NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 73

EL GESSELIANO

POR

A. ZAVROTSKY

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA - VENEZUELA

1985

EL GESSELIANO

POR

A. ZAVROTSKY

SUMARIO

Sea $S_n^k = 1^k+2^k+\ldots+n^k$, y sea

$$G_n^k = \begin{vmatrix} S_n^o & S_n^1 & S_n^2 \ldots\ldots & S_n^k \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 \ldots\ldots & S_n^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_n^k & S_n^{k+1} & S_n^{k+2} \ldots\ldots & S_n^{2k} \end{vmatrix}$$

Está demostrado que:

$$G_n^k = \frac{V_{n+k}\ V_{n-k-2}\ V_k^4}{V_{n-1}^2 \cdot V_{2k+1}}$$

donde V_k &c. son determinantes espec-ales de Vandermonde.

Este resultado es de gran importancia en la teoría de los momentos y de los mínimos cuadrados.

A. Zavrotsky B. Sc.

EL GESSELIANO

POR

A. ZAVROSKY

SUMMARY

Let $S_n^k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, and let

$$G_n^k = \begin{vmatrix} S_n^o & S_n^1 & S_n^2 & \cdots\cdots & S_n^k \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \cdots\cdots & S_n^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n^k & S_n^{k+1} & S_n^{k+2} & \cdots\cdots & S_n^{2k} \end{vmatrix}$$

It is proved that

$$G_n^k = \frac{V_{n+k}\ V_{n-k-2}\ V_k^4}{V_{n-1}^2 \cdot V_{2k+1}}$$

where the V_k etc. are special Vandermonde determinants.

This is a very important result for applications to moments and least squares.

A. Zavrostsky B. Sc.

EL GESSELIANO

Por: A. Zavrotsky

1. Sean x_1 ; x_2 ;...; x_n <u>n</u> valores distintos de la variable <u>x</u>, y sean $y_i = f(x_i)$ $(i=1;\ 2;\ldots;\ n)$ los valores correspondientes de una función desconocida. Se trata de hallar un polinomio

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k\, x^k$$

de grado no superior a <u>k</u> de modo que se tenga

$$P_k(x_i) = y_i \quad (i=1,;\ 2;\ldots n),$$

lo que se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_k x_1^k &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_k x_2^k &= y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_k x_n^k &= y_n \end{aligned}$$

Si $n < k+1$, el sistema es indeterminado. Si $n=k+1$, el sistema es compatible y determinado, porque su determinante, si se toman a_1; a_2; ... a_k como incógnitas, y x_1; x_1^2 . . . x_n^k como coeficientes, es del tipo de Vandermonde:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{vmatrix} = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_{n-1}-x_n) \neq 0,$$

Porque todos los valores x_1; x_2; ...; x_n son distintos por hipótesis. Si $k < n-1$, el sistema es generalmente incompatible. Se puede entonces interpretar al polinomio $P_k(x)$ como función de mejor aproximación, por el método de los mínimos cuadrados, que como lo demostró Pearson [1], en el caso de un polinomio, y únicamente en este caso, equivale al de los momentos. Resolviendo el sistema auxiliar

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^{n} | P_k(x_j) - y_j |^2}{\partial a_i} = 0 \quad (i=0;1;2;..;k)$$

se forman las ecuaciones normales de Gauss.

$$na_o + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_1^2 + \ldots\ldots + a_k \sum x_i^k = \sum y_i \qquad (3)$$

$$a_o \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \ldots\ldots + a_k \sum x_i^{k+1} = \sum x_i y_i$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_o \sum x_i^k + a_1 \sum x_i^{k+1} + a_2 \sum x_i^{k+2} + \ldots\ldots + a_k \sum x_i^{2k} = \sum x_i^k y_i$$

donde todas las sumatorias se entienden desde $i=1$ hasta $i=n$.

2. Considérese ahora el caso particular de los valores equidistantes del argumento (en progresión aritmética), o sea cuando $x_2-x_1 = x_3-x_2 \ldots = x_n-x_{n-1}=h$. Por medio del cambio de variable $x=x_1+h(\overline{x}-1)$, los valores del nuevo argumento $\overline{x}$ se convierten en los enteros consecutivos $1,2,\ldots,n$, y las ecuaciones (3) se transforman en:

$$S_n^o\, a_o + S_n^1 a_1 + S_n^2 a_2 + \ldots\ldots + S_n^k a_k = \sum y_i \qquad (4)$$

$$S_n^1\, a_o + S_n^2 a_1 + S_n^3 a_2 + \ldots\ldots + S_n^{k+1} a_k = \sum x_i y_i$$ (sumatorias desde $i=1$ hasta $i=n$).

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n^k\, a_o + S_n^{k+1} a_1 + S_n^{k+2} a_2 + \ldots\ldots + S_n^{2k} a_k = \sum x_i^k y_i$$

donde en general para toda <u>n</u> y para toda <u>i</u>:

$$S_n^i = 1^i + 2^i + \ldots\ldots + n^i$$

o en forma matricial,

$$|S| \quad |A| = |Y| \qquad (5)$$

donde $|A|$ y $|Y|$ son matrices columnas.

La expresión general de S_n^i se conoce: |2|

$$S_n^i = \frac{n^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2}n^i + \frac{in^{i-1}}{12} - \frac{i(i-1)(i-2)n^{i-3}}{720} + \tag{6}$$

$$+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)n^{i-5}}{30240} -+-+-+\ldots$$

o introduciendo los números de Bernoulli |3|

$$S_n^i = \frac{n^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2}n^i + \frac{1}{2}B_1\, in^{i-1} - \frac{B_2 C_i^3 n^{i-3}}{4} + \frac{B_3 C_i^5 n^{i-5}}{6} -+-+-+\ldots \tag{7}$$

Si i es par, el último término de este desarrollo contiene la primera potencia de n; si es impar, la segunda. En particular:

$$S_n^o = n,\quad S_n^1 = \frac{1}{2}n(n+1),\quad S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_n^1)^2\ ;$$

$$S_n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},\quad S_n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\ ;$$

$$S_n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},\quad S_n^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24};$$

$$S_n^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}\ ;$$

$$S_n^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20}\quad \text{etc.}$$

Estas expresiones pueden simplificarse considerablemente, si se introducen los símbolos $y=n(n+1)$, $y'=2n+1$:

$$S_n^1 = \frac{1}{2}y,\ S_n^2 = \frac{yy'}{6},\ S_n^3 = \frac{y^2}{4},\ S_n^4 = \frac{yy'(3y-1)}{30},\ S_n^5 = \frac{y^2(2y-1)}{12};$$

$$S_n^6 = \frac{yy'(3y^2-3y+1)}{42},\ S_n^7 = \frac{y^2(3y^2-4y+2)}{24},\ S_n^8 = \frac{yy'(5y^3-10y^2+9y-3)}{90};$$

$$S_n^9 = \frac{y^2(y-1)(2y^2-3y+3)}{20},\ S_n^{10} = \frac{yy'(3y^3-7y^2+10y-5)(y-1)}{66} \quad \text{etc.}$$

Además, están demostradas las relaciones siguientes: (4)

$$\frac{dS_n^{2i+1}}{dn} = 2iS_n^{2i},\ \frac{dS_n^{2i}}{dn} = (2i-1)S_n^{2i-1} + (-1)^i B_i,\ S_n^5 + S_n^7 = 2(S_n^3)^2;$$

$$S_n^3 = (S_n^1)^2, \text{ etc.}$$

Considérese ahora el determinante de la matriz $|S|$, introducida en la ecuación (5), o sea, el del sistema (4):

$$G_n^k = \begin{vmatrix} S_n^o & S_n^1 & S_n^2 & \cdots & S_n^k \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \cdots & S_n^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n^k & S_n^{k+1} & S_n^{k+2} & \cdots & S_n^{2k} \end{vmatrix} \tag{8}$$

llamado el <u>Gesseliano</u> en honor al Profesor Ira Gessel quién lo descubrió. Designando con V_k al determinante <u>especial</u> de Vandermonde:

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 \ldots\ldots\ldots & k+1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \ldots\ldots\ldots & (k+1)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^k & 2^k & 3^k \ldots\ldots\ldots & (k+1)^k \end{vmatrix} = 1!.\,2!.3!\ldots k! \qquad (9)$$

|5|

y con H_k el determinante de Hilbert |6|:

$$H_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+2} & \ldots & \frac{1}{2k+1} \end{vmatrix} = \frac{V_k^4}{V_{2k+1}} \qquad (10)$$

demuéstrese la igualdad:

$$G_n^k = \frac{V_{n+k}\, V_{n-k-2}\, V_k^4}{V_{n-1}^2 \cdot V_{2k+1}} \qquad (11)$$

o en forma equivalente:

$$G_n^k = H_k n^{k+1}(n^2-1)^k(n^2-4)^{k-1}(n^2-9)^{k-2}\ldots(n^2-\overline{k-1}^{\,2})^2(n^2-k^2). \qquad (12)$$

3. Por cierto, algunos casos particulares de la fórmula (12) pueden comprobarse directamente, por ejemplo:

$$G_n^1 = \begin{vmatrix} n & \frac{1}{2}n(n+1) & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \frac{1}{2}n(n+1) & & \end{vmatrix} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} =$$

$$= n^2(n+1) . \frac{2(2n+1)-3(n+1)}{12} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12}$$

de acuerdo con (12), tanto más que

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} .$$

Otro caso particular de (12) que ha sido demostrado, |7|:

$$G_n^{n-1} = V_{n-1}^2 . \tag{13}$$

A primera vista, la fórmula (11) parece en este caso carecer de sentido, pués el factor V_{n-k-2} adquiere la forma V_{-1}. Pero transcribiendo (11) en la forma:

$$G_n^k = \frac{\left(\dfrac{V_{n+k}\, V_k^4}{V_{n-1}\, V_{2k+1}} \right)}{\left(\dfrac{V_{n-1}}{V_{n-k-2}} \right)} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{V_{n+k}\, V_k^4}{V_{n-1}\, V_{2k+1}}\right)}{\left(\dfrac{1!.2!.3!\ldots(n-k-2)!.(n-k-1)!.(n-k)!\ldots(n-1)!}{1!\,.\,2!\,.\,3!\,\ldots.(n-k-2)!}\right)} = \tag{14}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{V_{n+k}\, V_k^4}{V_{n-1}\, V_{2k+1}}\right)}{(n-k-1)!\,.\ (n-k)!\ \ldots(n-1)!}$$

y poniendo ahora $k=n-1$, se obtiene:

$$G_n^{n-1} = \frac{\left(\dfrac{V_{2n-1}\, V_{n-1}^4}{V_{n-1}\, V_{2n-1}}\right)}{0!.\ 1!.\ 2!\ldots.\ (n-1)!} = \frac{V_{n-1}^3}{V_{n-1}} = V_{n-1}^2,$$

de acuerdo con (13). La fórmula (13) puede, además, deducirse directamente, elevando al cuadrado al determinante V_{n-1}.

4. Pero la demostración general de (11) requiere varios lemas previos.

LEMA 1. G_n^k es polinomio en $\underline{n}$ de grado $(k+1)^2$, cuyo coeficiente dominante es H_k.

PRUEBA. Póngase $N(n) = 1+0(\frac{1}{n})$, donde $0(\frac{1}{n})$ compendía los términos con las potencias negativas de $\underline{n}$. Luego, substituyendo en (8) por cada S_n^i la expresión (6) ó (7), G_n^k se reduce a la forma:

$$G_n^5 = \begin{vmatrix} \frac{n^1}{1}N(n) & \frac{n^2}{2}N(n) & \frac{n^3}{3}N(n) & \ldots\ldots & \frac{n^{k+1}}{k+1}N(n) \\ \frac{n^2}{2}N(n) & \frac{n^3}{3}N(n) & \frac{n^4}{4}N(n) & \ldots\ldots & \frac{n^{k+2}}{k+2}N(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{n^{k+1}}{k+1}N(n) & \frac{n^{k+2}}{k+2}N(n) & \frac{n^{k+3}}{k+3}N(n) & \ldots & \frac{n^{2k+1}}{2k+1}N(n) \end{vmatrix} \qquad (15)$$

Desarrollando (15) en una suma de $(k+1)!$ términos, se vé que en cada uno de ellos el exponente de $\underline{n}$ es igual á $1+3=5+\ldots\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$, y el coeficiente dominante, según (10), es H_k.

Designando con $X(G_n^k)$ la <u>característica</u> de un determinante (o sea, el orden máximo de su menor distinto de 0), se puede enunciar el siguiente:

LEMA 2. Si $n<k+1$, entonces $X(G_n^k) = n$.

PRUEBA a) Que $X(G_n^k) \geq n$, se vé por el hecho de que G_n^k contiene como menor principal de orden $\underline{n}$ á $G_n^{n-1} = V_{n-1}^2 \neq$ '0.

b) Para demostrar que $X(G_n^k) \leq n$, obsérvese que $X(G_o^k)= X(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots \\ . & . & \ldots \end{vmatrix})^1=0$

y que $X(G_1^k) = X(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots. \\ 1 & 1 & 1 & \ldots. \\ . & . & . & \ldots. \end{vmatrix}) = 1$; supóngase inductivamente que

$X(G_n^k)= n$, y averigüese si la misma relación subsiste aún para $n+1$. Pero G_{n+1}^k es determinante de tipo de Hankel en que toda paralela a la diagonal ascendente está compuesta de elementos iguales. Pero se sabe |8| que:

$$\begin{vmatrix} a_o & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_o & \Delta a_o & \Delta^2 a_o & \cdots \\ \Delta a_o & \Delta^2 a_o & \Delta^3 a_o & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

donde $\Delta a_o = a_1 - a_o$, $\Delta^2 a_o = a_2 - 2a_1 + a_o, \ldots,$ $\Delta^i a_o = a_i - i a_{i-1} + C_i^2 a_{i-2} - C_i^3 a_{i-3} +- \ldots$ $+ (-1)^i a_o$. En el caso particular de G_{n+1}^k se tiene

$$\Delta a_o = S_{n+1}^1 - S_{n+1}^o = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1) = S_n^1, \ \Delta^2 a_o = S_{n+1}^2 - 2S_{n+1}^1 + S_{n+1}^o =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)^2 = S_n^2, \ldots$$

y análogamente para toda $\underline{i}$:

$$\Delta^i_{a_o} = S_{n+1}^1 - iS_{n+1}^{i-1} + C_i^2 S_{n+1}^{i-2} -+-+\ldots + (-1)^i S_{n+1}^o = \sum_{j=1}^{i+1} (j-1)^i = S_n^i,$$

de modo que se tiene:

$$G_{n+1}^k = \begin{vmatrix} 1+S_n^o & S_n^1 & S_n^2 & \cdots \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{16}$$

Sea ahora M_{n+2} un minor de G_{n+1}^k de orden $\underline{n+2}$. Si M_{n+2} no contiene el elemento $1+S_n^o$ (situado en la primera fila y la primera columna), entonces M_{n+2} pertenece a G_n^k y es igual a 0 por hipótesis inductiva. Si lo contiene, entonces se puede darle la forma:

$$M_{n+2} = \begin{vmatrix} S_n^o + 1 & S_n^1 + 0 & S_n^2 + 0 & \cdots \\ S_n^1 & \boxed{\quad M_{n+1} \quad} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

donde M_{n+1} es minor de orden n+1. Descomponiendo ahora a M_{n+2} por los elementos de su primera fila, se le representa como suma de dos minores de G_n^k, uno de orden n+1 y otro n+2, juntos iguales a cero por hipótesis inductiva.

Evidentemente, la característica de M_{n+2} queda invariante bajo la transformación lineal de Hankel. Luego $X(G_{n+1}^k) = n+1$, lo que completa la inducción.

LEMA 3. G_n^k se divide entre $n^{k+1}\ (n-1)^k(n-2)^{k-1}\ldots.(n-k+1)^2(n-k)$.

ESCOLIO. Se trata de la divisibilidad algebraica de un polinomio entre la potencia de un monomio o binomio, y no de la aritmética, que no siempre se cumple gracias a la presencia del factor fraccionario H_k. Ejemplo: $S_n^1 = \frac{1}{2}\, n(n+1)$ siempre se divide entre el binomio (n+1), pero $S_3^1 = 6$ no se divide entre 3+1=4.

PRUEBA. Está demostrado |9| que si G_n^k es determinante de orden (k+1) cuyos elementos son polinomios en n, y si n_o es valor de n tal que $X(G_{n_o}^k) = q<k+1$, entonces G_n^k se divide entre $(n-n_o)^{k+1-q}$ o eventualmente entre otra potencia todavia más alta del binomio $(n-n_o)$. Dándole a n_o sucesivamente los valores 0,1,2,....,k, se obtiene el enunciado del Lema 3. A este resultado se puede darle también otra forma:

$$G_n^k = n^{e_o}\ (n-1)^{e_1}(n-2)^{e_2}\ldots\ldots(n-k+1)^{e_{k-1}}(n-k)^{e_k}\ f(n)$$

donde

$$e_o \geq k+1,\ e_1 \geq k,\ e_2 \geq k-1,\ldots,e_{k-1} \geq 2,\ e_k \geq 1.$$

LEMA 4. G_n^k es divisible entre:

$$n^{e_o}(n^2-1)^{e_1}(n^2-4)^{e_2}\ldots\ldots(n^2-k^2+2k-1)^{e_{k-1}}(n^2-k^2)^{e_k}\ ;$$

donde los exponentes e_o, $e_1,e_2,\ldots,e_k$ tienen el mismo significado que en el Lema 3.

PRUEBA. Considérese la expresión G_{-n}^k, si en la fórmula (8) $\underline{n}$ toma el valor de un entero negativo, entonces la definición $S_n^i = 1^i+2^i+\ldots+n^i$ pierde todo sentido, pero se puede aceptar como definición de S_n^i a la fórmula (6) o (7), y en este caso se tiene, si i=0, $S_{-n}^o = -n = -(1+S_{n-1}^o)$, y si $i > 0$,

$$S_{-n}^i=(-1)^{i+1}\left(\frac{n^{i+1}}{i+1}-\frac{1}{2}n^i+\frac{1}{2}B_1\, in^{i-1}-+-+\ldots\right)=(-1)^{i+1}(S_n^i-n^i)=$$

$$=(-1)^{i+1}S_{n-1}^i\ ,$$

y se tiene:

$$G_{-n}^k = \begin{vmatrix} -(1+S_{n-1}^o) & S_{n-1}^1 & -S_{n-1}^2 & \cdots\cdots & (-1)^{k+1}S_{n-1}^k \\ S_{n-1}^1 & -S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \cdots\cdots & (-1)^kS_{n-1}^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{k+1}S_{n-1}^k & (-1)^kS_{n-1}^{k+1} & (-1)^{k+1}S_{n-1}^{k+2} & \cdots\cdots & -S_{n-1}^{2k} \end{vmatrix}$$

Multiplicando la primera, la tercera, la quinta columna, &c., por -1, se tiene:

$$G_{-n}^k = \pm \begin{vmatrix} 1+S_{n-1}^o & S_{n-1}^1 & S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \cdots \\ -S_{n-1}^1 & -S_{n-1}^2 & -S_{n-1}^3 & -S_{n-1}^4 & \cdots \\ S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & S_{n-1}^4 & S_{n-1}^5 & \cdots \\ -S_{n-1}^3 & -S_{n-1}^4 & -S_{n-1}^5 & -S_{n-1}^6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Enseguida, multiplicando la segunda, la cuarta, la sexta fila, &c, por -1, se tiene:

$$G_{-n}^{k} = \pm \begin{vmatrix} 1+S_{n-1}^{o} & S_{n-1}^{1} & S_{n-1}^{2} & \cdots\cdots & S_{n-1}^{k} \\ S_{n-1}^{1} & S_{n-1}^{2} & S_{n-1}^{3} & \cdots\cdots & S_{n-1}^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n-1}^{k} & S_{n-1}^{k+1} & S_{n-1}^{k+2} & \cdots\cdots & S_{n-1}^{2k} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

El signo ambiguo "$\pm$" depende de la paridad de k, lo cual carece de importancia. De todo modo, reemplazando en la fórmula (16) n por n-1, se vé que el segundo miembro de (17) se reduce a $\pm G_{-n}^{k}$, y se tiene $G_{-n}^{k} = \pm G_{n}^{k}$. Luego en el Lema 3 al factor $(n-1)^{e_1}(n-2)^{e_2}\ldots.(n-k)^{e_k}$, le corresponde el factor $(n+1)^{e_1}(n+2)^{e_2}\ldots.(n+k)^{e_k}$ con las mismas multiplicidades, lo que completa la demostración del Lema 4.

Del Lema 4 se deduce:

$$G_n^k = n^{e_o}(n^2-1)^{e_1}(n^2-4)^{e_2}\ldots\ldots(n^2-k^2+2k-1)^{e_{k-1}}(n^2-k^2)^{e_k}\, f(n)$$

donde los exponentes indeterminados e_i están, para $i=0,1,2,\ldots, k$, acotados inferiormente por las desigualdades $e_i \geq k+1-i$. Pero como la suma de todos estos exponentes es igual a $2(1+2+3+\ldots+\overline{k-1}+k) + (k+1) = (k+1)^2$, que es, por el Lema I, el grado del polinomio G_n^k, luego los signos de desigualdad desaparecen: f(n) se reduce a una constante. A base del mismo Lema I, se tiene $f(n)=H_k$, lo cual completa la demostración de la fórmula (12), o de su equivalente (11).

La utilidad práctica de la fórmula (11) consiste en que permite ahorrar el cálculo directo del determinante G_n^k , sumamente engorroso aún para los valores moderados de k, ya que su desarrollo completo contiene (k+1)! términos. Por ejemplo, si k=10, se tienen 39.916.800 términos.

5. Con atento permiso del Prof. Ira Gessel, del Massachusets Institute of Technology, citamos su prueba del mismo teorema, que, como es fácil ver, está basada en los principios totalmente independientes de los nuestros |11|.

Sea,

$$f(x,y) = \sum_{i,j>0} \frac{a_{ij} x^i y^j}{i!j!} .$$

Sea:

$$D^k(f) = \begin{vmatrix} a_{oo} & a_{o1} & \cdots\cdots & a_{ok} \\ a_{1o} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ko} & a_{k1} & \cdots\cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

LEMA 1. $D^k(f) = D^k(g(x)h(y)f)$, sean cuales fueren $g(x)=1+b_1x+b_2x^2\ldots$ y $h(y)=1+c_1\, y+c_2\, y^2+\ldots.$

LEMA 2. $D^k(f)=D^k(f(g(x),\ h(y)))$, sean cuales fueren $g(x)=x+b_2x^2+\ldots$ y $h(y) = y+c_2\, y^2+\ldots$

Estos lemas se demuestran fácilmente, interpretando a $D^k(g(x)h(y)f)$, &c., como operaciones sobre filas y columnas de $D^k(f)$.

LEMA 3. Sea $a_{ij} = a_{i+j}$, y $f(x) = \sum \frac{a_k x^k}{k!}$. Entonces $f(x+y) = f(x;y)$

La prueba consiste en un cálculo sencillo.

En el caso dado $a_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, de modo que $f(x) = e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx} =$

$= \frac{e^x(e^{nx}-1)}{e^x - 1}$. Pero por el Lema 3°:

$$f(x;y) = \frac{e^{x+y}(e^{n(x+y)}-1)}{e^{x+y}-1}$$

De acuerdo con el Lema 1°, se puede multiplicar por $e^{-x}e^{-y}$, lo que da:

$$\frac{e^{n(x+y)}-1}{e^{x+y}-1}$$

De acuerdo con el Lema 2°, se puede reemplazar $\underline{x}$ por $\log(1+x)$, y $\underline{y}$ por $\log(1+y)^{-1}$, lo que da:

$$\frac{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^n - 1}{\frac{1+x}{1+y} - 1} = \frac{(1+x)^n - (1+y)^n}{(1+y)^{n-1}\,(x-y)}$$

De acuerdo con el Lema 1°, se puede multiplicar por $(1+y)^{-n+1}$, lo que da:

$$\frac{(1+x)^n - (1+y)^n}{x - y}$$

De este modo:

$$D^k_n = \left| C_n^{i+j+1}.i!j! \right|_0^k = (1!2!\ldots k!)^2 . \left| C_n^{i+j+1} \right|_0^k$$

Este último determinante está bien conocido: véase, por ejemplo, |12| y |13|".

REFERENCIAS

1. N.L.Johnson & H. Tetley, Statistics, Cambridge University Press, 1966, vol. II, pág. 220.
2. H. Freeman, Mathematics for Actuarial Students, Cambridge University Press, 1939, part. II, pág. 191.
3. J.V. Uspensky & V. A. Heaslet, Elementary Number Theory, Mc. Millan Book C°, New York & London 1939, pág. 254.
4. C.V. Durell, Advanced Algebra, G. Bell & Sons, Ltd., London 1961, Vol. I, pág. 48.
5. Man Duen Choi, Tricks or Treats with the Hilbert Matrix, American Mathematical Monthly 1983, Vol. 90, pág. 301.
6. J.W. Archbold, Algebra, Pitman Paperbacks, Bath 1970, pág. 425
7. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. Chelsea Publishing C°, New York 1948, pág. 63
8. Ibidem. pág. 102.
9. R.A. Fracer, W.J. Duncan & A.R. Collar, Elementary Matrices, Cambridge University Press 1947, pág. 61.
10. G.U. Yule & M.G. Kendalle, An Introduction to the Theory of Statistics, 14-th Edition, Charles Griffin & C°, London 1968, pág. 344

11. Comunicado personal.

12. G. Andrews, The *Theory of Partitions*, pág. 183.

13. L. Carlitz, *Acta Arithmetica* vol. 13, pág. 29-47.

14. F.J. Duarte, *Mouvelles Tables de log n! a 33 decimales*, Imprimerie Albert Kunding, Géneve 1927, pag. 3-122.

Apéndice: *Fórmulas asintóticas*.

Dejémosle a cargo del lector la demostración de las siguientes *fórmulas asintóticas*:

(21) para todo valor fijo *k*, la expresión asintótica de G_n^k es:

$$H_k n^{(k+1)^2}$$

(22) Para grandes valores de *k*. la expresión asintótica V_k es:

$$(2\Pi)^{\frac{4k+3}{8}} e^{-\frac{k(3k+4)}{4}} k^{\frac{(2k+1)(2k+3)}{8}}$$

Por ejemplo, de acuerdo con las Tablas del Dr.Duarte[14] se tiene $\log_{10} V_{3000}$ = 12.725.885,..., y la expresión (22) da este mismo valor hasta el entero más próximo.

Debémosle especial agradecimiento al Dr. José Escobar, del servicio de Computación de la Universidad de los Andes, por la ejecución del cálculo.

EJERCICIOS.

Dejémosle a cargo del lector la demostración de las siguientes curiosas propiedades:

$$(18) \qquad G^k_{n+1} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \quad n+1 \quad (n+1)^2 \ \ldots \ (n+1)^k \\ \begin{matrix} 1 \\ n+1 \\ (n+1)^2 \\ \vdots \\ (n+1)^k \end{matrix} & \boxed{\qquad G^k_n \qquad} \end{vmatrix}$$

$$(19) \qquad G^k_{n+1} - G^k_n = \begin{vmatrix} S^2_n & S^3_n & \ldots & S^{k+1}_n \\ S^3_n & S^4_n & \ldots & S^{k+2}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S^{k+1}_n & S^{k+2}_n & \ldots & S^{2k}_n \end{vmatrix}$$

$$(20)\qquad G_n^k = \begin{vmatrix} S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \cdots & S_{n-1}^{k+1} \\ S_{n-1}^3 & S_{n-1}^4 & \cdots & S_{n-1}^{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n-1}^{k+1} & S_{n-1}^{k+2} & \cdots & S_{n-1}^{2k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{n-2}^2 & S_{n-2}^3 & \cdots & S_{n-2}^{k+1} \\ S_{n-2}^3 & S_{n-2}^4 & \cdots & S_{n-2}^{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n-2}^{k+1} & S_{n-2}^{k+2} & \cdots & S_{n-2}^{2k} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots\cdots+ \begin{vmatrix} S_{k+1}^2 & S_{k+1}^3 & \cdots & S_{k+1}^{k+1} \\ S_{k+1}^3 & S_{k+1}^4 & \cdots & S_{k+1}^{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+1}^{k+1} & S_{k+1}^{k+2} & \cdots & S_{k+1}^{2k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_k^2 & S_k^3 & \cdots & S_k^{k+1} \\ S_k^3 & S_k^4 & \cdots & S_k^{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_k^{k+1} & S_k^{k+2} & \cdots & S_k^{2k} \end{vmatrix}$$

TABLA DE LA FUNCION G_n^k

$k \backslash n$ =	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	6	20	50	105	196
2	0	0	4	80	700	3.920	16.464
3	0	0	0	144	10.080	254.016	3.556.224
4	0	0	0	0	82.944	20.901.888	1.609.445.376
5	0	0	0	0	0	1.194.393.600	1.103.619.686.400
6	0	0	0	0	0	0	619.173.642.240.000
7	0	0	0	0	0	0	0

LA MISMA FUNCION FACTORIZADA

$\boxed{k \backslash n}$ =	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	2^2	5	2.3	7
1	0	1	2.3	$2^2.5$	2.5^2	$3.5.7$	$2^2.7^2$
2	0	0	2^2	$2^4.5$	$2^2.5^2.7$	$2^4.5.7^2$	$2^4.3.7^3$
3	0	0	0	$2^4.3^2$	$2^5.3^2.5.7$	$2^6.3^4.7^2$	$2^7.3^4.7^3$
4	0	0	0	0	$2^{10}.3^4$	$2^{12}.3^6.7$	$2^{12}.3^6.7^2.11$
5	0	0	0	0	0	$2^{16}.3^6.5^2$	$2^{18}.3^7.5^2.7.11$
6	0	0	0	0	0	0	$2^{24}.3^{10}.5^4$
7	0	0	0	0	0	0	0