \quad y \in H_2 \qquad (3.3)\ (3.2)$$

$$\phi_i \in K \quad i = 1,2,3$$

$$V_1(t,0) = V_2(t,0) = 0 \qquad t \geq a \qquad (3.4)$$

$$x.\ \frac{\partial V_1}{\partial x}(t,x) \geq 0 \qquad y.\ \frac{\partial V_2}{\partial y}(t,y) \geq 0 \quad t \geq a\ . \qquad (3.7)$$

Supondremos que existen funciones $\phi(t,r)$ y $\psi(t,r)$ continuas en $[a,+\ ) \times [0,h)$ que cumplen:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(t,x).f(t,x) \leq -\ \phi(t,V_1(t,x)) \qquad t \geq a \quad x \in H_1 \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y}(t,y).g(t,y) \geq \psi(t,V_2(t,y)) \qquad t \geq a \quad y \in H_2 \qquad (3.12)$$

y para todo $b \in (0,\delta]$

$$\int_a^{+\infty} \phi(t,b)dt = \int_a^{+\infty} \psi(t,b)dt = +\infty\ . \qquad (3.46)$$

Consideramos que existen una función continua y positiva $\mu(t)$ y un número $m \geq 1$ tales que si $\Delta y = \bar{y}-\bar{y}$ y $\Delta x = \bar{x}-\bar{x}$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y}(t,\Delta y).\ [g(t,\bar{y})-g(t,\bar{y})] \geq \mu(t)\ V_2^m(t,\Delta y) \qquad (3.23)$$

donde

$$\int_a^{+\infty} \mu(t)dt = +\infty \tag{3.24}$$

y

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(t,\Delta x).\ \left[f(t,\bar{\bar{x}})-f(t,\bar{x})\right] \leq 0. \tag{3.25}$$

Las funciones h_1 de (3.1) satisfacen

$$|h_i(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})-h_i(t,\bar{x},\bar{y})| \leq L_i(t)\ \{V_1(t,\Delta x) + V_2(t,\Delta y)\}\ . \tag{3.17}$$

Sean las siguientes notaciones, para dos soluciones dadas:

$$\begin{aligned} A(t) &= L_1(t)\left|\frac{\partial V_1}{\partial x}(t,\Delta x(t))\right| \\ B(t) &= L_2(t)\left|\frac{\partial V_2}{\partial y}(t,\Delta y(t))\right| \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{\left|\frac{\partial V_1}{\partial t}(t,\Delta x(t))\right|}{V_2(t,\Delta y(t))} \\ D(t) &= \frac{\left|\frac{\partial V_2}{\partial t}(t,\Delta y(t))\right|}{V_2(t,\Delta y(t))} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$E(t) = 2A(t)+2B(t)+C(t)+D(t). \tag{3.20}$$

Bajo las hipótesis dadas, existen funciones continuas $P_i(t),K_i(t)$, $W_i(t)$ $i=1,2$ tales que:

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial t}(t,x) \right| \leq P_1(t) \qquad \left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t,y) \right| \leq P_2(t) \tag{3.8}$$

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial x}(t,x) \right| \leq E_1(t) \qquad \left| \frac{\partial V_2}{\partial y}(t,y) \right| \leq K_2(t) \tag{3.9}$$

$$|h_i(t,x,y)| \leq w_i(t) \qquad i=1,2. \tag{3.10}$$

Supondremos que

$$\int_a^{+\infty} E(t)dt < +\infty \tag{3.21}$$

$$P_1(t)+K_1(t)W_1(t) = 0\,(\psi(t,b)) \qquad (t \to +\infty) \tag{3.47}$$

$$P_2(t)+K_2(t)W_2(t) = 0\,(\psi(t,b)) \qquad (t \to +\infty) \tag{3.48}$$

Si bajo estas hipótesis, ponemos

$$\sum = \{(t,x,y):\ t \geq T,\ V_1(t,x) \leq \delta,\ \ V_2(t,y) \leq \delta\},$$

para δ suficientemente pequeño existe dentro de $\sum$ una variedad (k+1)--dimensional Γ formada por curvas integrales, inestable.

EJEMPLO 3.1.

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1+2x_2-\dfrac{1}{3t}x_2^3+\dfrac{x_1^3+x_2^3}{t^2} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1-2x_2-\dfrac{1}{3t}x_1^3 \\ \dfrac{dt}{dt} = \dfrac{1}{t}y+\dfrac{y}{t^4} \end{cases}$$

Aquí es k=2, n=3. Pongamos $x = (x_1, x_2)$ y tomemos

$$f(t,x) = \begin{bmatrix} -2x_1+2x_2-\frac{1}{3t}x_2^3 \\ \\ 2x_1-2x_2-\frac{1}{3t}x_1^3 \end{bmatrix} \quad g(t,y) = \frac{1}{t}\,y$$

$$h_1(t,x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^3+x_2^3}{t^2} \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_2(t,x,y) = \frac{y}{t^4}$$

En $\sum$ tenemos $|x| \leq h$, $|y| \leq h$ de modo que pueden tomarse

$$w_1(t) = \frac{2h^3}{t^2} \qquad w_2(t) = \frac{h}{t^4} \quad .$$

Veamos que puede aplicarse la "Variante B":

Se tiene que

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right]^t\right\} = \begin{bmatrix} -2 & 2-\frac{1}{2t}(x_1^2+x_2^2) \\ \\ 2-\frac{1}{2t}(x_1^2+x_2^2) & -2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2t}(x_1^2+x_2^2) \qquad \lambda_2 = -4+\frac{1}{2t}(x_1^2+x_2^2) \ .$$

Si suponemos $a \geq 1$ y $k < 2$ es fácil ver que

$$\lambda_i(t,x_1,x_2) \leq -\lambda(t)\,|x|^2 \quad \text{donde } \lambda(t) = \frac{1}{2t}$$

Además $\mu_1(t) \leq \mu(t) = \frac{1}{t}$. Es fácil ver también que pueden utilizarse

$$L_1(t) = \frac{2(h^2 + 2}{t^2} \qquad L_2(t) = \frac{1}{t^4}$$

Y se comprueba que se satisfacen todas las hipótesis de la "variante B" con $\ell = m = 0$. Se concluye que en el espacio de las variables (x_1, x_2, y, t) existe una variedad invariante Γ de tres dimensiones que satisface los requerimientos del Teorema 3.1. Obsérvese que a este ejemplo no se le pueden aplicar ninguno de los resultados de [91] [85] ó [86] ni, por supuesto, el teorema de Perron. Naturalmente, también pueden darse ejemplos que tengan algunas ecuaciones fuertemente no lineales.

CAPITULO IV

PERTURBACION DE UN SISTEMA BIDIMENSIONAL CON CICLO LIMITE INESTABLE.

§0. INTRODUCCION.

En este capítulo mostramos que el principio de Wacevsky combinado con el uso de funciones de Liapunov u tras técnicas de la Teoría Cualitativa puede también aplicarse a un problema de naturaleza diferente al problema de la Estabilidad Condicional. El resultado principal (Teorema 4.2) demuestra que si el sistema (4.1) posee un ciclo límite inestable, entonces el sistema perturbado (4.2) admite una variedad invariante tubular cuyas secciones transversales se aproximan, si $t \to +\infty$, al ciclo límite de (4.1).

Previamente se introducen coordenadas curvilíneas en una vecindad del ciclo límite y se efectúa un cambio de variable sugerido por la teoría de Floqué. En la literatura no existen resultados similares al que planteamos; las perturbaciones de sistemas con ciclos límites suelen considerarse periódicas, o bien que tienden a cero cuando lo hace cierto parámetro, pero no cuando $t \to +\infty$. Véanse [92], [25], etc. Aunque se trata de otro problema, utilizaremos notaciones que subrayen las semejanzas con el capítulo anterior.

§1. TRANSFORMACION DE LOS SISTEMAS ORIGINALES.

Consideremos los siguientes sistemas en el plano.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + f(t,x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) + g(t,x,y) \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $(x,y) \varepsilon E^2$, $t \quad E$, $T,Q \quad C^2(E^2)$ y las funciones continuas f y g satisfacen que para cualquier compacto $K \subset E^2$ se tiene

$$f,g \overset{\to}{\to} \theta \quad si \quad t \to +\infty, \quad (x,y) \varepsilon K \tag{4.3}$$

A (4.2) lo llamaremos sistema perturbado y al vector de componentes f y g, la perturbación del sistema (4.1).

Supondremos que la curva

$$\begin{cases} x = r(t) \\ y = s(t) \qquad t \varepsilon E \end{cases} \tag{4.4}$$

es un ciclo límite del sistema (4.1), y sea $w > 0$ el (menor) período de las funciones $r(t)$ y $s(t)$:

$$r(t+w) = r(t) \qquad s(t+w) = s(t) \qquad t \varepsilon E \tag{4.5}$$

Introduzcamos en una vecindad de L las coordenadas curvilíneas u,v mediante las relaciones siguientes: ([4] , [13])

$$\begin{cases} x = r(u) - vs'(u) \\ y = s(u) + vr'(u) \quad . \end{cases} \tag{4.6}$$

Pongamos

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = N(u) + vR(u)$$

donde

$$M(u) = r'^{2}(u) + s'^{2}(u) \qquad R(u)=s'(u)r''(u)=r'(u)s''(u) \tag{4.7}$$

Como R(u) es continua y acotada, para v suficientemente pequeño se tiene que es $J > 0$.

Con el cambio (4.6) los sistemas (4.1) y (4.2) se transforman respectivamente en los sistemas

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u,v) \\ \frac{dt}{dt} = G(u,v) \end{cases} \tag{4.1'}$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u,v) + h_1(t,u,v) \\ \frac{dv}{dt} = G(u,v) + h_2(t,u,v) \end{cases} \tag{4.2'}$$

donde

$$F(u,v) = \frac{1}{J}\left[Pr'(u) + Qs'(u)\right]$$

$$G(u,v) = \frac{1}{J}\left[(r'(u)-vs''(u))Q-(s'(u)+vr''(u))P\right]$$

$$h_i(t,u,v) = \frac{1}{J}\left[r'(u)f+s'(u)g\right]$$

$$h_2(t,u,v) = \frac{1}{J}\left[(r'(u)-vs''(u))g-(s'(u)+vr''(u))f\right] .$$

En estas igualdades las funciones P y Q se evalúan en $(r(u)-vs'(u),$ $s(u)+vr'(u))$ y las funciones f y g en $(t,r(u)-vs'(u),s(u)+vr'(u))$.

Notemos que $F(u,0) \equiv 1$ y $G(u,0) \equiv 0$. Además

$$F, G, \frac{F}{v} \text{ y } \frac{G}{v}$$

son funciones continuas.

Pongamos $\overline{U}(u,v) = F(u,v)-1$. Es inmediato que

$$\overline{U}(u,v) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 0 \quad \text{si } v \rightarrow 0 \quad \text{con } u \in E.$$

También podemos escribir

$$G(u,v) = A(u)v+W(u,v)$$

donde $A(u) = \frac{\partial G}{\partial v}(u,0)$ y se tiene que

$$\frac{W(u,v)}{v} \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 0 \quad \text{si} \quad v \rightarrow 0, \quad u \in E.$$

Resumiendo, el sistema (4.2') queda en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 1 + \overline{U}(u,v) + h_1(t,u,v) \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = A(u)\ v\ W(u,v) + h_2(t,u,v) \end{cases} \tag{4.8}$$

Donde se tiene que:

$$\left|\overline{U}(u,v)\right| + \left|\frac{W(u,v)}{v}\right| \to 0 \quad \text{si} \quad v \to 0,\ u \in E \tag{4.9}$$

Además los miembros derechos de (4.8) son funciones periódicas respecto a u.

Pongamos

$$\nu = \frac{1}{w} \int_0^w A(u)\,du \ .$$

En el caso que nos interesa, es decir, siendo L un ciclo límite inestable, se tiene $\nu \geq 0$. Sea ahora

$$G(u) = e^{\nu u - \int_0^u A(s)ds}$$

G(u) es continuamente diferenciable, positiva y w-periódica respecto a u.

Consideremos el sistema (4.8) en la región

$$R = \{(u,v,t):\ u \in E,\ |v| \leq a,\ t \geq t_o\}$$

donde $t_o \in E$ y $a > 0$. Si $\beta > 0$ es suficientemente pequeño, entonces

$$\Phi = \{(u,v,t): u \in E, \ |G(u),v| \leq \beta, \ t \geq t_o\} \subset R \ .$$

Hagamos ahora el cambio

$$z = G(u).v \tag{4.10}$$

El sistema (4.8) queda en la forma

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 1 + U(u,z) + f_1(t,u,z) \\ \frac{dz}{dt} &= \nu z + Z(u,z) + f_2(t,u,z) \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde

$$U(u,z) = \overline{U}(u, \frac{z}{G(u)}) \quad f_1(t,u,z) = h_1(t,u, \frac{z}{G(u)})$$

$$Z(u,z) = G(u)W(u, \frac{z}{G(u)}) + \nu z \ U(u,z) - zA(u)U(u,z)$$

$f_2(t,u,z) = G(u)h_2(t,u, \frac{z}{G(u)}) + \nu z \ f_1(t,u,z) - zA(u)f_1(t,u,z)$ y la región Φ se transforma en

$$\Psi = \{(t,u,z): u \in E, |z| \leq \beta, t \geq t_o\}$$

En lo que sigue, nos referiremos al sistema (4.11) en la región Ψ o una parte de ella.

§2. LEMAS PREPARATORIOS.

Consideraremos que existe una función $V_2(t,z)$ de clase C^1 definida positiva en el conjunto $\{(t,z): t \geq t_o, |z| \leq \beta\}$; es decir, existe $\phi(r) \in K$ en $[0,\beta)$ tal que

$$V_2(t,z) \geq \phi\ |z|), \quad V_2(t,0) = 0 \quad (t,u,z) \in \Psi. \tag{4.12}$$

En virtud de que $V_2 \in C^1$, y de la continuidad y periodicidad respecto a u de las funciones f_1 y f_2 podemos asegurar que existen funciones $p_i(t)$, $w_i(t)$ i=1,2 continuas en $t \geq t_o$ que verifican

$$\left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t,z) \right| \leq P_1(t) \qquad \left| \frac{\partial V_2}{\partial z}(t,z) \right| \leq P_2(t) \tag{4.13}$$

$$|f_1(t,u,z)| \leq w_1(t) \qquad |f_2(t,u,z)| \leq w_2(t) \tag{4.14}$$

Supongamos que se tiene

$$\frac{\partial V_2}{\partial z}(t,z).\left[\nu z + Z(u,z)\right] \geq \phi_2(t,V_2(t,z)) \tag{4.15}$$

donde $\phi_2(t,r)$ pertenece a la clase K en $[0,\delta)$ y $\delta > 0$ es suficiente - mente pequeño de modo que $\sum \subset \Psi$, donde

$$\sum = \{(t,u,z) : t \geq t_o, \ u \in E, \ V_2(t,z) \leq \delta\} .$$

Consideremos las siguientes partes de $F_r \sum$:

$$\Omega_o = \{(t,u,z) \in \sum : t=t_o, \ V_2(t,z) < \delta\}$$

$$\Omega_o = \{(t,u,z) \in \sum : t \geq t_o, \ V_2(t,z) = \delta\}$$

Denotemos por $\sum_{ee}$ y $\sum_{se}$ los conjuntos de puntos de entrada y salida estricta respectivamente de $\sum$ en relación con el sistema (4.11).

LEMA 4.1.

Bajo las hipótesis anteriores, supongamos que

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \frac{p_2(t)w_2(t)+p_1(t)}{\phi_2(t,\delta)} < 1 . \tag{4.16}$$

Entonces, si t_o es suficientemente grande, se tienen:

$$\textstyle\sum_{ee} = \Omega_o \qquad \sum_{se} = \Omega_2 \tag{4.17}$$

DEMOSTRACION.

Es obvio que $\Omega_o \subset \sum_{ee}$. Es suficiente comprobar que

$$V_2'\Big|_{\Omega} > 0 \tag{4.18}$$

donde V_2' es, naturalmente, la derivada de V_2 respecto a (4.11). Pero

$$V_2' = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial z} \cdot \left[\nu z + Z(u,z)\right] + \frac{\partial V_2}{\partial z} \cdot f_2(t,u,z)$$

$$\geq \phi_2(t, V_2(t,z)) - P_2(t)w_2(t) - P_1(t)$$

y utilizando (4.16) se obtiene (4.18) para t_o suficientemente grande.

OBSERVACION 4.1.

Si se tiene que es $\nu > 0$, tomando $V_2(t,z) = z^2$, pueden conside - rarse $(r) = r^2$, $P_1(t) = 0$, $P_2(t) = 2\beta$. Como se satisface (4.9) puede probarse que $Z(u,z) = O(z)$ si $z \to 0$, y entonces para δ pequeño (tomado, por supuesto, a priori) es por ejemplo $|Z(u,z)| \leq \frac{\nu}{2} |z|$. Así se satisfac e (4.15) con $\phi_2(t,r) = 3\nu r$. Naturalmente, pueden considerarse otras variantes para $\phi_2(t,r)$. En el caso que xonsideramos, la condición (4.16) se convierte en

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{2\beta\, w_2(t)}{3\nu\delta} < 1$$

para lo cual es suficiente, por ejemplo, que $w_2(t) \to 0$ si $t \to +\infty$, pero esto es consecuencia de (4.3).

Si el ciclo límite es inestable con $\nu = 0$ (en cuyo caso se trata de un ciclo límite complejo [4]) y se tiene que

$$Z(u,z) = C(u)z^k + o(z^k) \quad (z \to 0)$$

con $k > 0$ impar y $C(u) \geq \gamma > 0$, un razonamiento semejante demuestra que también puede tomarse $V_2(t,z) = z^2$ con $\phi_2(t,r) = \gamma t^\alpha r^{\frac{k+1}{2}}$, $\alpha < 0$, y el resto de las consideraciones señaladas para $\nu > 0$.

Si $(t,\bar{u},\bar{z})$ y $(t,\bar{\bar{u}},\bar{\bar{z}})$ están en $\sum$ pondremos $\Delta u = \bar{\bar{u}}-\bar{u}$, $\Delta z=\bar{\bar{z}}-\bar{z}$. Notemos que si $|\bar{\bar{z}}|$ y $|\bar{z}|$ son pequeños y $t \geq t_o$, entonces $(t, \Delta u, \Delta z) \varepsilon \sum$. Supongamos ahora que existe una función $V_1(t,u)$ de clase C^1 para $t \geq t_o$, $u \varepsilon E$ y tal que

$$V_1(t,u) \geq \phi_1(|u|) \qquad t \geq t_o, \qquad u \varepsilon E \tag{4.19}$$

con $\phi_1(r)$ de clase K en $[0,+\infty)$, y que las funciones f_1 y f_2 de (4.11) satisfacen la condición

$$\left| f_i(t,\bar{\bar{u}},\bar{\bar{z}})-f_i(t,\bar{u},\bar{z})\right| \leq L_i(t)\{V_1(t,\Delta u)+V_2(t,\Delta z)\} \tag{4.20}$$

Dadas dos soluciones $(\bar{u}(t),\ \bar{z}(t))$ y $(\bar{\bar{u}}(t),\bar{\bar{z}}(t))$ de (4.11) adoptemos las siguientes notaciones

$$A(t) = L_1(t)\left| \frac{\partial V_1}{\partial u}(t,\Delta u(t))\right| \quad B(t)=L_2(t)\left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t,\Delta z(t))\right| \tag{4.21}$$

$$C(t) = \frac{\left| \frac{\partial V_1}{\partial u}(t,\Delta u(t))\right|}{V_2(t,\Delta z(t))} \qquad D(t) = \frac{\left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t,\Delta z(t))\right|}{V_2(t,\Delta z(t))} \tag{4.22}$$

$E(t) = 2A(t) + 2B(t) + C(t) + D(t)$.

Supondremos que

$$\int_{t_o}^{+\infty} E(t)\,dt < +\infty \tag{4.23}$$

y que $V_2(t,z)$ satisface

$$V_2(t,z) \leq \phi_3(|z|) \text{ con } \phi_3 \in K \text{ en } [0,\ \beta)\ . \tag{4.24}$$

También, que existen una función continua y positiva $\mu(t)$ y un número $m \geq 1$ tales que

$$\frac{\partial V_2}{\partial z}(t,\Delta z).\left[\nu\Delta z + Z(\bar{\bar{u}},\bar{\bar{z}}) - Z(\bar{u},\bar{z})\right] \geq \mu(t)V_2^m(t,\Delta z) \tag{4.25}$$

donde

$$\int_{t_o}^{+\infty} \mu(t)\,dt = +\infty$$

y sea también

$$\frac{\partial V_1}{\partial u}(t,\Delta u).\left[U(\bar{\bar{u}},\bar{\bar{z}}) - U(\bar{u},\bar{z})\right] \leq 0 \ . \qquad (4.27)$$

LEMA 4.2.

Sean las condiciones (4.12)(4.19)(4.20)(4.23)(4.24)(4.25)(4.26) y (4.27). Entonces, si tenemos dos soluciones $(\bar{u}(t),\bar{z}(t))$ y $(\bar{\bar{u}}(t),\bar{\bar{z}}(t))$ que pasan respectivamente por los puntos de $\sum$ $(T_o,\bar{u}_o,\bar{z}_o)$ y $(T_o,\bar{\bar{u}}_o,\bar{\bar{z}}_o)$, y si

$$V_1(t,\Delta u_o) < V_2(t,\Delta z_o) \qquad (4.28)$$

donde $\Delta u_o = \bar{\bar{u}}_o - \bar{u}_o$, $\Delta z_o = \bar{\bar{z}}_o - \bar{z}_o$, una de las soluciones tiene que salir de $\sum$ con el crecimiento de t.

DEMOSTRACION.

Se hace mutatis mutandi como la del Lema 3.2.

OBSERVACION 4.2.

En el caso $\nu > 0$, el Lema 4.2 también puede simplificarse considerablemente; basta que las funciones $f_i(t,u,z)$ satisfagan la condición

$$\left|f_i(t,\bar{\bar{u}},\bar{\bar{z}}) - f_i(t,\bar{u},\bar{z})\right| \leq d\ \{\Delta u + \Delta z\}$$

donde $0 < d < {}^{\nu}/4$. (Véase [27] para la demostración).

LEMA 4.3.

Sea $(u(t),z(t))$ una solución de (4.11) tal que $(t,u(t),z(t)) \in \sum$ para $t \geq t_o$. Supongamos las hipótesis del Lema 4.1 pero en lugar de (4.16) la condición más fuerte:

$$p_1(t) + p_2(t)\, w_2(t) = 0\,(\phi_2(t,\gamma)) \qquad (t \to +\infty) \tag{4.29}$$

para cualquier γ, $0 < \gamma \leq \delta$. Además

$$\int_{t_o}^{+\infty} \phi_2(t,\gamma)\,dt = +\infty\ . \tag{4.30}$$

Entonces se cumplen:

(a) $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$ (b) $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$.

DEMOSTRACION.

(a) Probemos que $\lim_{t\to+\infty} V_2(t,z(t)) = 0$. Supongamos por el absurdo que

$$\limsup_{t\to+\infty} V_2(t,z(t)) = q \qquad 0 < q \leq \delta \tag{4.31}$$

y consideremos la región

$$B = \{(t,u,z) \in \textstyle\sum : q/2 < V_2(t,z) \leq \delta\}\ .$$

Existe una sucesión $\{t_k\}$ tal que $t_k \uparrow +\infty$ y $(t_k,u(t_k),z(t_k)) \in B$. Como $V_2(t,z)$ es continua y se supone que $(t,u(t), z(t)) \in \sum$, para cada k existe una vecindad a la derecha de t_k, sea $[t_k, \delta_k]$ tal que para $t \in [t_k, \delta_k]$ se tiene que $(t, u(t), z(t)) \in B$. De (4.11) y usando(4.13)

(4.14) y (4.15) tenemos que

$$V_2' \geq \phi_2(t,V_2(t,z(t))) - p_1(t) - p_2(t)\, w_2(t)$$

$$\geq \phi_2(t,\, {}^{q}/2) - p_1(t) - p_2(t)\, w_2(t)$$

teniendo en cuenta (4.29), para t suficientemente grande es

$$V_2' \geq \frac{1}{2}\,\phi_2(t,\, {}^{q}/2) > 0 \ . \qquad (4.32)$$

De modo que si tomamos t_k tal que se verifique (4.32) para $t \geq t_k$, resulta que $(t,u(t),\, z(t)) \in B$ para $t \geq t_k$ y no solamente para t en $[t_k,\, \delta_k]$. Si integramos en (4.32) sobre $[t_k,t]$ con $t > t_k$ obtenemos

$$V_2(t) \geq V_2(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t} \phi_2(s,\, {}^{q}/2)\,ds$$

y teniendo en cuenta (4.30) se contradice (4.31).

De (4.12) queda entonces que $z(t) \to 0$ si $t \to +\infty$.

(b) Si δ es suficientemente pequeño y t suficientemente grande, entonces

$$|U(u,z)|+|f_1(t,u,z)| < 1/2$$

con lo cual $\frac{du}{dt} > 1/2$ y se deduce (b).

§3. RESULTADOS FUNDAMENTALES.

TEOREMA 4.1.

Supongamos que se satisfacen las hipótesis de los Lema 4.1 a 4.3.

Entonces en la región $\sum$ existe una variedad bidimensional Γ w-periódica respecto a u que está constituida por curvas integrales de (4.11) y es positivamente invariante. Además, toda trayectoria que pase por un punto de $\sum \setminus \Gamma$ abandona $\sum$ con el crecimiento de t.

DEMOSTRACION.

Para cada $t^* \geq t_o$ y $u^* \varepsilon E$ consideremos el conjunto

$$M = \{(t,u,z):\ t=t^*\ ,\quad u = u^*\ ,\ V_2(t,z) \leq \delta\}$$

$M \cap \sum_{se}$ no es un retracto de M y si lo es de $\sum_{se}$. La demostración sigue como en el Teorema 3.1; ahora Γ es una variedad bidimensional, y su periodicidad respecto a u es consecuencia de la periodicidad del miembro derecho de (4.11).

Regresemos ahora al sistema original (4.2). Como los cambios de variable efectuados son regulares, a Γ corresponde una variedad bidimensional en el espacio de las variables (t,x,y). La curva $\Gamma \cap \{t=cte\}$ para cualquier constante $\geq t_o$ es w-periódica respecto a u, y en el espacio (t,u,v) es de la forma v = h(u) con h w-periódica. De aquí que la curva correspondiente en el espacio (t,x,y) es de la forma {t=cte , x = x(u), y=y(u)} con x,y w-periódicas. De este modo, a Γ corresponde en el espacio (t,x,y) una superficie tubular $\mathcal{A}$. Si es (u(t), z(t)) una solución de (4.8), la solución correspondiente de (4.2) está dada por

$$\begin{cases} x(t) = \phi(u(t)) - v(t)\ \psi'(u(t)) \\ y(t) = \psi(u(t)) + v(t)\ \phi'(u(t)) \end{cases}$$

Luego si $(t, u(t), z(t)) \in \Gamma$, $(t, x(t), y(t)) \in \mathcal{A}$ y la proyección $(x(t), y(t))$ se aproxima, si $t \to +\infty$, al ciclo límite L (según el Lema 4.2). Tenemos entonces el siguiente.

TEOREMA 4.2.

Sean los sistemas (4.1) y (4.2) tales que se cumplen las hipótesis señaladas. Entonces existe una superficie tubular $\mathcal{A}$ positivamente invariante para (4.2) tal que sus secciones transversales se aproximan, si $t \to +\infty$, al cilindro de directriz L y generatrices paralelas al eje t. $\mathcal{A}$ es además una variedad inestable.

EJEMPLO 4.1.

Desarrollemos el siguiente ejemplo sencillo para ilustrar no sólo el resultado principal sino los pasos intermedios.

Sean los sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) = P(x,y) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) = Q(x,y) \end{cases} \tag{4.33}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2-1) + \frac{x}{t} \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2-1) + {}^{y}/t \end{cases} \tag{4.34}$$

Es obvio que

$$L: \begin{cases} x = \cos t = \phi(t) \\ y = \operatorname{sen} t = \psi(t) \end{cases}$$

es un ciclo límite de (4.33). El índice de Poincaré de L respecto a (4.33) es $h=2>0$ luego es un ciclo límite inestable.

$f(t,x,y) = \frac{x}{t}$, $g(t,x,y) = \frac{y}{t}$ y (4.3) es inmediata. El cambio(4.6) se expresa por

$$\begin{aligned} x &= (1-v)\cos u \\ y &= (1-v)\,\mathrm{sen}\, u \end{aligned} \tag{4.35}$$

y por supuesto $v = 0$ corresponde a L. $M(u) = 1$ y $R(u) = -1$ luego $J=1-v$. Se comprueba facilmente que se tiene:

$$F(u,v) = 1 \qquad G(u,v) = -(1-v)\left[(1-v)^2-1\right]$$

$$A(u) = 2 \qquad W(u,v) = -3v^2 + v^3$$

$$h_1(t,u,v) = 0 \qquad h_2(t,u,v) = \frac{v-1}{t}$$

$$\bar{U}(u,v) = 0.$$

El sistema (4.2') es entonces en este caso

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 1 \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = 2v + v^3 - 3v^2 + \dfrac{v-1}{t} \end{cases} \tag{4.36}$$

Ahora es $\nu = 2$, $G(u) = 1$ y $z = v$, de modo que (4.11) es (4.8) cambiando v por z:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 1 \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = 2z + z^3 - 3z^2 + \dfrac{z-1}{t} \end{cases} \tag{4.37}$$

Analicemos ahora las hipótesis de los lemas para las posibilidades señaladas cuando es $\nu > 0$. Además de lo señalado en la Observación 4.1, puede considerarse $w_2(t) = \frac{\beta+1}{t}$. Si consideramos $t_o > 2$, entonces se cumple la condición de Lipschitz planteada en la observación 4.2 con con $0 < d = \frac{1}{t} < \nu/4$. Las hipótesis del Lema 4.3 también se verifican, obviamente. Entonces el sistema (4.34) posee una variedad tubular con las características que se señalan en el Teorema 4.2.

APENDICE.

I.1. (Ver Observación 1.2).

Sea $h_1 < h$ y tomemos $\delta = \max \{W(y) : |y| \leq h_1\}$. Como $V(t,y) \geq W(y)$, para todo $t \geq t_o$ existen valores de y tales que $V(t, y) \geq \delta$. Siendo $V(t,0) = 0$ se tiene que para cada t, $V(t,y)$ toma todos los valores entre 0 y δ por la continuidad de $V(t,y)$. Si $\varepsilon < \delta$, a partir de cierto t es $\ell_\xi(t) < \delta$ y existirá (para cada t) un y tal que $V(t,y) = \ell_\xi(t)$.

I.2. (Ver comentario que sigue a la Observación 1.6).

(a) Teorema de Malkin ([75]).

La solución trivial del sistema (1.1) es estable si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i) Existe $V(t,y)$ definida positiva con cota superior infinitamente pequeña, de clase C^1.

(ii) Existe V^* definida positiva tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{dV}{dt} + V^* \right) = 0$$

y el límite es uniforme en compactos del tipo $0 < \lambda \leq |y| \leq \delta$.

Veamos que (i) y (ii) implican incluso el siguiente caso particular de la condición C.

Existe $V(t,y)$ definida positiva y C^1 tal que para $\xi > 0$ dado, existen $T_\xi \geq t_o$ y $h_\xi(t) \in C[T_\xi, +\infty)$ que cumplen:

$$h_\xi(t) < 0, \quad \int_{T_\xi}^{+\infty} h_\xi(t)dt = -\infty \ , \ V'\Big|_{D_\xi} \leq h_\xi(t) \quad .$$

DEMOSTRACION

(ii) implica que para todos λ y δ con $0 < \lambda \leq \delta$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $T_\xi \geq t_o$ tal que si $t \geq T_\xi$ y $\lambda \leq |y| \leq \delta$, entonces

$$\frac{dV}{dt} \leq - V^* + \xi \ . \tag{A.1}$$

Como $V^*(t,y) \geq \ddot{W}(|y|)$ (por ser definida positiva) es

$\Theta(t) = \inf\{V^*(t,y): t \geq t_o, \lambda \leq |y| \leq \delta\} \leq \inf\{\bar{W}(|y|): \lambda \leq |y| \leq \delta\} = 2\beta > 0.$

Aquí $\Theta(t)$ y β dependen, naturalmente, de λ y δ.

$$-V^*\Big|_{\substack{\lambda \leq |y| \leq \delta \\ t \geq t_o}} \leq \sup -V^*(t,y): t \geq t_o, \lambda \leq |y| \leq \delta\} =$$

$$= -\inf\{V^*(t,y): t \geq t_o, \lambda \leq |y| \leq \delta\} \leq -2\beta \ .$$

Si ahora tomamos ξ tal que $0 < \xi < \beta$ quedaría en (A.1) $\frac{dV}{dt} \leq - \beta$. Resumiendo, tenemos la afirmación siguiente:

Para todos λ y δ con $0 < \lambda \leq \delta$ existe $\beta > 0$ y existe $T_\beta \geq t_o$ tales que

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{\substack{t \geq T_\beta \\ \lambda \leq |y| \leq \delta}} \leq - \beta \quad .$$

Consideramos ahora δ fijo y λ variando en $(0,\delta]$. Del hecho de que V tiene cota superior infinitamente pequeña se obtiene que:

Dado $\xi > 0$ existe $\lambda_\xi > 0$ tal que si $V(t,y) \geq \xi$, entonces $|y| \geq \lambda_\xi$.

Naturalmente, puede considerarse $\lambda_\xi < \delta$.

Para este λ_ξ, utilizando (A.2) tendremos que existen $\beta = \beta(\xi) > 0$ y T_ξ tales que

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{t \geq T_\xi \\ \lambda_\xi \leq |y| \leq \delta}} \leq -\beta(\xi) \tag{A.3}$$

Pero como $\{(t,y):\ t \geq T_\xi,\ V(t,y) \geq \xi\} \subset \{(t,y):\ t \geq T_\xi\ \ |y| \geq \lambda_\xi\}$ de (A.3) se tiene que

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{t \geq T_\xi \\ V(t,y) \geq \xi \\ |y| \leq \delta}} \leq -\beta\ (\xi)$$

Notando que $\delta > 0$ es fijo, basta considerar $h < \delta$ y se tiene (1.13) con $h_\xi(t) = -\beta\ (\xi)$.

(b) *Resultado de W. Hahn* ([48] Cap. II sec. 4 pág. 16.4).

Este resultado es el siguiente: la solución trivial de (1.1) es asintó ticamente estable si existe $V(t,y)$ definida positiva con cota superior infinitamente pequeña y existen $\phi(r) \in K$ y $\xi(t) > 0$ tal que para $t \geq t_0$ y $|y|$ pequeña es $V' \leq \xi(t)\ \phi(|y|)$, donde $\int_{t_0}^{\infty} \xi(t)dt = +\infty$.

Para ver que se cumple la condición C, tomamos $K = -\infty$ y para $\xi > 0$ cualquier $T_\xi \geq t_o$. Notemos que:

Para $\xi > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\xi)$ tal que si $V(t,y) \geq \xi$ entonces $|y| \geq \delta$. Como $\phi(r) \in K$, $\phi(|y|) \geq \phi(\delta)$ y tomando $h_\xi(t) = -\xi(t)\,\phi(\delta)$ se cumplen (1.12) y (1.13).

(c) Teorema de Haddock ([46], 3. Teorema 3.1).

La solución trivial de (1.1) es asintóticamente estable si: Existen funciones a,b,c de clase K y funciones g y h de $[t_o, +\infty)$ en $(0,+\infty)$ continuas y una función $V(t,y): H \to E$ localmente lipschitziana tales que

(i) $a(|y|) \leq V(t,y) \leq g(t)\, b(|y|)$

(ii) $V'(t,y) \leq -h(t)\, c(|y|)$

(iii) $\int_\alpha^\infty h(s)\, c\left[b^{-1}\left(\frac{\eta}{g(s)}\right)\right] ds = +\infty$ para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeño.

Tomemos nuevamente $k = -\infty$ y para $\xi > 0$, T_ξ cualquiera y

$$h_\xi(t) = -h(t)\, c\left[b^{-1}(\xi/g(t))\right].$$

Si $V(t,y) \geq \xi$ por (i) es $g(t)\, b(|y|) \geq \xi$ y $|y| \geq b^{-1}(\xi/g(t))$. Por lo tanto siempre que $V(t,v) \geq \xi$

$$V'(t,y)\Big|_{V(t,y)\geq \xi} = V'(t,y)\Big|_{|y|\geq b^{-1}(\xi/g(t))}$$

$$\leq -h(t)\, c(|y|)\Big|_{|y|\geq b^{-1}(\xi/g(t))} \leq -h(t)\, c\left[b^{-1}(\xi/g(t))\right] = h_\xi(t)$$

luego se cumple la condición C.

APENDICE I.3. (Ver teorema 1.2).

PROPOSICION.

Si se cumplen las hipótesis del Teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.2.

DEMOSTRACION.

Las hipótesis del Teorema de Liapunov, utilizando las funciones de la clase K mencionada anteriormente, pueden formularse así:

Existe $V(x,t): \{|x| < h\} \times [t_o, +\infty) \to E$ y tres funciones ϕ, Ψ, γ de la clase K en $[0,h)$ tales que

$$V(x,t) \geq \phi(|x|) \qquad |x| < h, \quad t \geq t_o \tag{1}$$

$$\gamma(|x|) \geq V(x,t) \qquad |x| < h, \quad t \geq t_o \tag{2}$$

$$\dot{V}(x,t) \leq \Psi(|x|) \qquad |x| < h, \quad t \geq t_o \tag{3}$$

Comprobaremos que se satisface la condición B con $T = t_o$. La demostración se hace en dos pasos:

(a) Dada $\delta \in K$ existe $\ell(t) \in C^1[t_o, +\infty)$ que satisface

$$\ell(t) > 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} \ell(t) = 0 \tag{4}$$

y además que

$$\delta[\ell(t)] > -\ell'(t) \tag{5}$$

En efecto, tomemos $\bar{\delta} \in K$ tal que $\bar{\delta}(x) < \delta(x)$ si $x \neq 0$ y además $\bar{\delta} \in C^1[0,h)$. Sea la ecuación

$$x'(t) = - \bar{\delta}(x) \tag{6}$$

con la condición inicial

$$x(t_o) = x_o > 0 \tag{7}$$

El problema (6)-(7) tiene una solución única $x(t,t_o,x_o)$ que está definida para todo $t \geq t_o$. Se tiene que:

(i) $x'(t,t_o,x_o) < 0$ luego $x(t,t_o,x_o)$ es decreciente en t.

(ii) $x \equiv 0$ es solución de (6) y por tanto $x(t,t_o,x_o) > 0$ para todo $t \geq t_o$.

(iii) $\lim_{t\to+\infty} x(t,t_o,x_o) = 0$, pues si fuese $\lim_{t\to+\infty} x(t,t_o,x_o) = L > 0$ de (6) se obtiene que

$$x(t,t_o,x_o)-x_o = - \int_{t_o}^{t} \bar{\delta}[x(s,t_o,x_o)]ds \leq \int_{t_o}^{t} \bar{\delta}[L]ds$$

de donde quedaría que $x(t,t_o,x_o) \to -\infty$ si $t \to +\infty$ en contradicción con (ii).

Basta tomar entonces $\ell(t) = x(t,t_o,x_o)$.

(b) Sea ahora la función $\Psi \circ \gamma^{-1} \in K$. Según (a) podemos tomar $\ell(t)$ que satisfaga (4) y

$$\Psi[\gamma^{-1}(\ell(t))] > - \ell'(t) \qquad t \geq t_o \tag{8}$$

Sea $R_o = \{(t,x): t \geq t_o,\ V(x,t) = \ell(t)\}$.

De (2) tenemos que para $(t,x) \in R_o$

$$\gamma^{-1}[\ell(t)] \leq |x|$$

de donde

$$-\Psi(|x|) \leq -\Psi[\gamma^{-1}(\ell(t))]. \tag{9}$$

Usando ahora (3) y (9) obtenemos que

$$\dot{V}(t,x)\Big|_{R_o} \leq -\Psi[\gamma^{-1}(\ell(t))] < \ell'(t)$$

y queda comprobada la condición B.

APENDICE I.4. (Véase el Teorema 1.2)

Es bien conocido que a sistemas lineales de coeficientes constantes, a casos de estabilidad según la primera aproximación, etc. pueden aplicarse los teoremas del 2do método de Liapunov. Para el caso de sistemas lineales de coeficientes variables, uno de los resultados más generales existentes es el siguiente:

Sea el sistema

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

y sea $\mu(t)$ el mayor valor propio de la matriz

$$\frac{1}{2}\{A(t) + [A(t)]^t\} .$$

Entonces, si se tiene

$$\int_{t_o}^{+\infty} \mu(t)dt = -\infty \tag{2}$$

la solución trivial de (1) es asintóticamente estable. (Ver por ejemplo [58]).

Bajo estas hipótesis, es fácil ver que se satisface también la condición B, incluso tomando $V(x,t) = x^2$. En efecto, se toma una función $\lambda(t)$ tal que $\lambda(t) > \mu(t)$ si $t \geq T$ y además que verifique

$$\int_{t_o}^{+\infty} \lambda(t)dt = -\infty$$

La función $\ell(t) = \exp\left[2 \int_{t_o}^{t} \lambda\ (s)ds\right]$ satisface las restricciones de la condición B.

APENDICE III.1. (Ver comentario anterior a (3.2)).

Consideremos una región R E^k que contenga al origen, $Q = [a,+\infty) \times R$ y las condiciones siguientes:

(a) Existe $W(x)$ definida y continua en R tal que

$$V(t,x) \geq W(x) > 0 \text{ si } (t,x) \in Q,\ x \neq 0;\ V(t,0) = 0 \qquad (1)$$

(b) Existe $\phi \in K$ en $[0,\gamma)$ donde $\gamma = \sup\{|x| : x \in R\}$ que verifica

$$V(t,x) \geq \phi(|x|) \quad \text{si} \quad (t,x) \in Q;\ V(t,0) = 0 \qquad (2)$$

La condición (b) es ligeramente más fuerte que (a) por lo siguiente: si se satisface (b) basta tomar $W(x) = \phi(|x|)$ y se tiene (a). Recíprocamente, si R es compacto y se satisface (a) ponemos:

$$\tilde{\phi}(r) = \inf \{W(x) : |x| \geq r,\ x \in R\} \qquad (3)$$

$\tilde{\phi}(r)$ es continua y puede ser minorada por una función $\phi \in K$ en $[0,\gamma)$ que satisfaga (2); por lo tanto se tiene (b).

Pero si R no es compacto puede ser que el ínfimo en (3) sea cero aunque se tenga $r \geq 0$, y no se puede encontrar una función $\phi \in K$ que satisfaga (2). Esto ocurre si $W(x) \to 0$ cuando x se aproxima a algún punto de F_rR. Sin embargo, basta tomar una sub-región R' de R acotada tal que R^{-1} R, y entonces se satisface (b) con $\phi \in K$ en $[0,\gamma')$ donde $\gamma' = \sup\{|x| : x \in R'\}$.

Por ejemplo, si en E^2 tomamos

$$V(t,x) = W(x) = x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 \qquad x=(x_1,x_2)$$

se satisface (a) en $R = \{(x_1,x_2): x_1^2 \times x_2^2 < 1\}$ pero (b) solamente para una $\phi \in K$ en $[0,\gamma)$ con $\gamma < 1$ y no con $\gamma = 1$.

BIBLIOGRAFIA

|1| Arts, J.M. and Slentelberrg, L. Monotone functions in stability theory. Delft. Progr. Rep. 2 (1976).

|2| Amelkin, V.V.; Lucashevich, N.A.; Sadovakii, A.P. Oscilaciones no lineales en sistemas de segundo orden. Isd. B.G. U. Minsk (1982).

|3| Anashkin, O.V. Sobre la estabilidad asintótica en sistemas no lineales (ruso). Difer. Urav. XIV Nº 8 (1978).

|4| Andronov, A.A. et al. Theory of bifurcations of dinamic systems on a plane. I.P.S.T. Jerusalem (1971).

|5| Antosiewicz, H.A. A survey of Lyapunov's Second Method Contr. To the theory of Nonl. Oscill. 4, III 8 (1958).

|6| ————— . Recent Contributions to Lyapunov's Second Method. Proc. NATO Adv. St. Inst. Padua, Italy. Ed. Oderisi, Gubbio(1966).

|7| ————— . Recent contributions to Lyapunov's second method. Coll. Internat. du Centre Nat. de la Rech. Scient. Nº 148. Marseille, (1964).

|8| ——— and Davis, P. Some implications of Lyapunov's Conditions for Stability. J. Rat. Mech. Anal. V3 Nº 4 (1954).

|9| Arnold, V.I. Ordinary Differential Equations. Mit Press (1973).

|10| Atkinson, P.V. On Stability and Asymptotic Equilibrium. Aun of Math. V. 68 Nº 3 Nov. (1958).

|11| Barbashin, E.A. y Krasovskii, N.N. Sobre la estabilidad global del movimiento. Dok. Akad. Nauk SSR 86 (1952).

|12| Barbashin, E.A. Funciones de Liapunov (ruso) F.M.B.I. (1970).

|13| Bautin, N.W.; Leontovich, E.A. Métodos y técnicas de la investigación cualitativa de los sistemas dinámicos en el plano. Nauka, Moscú (1976).

|14| Bhatia, N.P. and Szegö, G.P. Dynamical Systems: Stability Theory and Applications. Lecture Notes in Math. 35 Springer Verlag(1967).

|15| Bliagoz, Z.U. Criterios de estabilidad en sistemas no lineales generales (ruso). Viest. Len. Gas. Univ. Nº 13 (1978).

|16| Bodounov, N.A. Sobre variedades de O-curvas en sistemas multidimensionales (ruso). Difer. Urav. Tomo XI Nº 5 (1975).

|17| ————, Sobre conjuntos localmente invariantes en sistemas autónomos de 3er. orden. Difer. Urav. Tomo XI Nº 7 (1975).

|18| ————, Teoría de Estabilidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Universidad de la Habana (1980).

|19| Brauer, F. Perturbation of nonlinear systems of differential equations. J. Math. Anal. Appl. 14 (1966).

|20| ————, Some refinements of Lyapunov's second method. Canad. J. Math. 17 (1965).

|21| Burton, T.A. Lyapunov functions and boundedness. J. Math. Anal. Appl. V. 58 Nº 1 (1977).

|22| ————. An Extension of Lyapunov's Direct Method. J. Math. Anal. Appl. 28 Nº 3 (1969).

|23| ————. Differential Inequalities for Lyapunov Functions. Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. V.1 Nº 4 (1977).

|24| ————. and Hooker, J.W. On solutions of differential equations tending to zero. J. für die reine und ang. Mathematik. Sond. aus Band 267. Seite 151 bis 165 (1974).

|25| Bushard, L.B. Behavior of the Periodic Surface for a periodically perturbed autonomous system and periodic solutions. J. Diff. Eq. 12 (1972).

|26| Bushaw, D. Stabilities of Lyapunov and Poisson Types SIAM Rev. V. 11 Nº 12 (1969).

|27| Castro, A. Perturbación de un Sistema Bidimensional con ciclo límite inestable. Ciencias Matemáticas V. III Nº 2 (1982).

|28| ———— . Sobre la existencia de una variedad positivamente invariante para cierto sistema de ecuaciones diferenciales. Ciencias Matemáticas V. III Nº 2 (1982).

|29| ———— . Algunos resultados de estabilidad por el método directo de Liapunov. Ciencias Matemáticas V. III Nº 1 (1982).

|30| Cesari, L. Asymptotic behavior and stability problems in ordinari differential equations. Springer Verlag, 3^{th}ed. (1971).

|31| Coddington, E.A. snd Levinson, N. Theory of Ordinary Differential Equations. Mc. Graw-Hill (1955).

|32| Corduneanu, C. Aplicaciones de las desigualdades diferenciales en la teoría de estabilidad. An. Sti. Un. Iasi. Sect. I, 6(1960).

|33| ———. Sur la Stabilité Asymptotique I. An. Sti. Un. Iasi.Sect. I, 5 (1959).

|34| ———. Sur la stabilité asymptotique II. Rev. Math. Pure Appl. 6 (1960).

|35| ———. Sur les inégalités différentielles. Mathematica V. 6 (29) 1 (1964).

|36| Corne, J.L. On the Asymptotic Stability. Ann. Soc. Sei. Bruxe - lles T87, II (1973).

|37| Churin, Yu. V. Conjuntos excepcionales simples de sistemas autónomos casi homogéneos. Diff. Urav. Nº 6 (1973).

|38| ———. Comportamiento de las soluciones de sistemas casi homogéneas con un único conjunto excepcional simple. Diff. Urav. Nº 7 (1973).

|39| Dana, M. Conditions for Lyapunov Stability. J. Diff. Eq. 12 (1972).

|40| Demidovich, B.P. Lecciones sobre la teoría matemática de la estabilidad. Ed. Nauka, Moscú (1967).

|41| Elsgoltz, Lev. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional MIR (1969).

|42| Grimmer. R. Stability of a scalar differential equation. Proc.of the AMS V32 Nº 2 (1972).

|43| Grujic, L.T. Novel development of Lyapunov stability of metion. Int. J. Control V22 Nº 4 (1975).

|44| Habets, P. and Peiffer, K. Classification of Stabilitylike. Concepts and Their Study Using Vector Lyapunov Functions. J. Math. Anal. Appl. 44 (1973).

|45| Haddock, J.R. A Remark on a stability theorem of Marachkoff. Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972).

|46| ———. Some New Results on Stability and Convergence of solu - tions of Ordinary and Functional Differential Equations.Funkcialaj Ekvaciej (Ser. Int.) V 19 Nº 3 (1976).

|47| ———. On Lyapunov Functions for Nonautonomous System. J. Math. Anal. Appl. V 45 Nº 3 (1974).

|48| Hahn, W. Theory and Applications of Lyapunov's Direct Method. Prentice Hall (1963).

|49| ———. Stability of Motion. Springer Verlag (1967).

|50| Hartman, P. Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons Inc. (1964).

|51| Hatvani, L. Attractivity theorems for nonautonomous systems of differential equation. Acta Scientiarum Matematicarum T40 F 3-4 (1978).

|52| ———. Sobre las aplicaciones de las desigualdades diferen - ciales en la teoría de la estabilidad. Vest. Mosk. Univ. Nº 3 (1975).

|53| Hinrichsen, D. y Fernández, J.L. Topología General. Pueblo y Educación (1977).

|54| Hirsch, M.W. and Smals, S. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Acad. Press (1974).

|55| Inselberg, A. and Uula, G. The geometry of Lyapunov functions. Amer. Math. Montly 81 (1974).

|56| Krasovskii, N.N. Algunos problemas de la teoría de estabilidad del movimiento. Moscú (1959).

|57| Krechetov, G.S. Algunas propiedades de las funciones de Liapunov. Diff. Urav. TXIII Nº 6 (1977).

|58| Lakshmikantham, V. and Leela, S. Differential and Integral Inequalities. Ac. Press (1969).

|59| Lakshmikantham, V. Notes en a Variety of Problems of Differential Systems. Arch Rat. Mech. Anal. V 10 Nº 2 (1962).

|60| Lalli, B.S. and Rambally, R.S. On Stability of Solutions of Perturbed Differential Equations. Dynamical System V2 Intern.Symp. (1976). Ax. Press.

|61| La Salle, J.P. Some extensions of Lyapunov's Second Method. IRE Trans. Profes. Gr. Circ. Theory V CT-7 Nº 4 (1960).

|62| ————. Asymptotic Stability Criteria. Proce. Symp. in appl. Math. V 13 Hydrodinamic Instability AMS (1962).

|63| ————. New Stability Results for Nonautonomous Systems. Dyn.

Systems. Proce. of Florida Internat. Symp. (1977).

|64| ———. The Stability of Nonlinear Dynamical Systems Tenth Anniversary AFOSR Scient. Seminar (1966).

|65| ———. Lyapunov's Second Method. Stability Probl. of sol. of Diff. Eq. Proce. of a NATO Adv. St. Inst. Padua. Ed. Oderisi 1966.

|66| ———. Stability and Control. J. SIAM Control Ser A V.1 Nº 1 (1962).

|67| ———. Stability Theory for Ordinary Differential Equations . J. of Diff. Eq. V.4 Nº 1 (1968).

|68| ———. An Lefschetz, S. Stability by Lyapunov's Direct Method. Ac. Press (1961).

|69| Lepschetz, S. Differential Equations: Geometric Theory Interscience publ. 2nd ed.

|70| Liapunov, A.M. Problema General de la Estabilidad del Movimiento. Gostiyisdat (1950).

|71| Macsimkin, N.N. Sobre la estabilidad asintótica y exponencial. Método de las funciones de Liapunov en la dinámica de los sistemas no lineales. Ed. Nauka, Novosibirak (1983).

|72| Magiros, D.G. Unificación and Clasification of Stability Concepts of Dynamical Systems. Gen. Elect. Tech. Rep. (1967).

|73| ———. Remarks on stability concepts of solutions of dynamical systems. Ibid. (1974).

|74| Malkin, J.G. Los métodos de Poincaré y Liapunov en la teoría de oscilaciones no lineales. Costejizdat (1952).

|75| ————. Doklady Akademii Nauk SSSR 18 (1938).

|76| Martinjuk, A.A. Cierto criterio de estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Ukrainian Math. J. 23 (1971).

|77| Massera, J.L. The meaning of Stability. Publ. Inst. Mat. Est. Fac. Ing. Agrim. Montevideo V. 4 Nº 1 (1964)

|78| ————. On Lyapunov's Condition of Stability. Ann. of Math. V. 50 Nº 3 (1949).

|79| ————. Contributions to Stability Theory. Ann. of Math. V.64 Nº 1 (1956).

|80| Matrosov, V.M. y Kozlov, R.J. (Ed.). El método de las funciones de Liapunov en la dinámica de los sistemas no lineales. Nauka. Novosibirsk (1983).

|81| Michel, A.N. On the bounds of the trayectories of differential systems. Int. J. Contr. V. 10 Nº 5 (1969).

|82| Mikolajaka, Z. Application de la méthod topologique de T. Wazewski a l'examen de l'instabilité de la solution banale d'un systéme equations differentielles. Ann. Pelon. Math. XXXIII (1977).

|83| Miller, R.K. Asymptotic Behavier of Nonlinear Delay-Differential Equations. J. Diff. Eq. V.1 Nº 3 (1965).

|84| Mitropolskii, Yu. A. y Likova, O.B. Variedades integrales en la mecánica no lineal. Nauka. Moscú (1973).

|85| Monakov, V.N. Sobre la existencia de una superficie localmente invariante en algunos sistemas de ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales. Diff. Urav. T VIII Nº 10 (1972).

|86| ———. Un análogo del teorema de Perron para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales. Diff. Urav. T VIII Nº 11 (1972).

|87| Mufti, J.H. Stability in the Large of Autonomous Systems of Two Differential Equations. Arch. For Rat. Mach. and Anal. V.6 Nº 2 (1960).

|88| ———. Stability in the large of systems of Two Equations. Arch. for Rat. Mach. Anal. V.7 Nº 2 (1961).

|89| Nemytskii, V.V. y Stepanov, V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. Princeton Univ. Press 4th Ed. (1972).

|90| Persidskii, S.K. Algunos teoremas sobre el segundo método de Liapunov. Viestnik. Akad. Nauk. Kazach SSR Nº 2 (1960).

|91| Pliss, V.A. Principio de identificación en la teoría de estabilidad del movimiento. Izv. Ak. Nauk SSSR Ser Mat. 28 (1964).

|92| ———. Conjuntos integrales de sistemas periódicos de ecuaciones diferenciales. Nauka, Moscú (1977).

|93| Porter, W.A. and Zahm, C.L. SEL Tech. Rep. Nº 44 Dept. Elect. Eng. and Comp. Eng. College of Engineering, Un. of Michigan.

|94| Reissig, R; Sansone, G y Conti, R. Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales no lineales. Nauka (1974).

|95| Rosseau, M. Oscilaciones no lineales y teoría de estabilidad. Nauka (1971).

|96| Roxin, E.O. Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control TI. Ed. Universitaria, Buenos Aires (1968).

|97| Rumiáutsev, V.V. El método de las funciones de Liapunov en la teoría de estabilidad del movimiento. Mecánica en la URSS durante 50 años (191701067) Tomo 1 Nauka, Moscú, (1968).

|98| Salvadori, L. Some contributions to asymptotic stability theory Ann. Soc. Sc. Bruxelles, T88 (1974).

|99| ————. Sul problema della stabilitá asintótics. Lincei-Reud. Sc. Fis. Mat. e Nat. V. LIII (1972).

|100| Sansone, G. and Conti, R. Non-linear differential equations. Pergamon Press (1964).

|101| Sell, G.R. Boundedness of Solutions of Ordinary Differential Equations and Lyapunov Functions. J. Math. Anal. Appl. V.9 Nº 3 (1964).

|102| ————. Stability theory and Lyapunov's Second Method. Arch. for Rat. Mach. and Anal. V.14 Nº 2 (1963).

|103| Veksler, D. Sobre teoremas de estabilidad para sistemas estacionarios de ecuaciones diferenciales. Rev. Mat. Pur. Appl. 3 (1958).

|104| Vinograd, R.E. Lo inadecuado del método de los exponentes característicos de un sistema regular. Dokl. Akad. Nauk SSSR 103 (1955).

|105| Voronov, A.A. Estado actual y problemas en la teoría de estabilidad. Avtomatika y Telemekânica Nº 5 (1982).

|106| Yoshizawa, T. On the Equiasymptotic Stability in the Large. Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Ser A. Vol XXXII Nº 1 (1959).

|107| ———. Liapunov's function and boundedness of solutions. Funkcialaj Ekvacioj (Ser. Intern.) V.2 (1959).

|108| Zubov, V.J. Estabilidad de variedades integrales. Diff. Grav. 13 Nº 9 (1977).

|109| ———. Teoría de las ecuaciones de movimientos controlables. Izdat. Leningr. Univ. (1980).