NOTAS DE MATEMATICA

59

"ANILLOS SEMINORMALES"

POR

ALVIS ROSALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1984

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

"ANILLOS SEMINORMALES"

TESIS DE GRADO PRESENTADA POR EL LIC. ALVIS HUGO ROSALES PARA OPTAR A EL TITULO DE MAGISTER SICIENTIARUM EN MATEMATICA DIRI GIDA POR EL DR. RAJ MARKANDA

1983

I N D I C E

INTRODUCCION

El presente trabajo estudia el concepto de anillos seminormales y algunas aplicaciones. Dicho concepto apareció en 4 ó 5 trabajos escritos en el periodo 1970-1973 y luego fué estudiado extensamente en aproximadamente 10 trabajos durante el periodo 1978-1982. Por ésta razón este concepto no aparece en texto alguno, siendo las pruebas dadas en estos trabajos muy resúmidas y por consiguiente dificultandose la comprensión de las mismas.

Nosotros construimos este tópico desde el comienzo y damos pruebas detalladas de todos los resultados, algunas de dichas pruebas han sido modificadas. Al final de esta introducción damos una interpretación geométrica de este concepto.

El trabajo aquí expuesto se desarrolla en dos capítulos, el primero abarca todo lo concerniente a las propiedades básicas de seminormalidad y conceptos afines como el de extensión subintegral.

En el segundo capítulo se desarrollan algunas aplicaciones, para esto subdividimos el capítulo en tres secciones. En la primera estudiamos seminormalidad sobre series de polinomios, en la segunda trabajamos sobre grupos de Picard y finalmente anillos graduados seminormales.

Acerca de la interpretación geométrica del concepto de seminormalidad, tenemos lo siguiente; sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y $f(x,y)$ un polinomio irreducible en $K[x,y]$. El dominio $A = \frac{K[x,y]}{(f(x,y))}$ se llama anillo afín de la curva $f(x,y) = 0$. Decimos que la curva $f(x,y) = 0$ es normal, si y sólo si, A es integramente cerrado en su campo cociente; en este caso todo punto $P(a,b)$; $(a,b) \in K \times K$, es no singular, es decir $(\frac{\partial f}{\partial x})_{(a,b)} \neq 0$ ó $(\frac{\partial f}{\partial y})_{(a,b)} \neq 0$, luego la tangente en P existe.

La curva $f(x,y) = 0$ es seminormal si A es un anillo seminormal, en este caso si $P(a,b)$ es un punto singular de $f(x,y) = 0$, entonces $P(a,b)$, es un punto doble ordinario, es decir existen dos tangentes diferentes en P.

Por ejemplo $y^2 = x^2 + x^3$ es seminormal, su único punto singular es $(0,0)$ con $y = \pm x$, las dos tangentes en este punto.

Por el contrario $y^2 = x^3$ no es seminormal, pues su único punto singular es $(0,0)$, sin embargo las tangentes a las dos ramas en $(0,0)$ coinciden.

CAPITULO I

En el presente trabajo consideraremos anillos commutativos con elemento unitario y además todo subanillo de un anillo dado será tal que el elemento unitario esté en el subanillo.

Definición 1.1. Sean $A \subset B$ anillos. Un elemento $b \in B$ se dice que es entero sobre A, si b es raíz de un polinomio mónico sobre A.

Por la gran utilidad que representan para este trabajo los siguientes resultados, me permito enunciarlos sin demostración.

i) El conjunto C de elementos de B que son enteros sobre A es un subanillo de B que contiene a A, es decir $A \subset C \subset B$. Si $C = B$, se dice que B es entero sobre A.

ii) Si $A \subset B \subset C$ son anillos y si B es entero sobre A y C es entero sobre B, entonces C es entero sobre A.

iii) Si $A \subset B$ son anillos y B es entero sobre A, entonces $\forall\ P \in \operatorname{Spec}(A)$, existe $Q \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $Q \cap A = P$.

Para detalles en la demostración de estos resultados ver [4].

Definición 1.2. Sean $A \subset B$ anillos. Decimos que B es subintegral sobre A, si se cumplen las siguientes condiciones:

i) B es entero sobre A,

ii) La aplicación, f^* : Spec(B) $\longrightarrow$ Spec(A), dada por $f^*(Q) = Q \cap A$, es una biyección.

De hecho esta aplicación siempre es sobre, ver [4, Teorema 5.10].

iii) $K(P) \simeq K(Q)$, donde $P = A \cap Q$ y $K(Q) = \dfrac{B_Q}{QB_Q}$, $K(P) = \dfrac{A_P}{PA_P}$; QB_Q y PA_P los únicos ideales maximales de los anillos locales B_Q y A_P respectivamente.

<u>Definición 1.3</u>. Sean $A \subset B$ anillos. Decimos que A es seminormal en B, si no hay una subextensión subintegral C sobre A, tal que $A \subsetneq C \subset B$.

<u>Lema 1.4</u>. Sean $A \subset B$ anillos.

B es subintegral sobre $A \Longleftrightarrow B$ es entero sobre A y para todo cuerpo F y todo homomorfismo ϕ, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ F & \end{tikzcd}$$

puede ser completado de manera única.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. $\Longrightarrow$) Sea B subintegral sobre A. Entonces B

es entero sobre A, Sea $\phi : A \longrightarrow F$ un homomorfismo, donde F es un cuerpo cualquiera. Tenemos que $\frac{A}{\mathrm{Ker}\,\phi} \cong \mathrm{Im}\,\phi \subset F \Longrightarrow \mathrm{Im}\,\phi$ es un dominio. Luego $P = \mathrm{Ker}\,\phi$ es un ideal primo de A; es decir $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Por lo tanto existe $Q \in \mathrm{Spec}(B)$ tal que $Q \cap A = P$.

Puesto que $s \in S = A - P \Longrightarrow \phi(s) \neq 0$; ϕ induce un homomorfismo $\bar{\phi} : A_P \longrightarrow F$, dado por $\bar{\phi}(\frac{a}{s}) = \phi(a)\,\phi(s)^{-1}$.

<u>Afirmación</u>: $\mathrm{Ker}\,\bar{\phi} = PA_P$, el ideal maximal del anillo local A_P.

$P = \mathrm{Ker}\,\phi \Longrightarrow PA_P \subseteq \mathrm{Ker}\,\bar{\phi} \subseteq A_P$ y PA_P maximal $\Longrightarrow \mathrm{Ker}\,\bar{\phi} = PA_P$

Tenemos ahora el homomorfismo $\bar{\bar{\phi}} : \frac{A_P}{PA_P} \longrightarrow F$, dado por

$\bar{\bar{\phi}}\,(\frac{a}{s} + PA_P) = \bar{\phi}(\frac{a}{s})$; finalmente tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\psi_o"] \\
A_P \arrow[d, "\bar{\phi}"] & B_Q \arrow[d, "\psi_1"] \\
K(P) \arrow[r, phantom, "\overset{f}{\simeq}"] \arrow[d, "\bar{\bar{\phi}}"] & K(Q) \\
F &
\end{tikzcd}
$$

Luego $\psi = \bar{\bar{\phi}} \circ f^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi_o$ es tal que $\psi \mid A = \phi$

$$\psi(a) = \bar{\bar{\phi}}(f^{-1}(\psi_1(\psi_o(a)))) = \bar{\bar{\phi}}(f^{-1}(\psi_1(\tfrac{a}{1}))) = \bar{\bar{\phi}}(f^{-1}(\tfrac{a}{1} + QB_Q)) =$$

$$= \bar{\bar{\phi}}(\tfrac{a}{1} + PA_P) = \phi(a)\ \phi(1)^{-1} = \phi(a).$$

Veamos que ψ es único. Sea ψ' otro homomorfismo tal que $\psi' \mid A = \phi$. Sea $b \in B$.

$$b \in B \Longrightarrow \frac{b}{1} \in B_Q \Longrightarrow \frac{b}{1} + QB_Q \in K(Q) \simeq K(P) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Existe $\frac{a}{s} \in A_P$ tal que $f(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{b}{1} + QB_Q$.

Pero $f(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{a}{s} + QB_Q$. Asi tenemos que $\frac{a}{s} + QB_Q = \frac{b}{1} + QB_Q$

de donde se obtiene que $\psi(b) = \phi(a) \phi(s)^{-1} = \psi'(b)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $A \subset B$ tiene la propiedad universal, señalada por el lema.

Sea $P = \text{Ker}\ \phi$, ideal primo de A y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[dl, dashed] \\ F=K(P) = \dfrac{A_P}{PA_P} & \end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe el único ψ tal que $\psi| A = \phi$.

Sea $Q = \text{Ker}\ \psi$, ideal primo de B. Además de $\psi | A = \phi$ se deduce que $P = Q \cap A$.

Entonces ψ induce el homomorfismo; $\bar{\psi} : K(A) \longrightarrow K(P)$, dado por; $\bar{\psi}(\frac{b}{t} + QB_Q) = \psi(b)\ \psi(t)^{-1} + PA_P$. $\bar{\psi}$ es 1-1, ya que $K(Q)$ - es cuerpo.

También tenemos la inyección (inclusión natural); $f : K(P) \longrightarrow K(Q)$ dada por; $f(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{a}{s} + QB_Q$.

<u>Afirmación:</u> f es sobre.

Sea $\bar{x} \in K(Q) \Longrightarrow \bar{x} = \frac{b}{t} + QB_Q$, $b \in B$, $t \notin Q \Longrightarrow \bar{\psi}(\bar{x}) = \frac{\psi(b)}{\psi(t)} +$

$+ PA_P$, o sea $\bar{\psi}(\bar{x}) = \frac{a}{s} + PA_P$, para algún $\frac{a}{s} \in A_P$. Luego:

$$\bar{\psi}(\tfrac{b}{t} + QB_Q) = \bar{\psi}(\tfrac{a}{s} + QB_Q) \Longrightarrow \bar{\psi}(\tfrac{b}{t} - \tfrac{a}{s} + QB_Q) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tfrac{b}{t} - \tfrac{a}{s} \in QB_Q \Longrightarrow \tfrac{b}{t} + QB_Q = \tfrac{a}{s} + QB_Q = f(\tfrac{a}{s} + PA_P).$$

Así f es sobre y por lo tanto una biyección.

Veamos ahora que $f^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, dada por $f^*(Q) = Q \cap A = P$ es una biyección.

De hecho f^* es sobre. Sea $Q_1 \in \mathrm{Spec}(B)$ tq, $Q_1 \cap A = P$. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\psi_1"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_2"] \\
K(P) \overset{f}{\cong} K(Q) \arrow[d] & \\
K(Q_1) &
\end{tikzcd}$$

se tiene que; $\mathrm{Ker}(f^{-1} \circ \psi_1) = Q$ y $\mathrm{Ker}\,\psi_2 = Q_1$. Por unicidad de ψ, obtenemos $f^{-1} \circ \psi_1 = \psi_2$. Luego $Q_1 = Q$; así f es inyectiva y por lo tanto B es subintegral sobre A.

<u>Lema 1.5.</u> Sean $A \subset B$ anillos. Entonces existe una extensión subintegral maximal sobre A.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. Denotemos por ${}_B^+A$ el subconjunto de B cuyos elementos están caracterizados por:

$b \in {}_B^+A$, si y sólo si, para toda extensión de cuerpos $F \subset E$ y para todo homomorfismo $\phi : A \longrightarrow F$; todas las extensiones $\psi : B \longrightarrow E$ de ϕ, coinciden sobre b y $\psi(b) \in F$.

Es fácil verificar que ${}_B^+A$ es un subanillo de B que contiene a A, de aquí ${}_B^+A \neq \phi$.

Sin perder generalidad podemos asumir que B es entero sobre A, entonces por <u>Lema 1.4</u> tenemos que ${}_B^+A$ es subintegral sobre A y por construcción ${}_B^+A$ es maximal.

Otra descripción de los elementos de ${}_B^+A$ es la siguiente:

$$ {}_B^+A = \{ b \in B : \frac{b}{1} \in \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(A)} (A_P + \mathrm{Jac}(A_P B)) \}. $$

<u>Veamoslo</u>. Dado $\phi : A \longrightarrow F$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\phi"'] & B \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\psi"] \\
\frac{A}{P} \arrow[d] & \frac{B}{Q'} \arrow[d] \\
F \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

donde $P = \text{Ker } \phi$ y $Q' \in \text{Spec}(B)$, es tal que $P = A \cap Q'$.

Ahora bien $s \notin P \Longrightarrow \phi(s) \neq 0$, luego tenemos:

$\tilde{\psi} : A_P B \longrightarrow E$, dado por $\tilde{\psi}(\frac{b}{s}) = \psi(b)\ \phi(s)^{-1}$, si $b \in B-A$ y

$\tilde{\psi}(\frac{b}{s}) = \phi(b)\ \phi(s)^{-1}$, si $b \in A$.

Sea $Q = \text{Ker } \tilde{\psi} \subset A_P B$, entonces B entero sobre A, implica que $A_P B$ es entero sobre A_P (ver [4], Proposición 5.6).

$PA_P \subset Q \cap A_P$, y $Q \cap A_P$ ideal de $A_P \Longrightarrow PA_P = Q \cap A_P \Longrightarrow Q$ es ideal maximal de $A_P B$ (ver [4], Proposición 5.8). Entonces $\text{Ker } \tilde{\psi}$ es un ideal maximal de $A_P B$, para todo homomorfismo $\tilde{\psi} : A_P B \longrightarrow E$.

Sea $b \in B$, tal que $\frac{b}{1} \in (A_P + Jac(A_PB))$, $\forall P \in Spec(A)$. De aquí $\frac{b}{1} = \frac{a}{s} + x$, $\frac{a}{s} \in A_P$ y $x \in Jac(A_PB)$, $P \in Spec(A)$. Luego

$\tilde{\psi}(\frac{b}{1}) = \tilde{\psi}(\frac{a}{s}) + \tilde{\psi}(x) = \phi(a)\ \phi(s)^{-1} \in F$, ya que $\tilde{\psi}(x) = 0$. Por lo tanto $\tilde{\psi}(\frac{b}{1}) \in F \Longrightarrow \tilde{\psi}(\frac{b}{1}) = \psi(b)\ \phi(1)^{-1} \in F \Longrightarrow \psi(b) \in F$.

Además de la igualdad anterior se tiene que,

$\psi(b) = \tilde{\psi}(\frac{b}{1}) = \phi(a)\ \phi(s)^{-1}$. Así todas las extensiones $\psi : B \longrightarrow E$ de ϕ coinciden sobre b, por no depender de ψ, es decir $b \in \underset{B}{+A}$.

Recíprocamente sea $b \in \underset{B}{+A}$, tal que todas las extensiones $\psi : B \longrightarrow E$ de ϕ, coinciden sobre b y $\psi(b) \in F$. Sea $P \in Spec(A)$ arbitrario. A_PB entero sobre A_P y PA_P primo $\Longrightarrow$ existe Q ideal primo de A_PB tal que $Q \cap A_P = PA_P$. De aquí Q es maximal. Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi"'] & B \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\psi"] \\
A_P \arrow[r] \arrow[d] & A_PB \arrow[d] \\
F = \dfrac{A_P}{PA_P} \arrow[r] & E = \dfrac{A_PB}{Q}
\end{tikzcd}
$$

Ahora bien $\psi(b) \,\varepsilon\, F = \dfrac{A_P}{PA_P} \Longrightarrow \psi(b) = \dfrac{a}{s} + PA_P$, también

$\psi(b) = \dfrac{b}{1} + Q$. Como $\psi(b) \,\varepsilon\, E$, obtenemos que $\dfrac{a}{s} + Q = \dfrac{b}{1} + Q$ en

$\dfrac{A_PB}{Q}$. Luego $\dfrac{b}{1} - \dfrac{a}{s} \,\varepsilon\, Q$, para todo ideal maximal Q de A_PB. -

Así $\dfrac{b}{1} \,\varepsilon\, \dfrac{a}{s} + Q \Longrightarrow \dfrac{b}{1} \,\varepsilon\, A_P + Q$, para todo ideal Q maximal de

A_PB.

Es decir $\dfrac{b}{1} \,\varepsilon \bigcap (A_P + \mathrm{Jac}(A_PB))$. Efectivamente

${}^{+}_{B}A = \{ b \,\varepsilon\, B : \dfrac{b}{1} \,\varepsilon \bigcap (A_P + \mathrm{Jac}(A_PB)) \}$. Y ${}^{+}_{B}A$ es maximal por

construcción.

<u>Lema 1.6</u>. Sean $A \subset B \subset C$ anillos. Entonces:

C es subintegral sobre A, si y sólo si, C es subintegral sobre B y B es subintegral sobre A.

<u>*DEMOSTRACION.*</u> $\Longrightarrow)$ C entero sobre $A \Longrightarrow C$ es entero sobre B y B es entero sobre A. Además tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(C) \arrow[rr, "h^*"] \arrow[dr, "g^*"'] & & \mathrm{Spec}(A) \\ & \mathrm{Spec}(B) \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

con h^* biyectiva por hipóresis. Ahora bien, $f^* \circ g^* = h^*$ y h^* es 1-1 $\Longrightarrow g^*$ es 1-1 $\Longrightarrow g^*$ es biyección $\Longrightarrow f^*$ es biyección.

Además, $\forall\, P \in \mathrm{Spec}(A)$, existe $Q \in \mathrm{Spec}(B)$, tal que $Q \cap A = P$ y $\forall\, Q \in \mathrm{Spec}(B)$, existe $R \in \mathrm{Spec}(C)$, tal que $R \cap B = Q$. Luego: $P = Q \cap A = R \cap B \cap A = R \cap A$; luego tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K(P) = K(A \cap R) = K(A \cap Q) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & K(Q) \arrow[r, "g"] & K(R) \end{tikzcd}$$

f y g son 1-1, mientras que h es biyección por hipótesis. De aquí, $h = g \circ f$ y h sobre $\Longrightarrow$ g es sobre $\Longrightarrow$ g es biyección $\Longrightarrow$ f es biyección.

Luego: $K(A \cap Q) \simeq K(Q)$, $\forall\, Q \in \mathrm{Spec}(B)$ y $K(R \cap B) \simeq K(R)$, $\forall\, R \in \mathrm{Spec}(B)$; Por lo tanto C es subintegral sobre B y B es subintegral sobre A.

$\Longleftarrow$) Directamente C es entero sobre A. Además por hipótesis los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ F & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & C \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\ E & \end{tikzcd}$$

pueden ser completados de manera única para todo homomorfismo ϕ y ϕ' y para todo par de cuerpos F y E. Colocando $\phi' = \psi$ y $E = F$, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & C \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\ F & \end{tikzcd}$$

pueden ser completados de manera única. Luego C es subintegral sobre A.

<u>Lema 1.7</u>. Si $A \subset B$ son anillos, con $B = A[b]$ y $b^2 = d$, -

$b^3 = c \in A$; entonces B es subintegral sobre A.

DEMOSTRACION. Tenemos que $B = A[b] = \{ a_o + a_1 b;\ a_o, a_1 \in A \}$ y que b es entero sobre A. Luego B es entero sobre A.

Sea $\phi : A \longrightarrow F$ un homomorfismo, donde F es un cuerpo. Sea $P = \operatorname{Ker} \phi$, primo en A. ϕ induce un homomorfismo; $\bar{\phi} : \frac{A}{P} \longrightarrow F$, dado por $\bar{\phi}(\bar{a}) = \phi(a)$.

Sea $Q \in \operatorname{Spec}(B)$, tal que $Q \cap A = P$; entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \frac{A}{P} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & \frac{B}{Q} \\ F & \end{tikzcd}$$

con $\frac{B}{Q} = \{ \bar{a}_o + \bar{a}_1 . \bar{b},\ \bar{a}_o, \bar{a}_1 \in \frac{A}{P},\ \bar{b} = b + Q \}$.

Una extensión de $\bar{\phi}$ a $\frac{B}{Q}$ es, $\bar{\psi} : \frac{B}{Q} \longrightarrow F(b^*)$; donde

$F(b^*) = \{ x + yb^*,\ x, y \in F,\ b^*$ algebraico sobre $F \}$ y

$\bar{\psi}(\bar{a}_o + \bar{a}_1 \bar{b}) = \phi(a_o) + \phi(a_1) b^*$, b^* una raíz de $x^2 - \phi(d)$,

$d = b^2 \in A$.

Luego tenemos $B \xrightarrow{\psi} \frac{B}{Q} \xrightarrow{\bar{\psi}} F(b^*)$.

Sea ψ_1 otra extensión de ϕ tal que $\psi_1|_A = \phi$, entonces:

$$\psi_1(b^2) = \psi_1(b)^2 = \psi_1(d) = \psi(d) = \psi(b)^2$$

$$\psi_1(b^3) = \psi_1(b)^3 = \psi_1(c) = \psi(b)^3.$$

De aqui obtenemos que $\psi(b) = \psi_1(b)$, luego ψ y ψ_1 coinciden - en $B = A[b]$, por lo tanto usando lema 4.1, B es subintegral sobre A.

Definición 1.8. Sean $A \subset B$ anillos. Diremos que B es una extensión subintegral elemental de A, si $B = A[b]$, con b^2, $b^3 \in A$.

Definición 1.9. Sean $A \subset B$ anillos con B finito sobre A. El conductor de A en B se define como el conjunto; $I = \{ a \in A : aB \subset A \}$. I es un ideal de B.

Proposición 1.10. Sean $A \subset B$ anillos con B finito sobre A. Sea I el conductor de A en B y $I^* = \{ x \in A_S ; x B_S \subset A_S \}$ el conductor de A_S en B_S, donde S es cualquier subconjunto - multiplicativamente cerrado A. Entonces $I^* = I_S$, donde $I_S = \{ \frac{a}{s} : a \in I, s \in S \}$.

DEMOSTRACION.

(i) $I_S \subseteq I^*$.

$z \in I_S \Longrightarrow z = \frac{a}{s}$, $a \in I$, $s \in S$. Sea $w \in B_S$, es decir $w = \frac{b}{s'}$, $b \in B$, $s' \in S$. Luego $z.w = \frac{ab}{ss'} \in A_S$, ya que $ab \in A$. De aquí $z \in I^*$, ya que $z \in A_S$ y $zB_S \in A_S$.

(ii) $I^* \subseteq I_S$.

Tenemos que $B = \sum_{j=1}^{\ell} Ax_j$; ya que B finito sobre A implica que $B = A[b_1, \ldots, b_n]$ con $b_1, b_2, \ldots, b_n$ enteros sobre A y por [4, Corolario 5.2] B es un A-módulo con generación finita.

Sea $z \in I^*$, es decir $z \in A_S$ y $zB_S \subset A_S$.

$zB_S \subset A_S \Longrightarrow zb' \in A_S$, $\forall\, b' \in B_S$. En particular $x_j = \frac{x_j}{1} \in B_S$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$; luego $zx_j \in A_S$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$.

Ahora bien $zx_j \in A_S \Longrightarrow zx_j = \frac{a_j}{s_j}$, $a_j \in A$, $s_j \in S \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (zx_j\ s_j - a_j)s'_j = 0$ para algún $s'_j \in S$ y para cada $j = 1, 2, \ldots, \ell$.

De aquí $zx_j\ s_j\ s'_j = a_j\ s'_j \in A \Longrightarrow z\ b_j\ t_j = c_j \in A$, donde $t_j = s_j\ s'_j$, $c_j = a_j\ s'_j$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$.

Si tomamos $t = t_1 . t_2 . \ldots . t_\ell \in S$; tenemos que $tz\ x_j \in A$, para $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Como $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ generan a B como A-módulo se obtiene que $tz\ B \subset A$.

De $tz\ B \subset A$, se tiene que $tz \in I \subset A$. Así $z = \frac{tz}{t} \in I_S$. Luego $I^* \subseteq I_S$.

De (i) y (ii) obtenemos que $I^* = I_S$.

<u>TEOREMA 1.11</u>. Sean $A \subset B$ anillos. Entonces A es seminormal en $B \Longleftrightarrow b \in B$; $b^2, b^3 \in A$ implica que $b \in A$.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. $\Longrightarrow$) Sea A seminormal en B; sea $b \in B$, tal que $b^2, b^3 \in A$ y consideremos $B_1 = A[b]$. Tenemos que $A \subset B_1$ con $b^2, b^3 \in A$; entonces por <u>Lema 1.7</u> B_1 es subintegral sobre A, luego por la definición de seminormalidad $B_1 = A$, es decir $b \in A$.

<==) Supongamos que A no es seminormal en B. Luego existe C con $A \subsetneq C \subset B$ y C subintegral sobre A.

Veamos que podemos encontrar $b \in C$, $b^2, b^3 \in A$, pero $b \notin A$.

Podemos asumir sin perder generalidad que $C = B$, ya que $b \in C \Longrightarrow b \in B$ y que B es finito sobre A, ya que si B no es finito sobre A, B contendrá cualquier extensión finita de A, tal que b esté en esta extensión.

Sea I el conductor de A en B y I^* como en la <u>Proposición 1.10</u>. Tenemos que $I^* = I_S$ y como I^* es el conductor de A_S en B_S, se tiene que I_S es el conductor de A_S en B_S, con S cualquier subconjunto multiplicativamente cerrado de A.

<u>Afirmación</u>: B_S es subintegral sobre A_S.

En primer lugar B_S es entero sobre A_S, ver [4, Proposición 5.6].

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_S \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & B_S \arrow[dl, dashed] \\
F &
\end{tikzcd}$$

Veamos que dicho diagrama puede ser completado de manera única para todo homomorfismo $\bar{\phi}$ y para todo cuerpo F.

Puesto que por hipótesis B es subintegral sobre A, tenemos que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & B \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ F & \end{tikzcd}$$

puede ser completado de manera única para todo homomorfismo ϕ y para todo cuerpo F.

En particular (2) puede ser completado de forma única para $\phi = \bar{\phi}|_A$. En este caso tenderemos $\psi|_A = \phi$.

Definamos $\bar{\psi} : B_S \longrightarrow F$, por $\bar{\psi}(\frac{b}{s}) = \psi(b)\ \psi(s)^{-1}$.

<u>Afirmación</u>: $\psi|_{A_S} = \bar{\phi}$. Sea $\frac{a}{s} \in A_S$. Entonces:

$$\bar{\psi}(\frac{a}{s}) = \psi(a)\ \psi(s)^{-1} = \psi(a.s^{-1}) = \phi(a)\ \phi(s)^{-1} = \bar{\Phi}(a)\ \bar{\Phi}(s)^{-1} = \bar{\Phi}(\frac{a}{s}).$$

Así (1) puede ser completado de forma única ya que ψ es única; Por lo tanto B_S es subintegral sobre A_S.

Veamos que si $A_S \neq B_S$, entonces es suficiente probar el resultado del teorema para $A_S \subset B_S$.

Supongamos que $x \in B$, $\frac{x}{s} \notin A_S$, pero $(\frac{x}{s})^2$, $(\frac{x}{s})^3 \in A_S$.

Entonces $(\frac{x}{s})^2$, $(\frac{x}{s})^3 \in A_S \Longrightarrow \frac{x^2}{s^2} = \frac{a}{t^2}$ y $\frac{x^3}{s^3} = \frac{c}{t^3}$, donde $a, c \in A$, $t \in S$. De aquí existen $u', u'' \in S$ tales que

$$u'(t^2 x^2 - s^2 a) = 0 \quad \text{y} \quad u''(t^3 x^3 - s^3 c) = 0.$$

Tomando $u = u'u'' \in S$, tenemos que $u^2(t^2 x^2 - s^2 a) = 0$ y $u^2(t^3 x^3 - s^3 c) = 0$.

Veamos que $b = utx \in B$ es el elemento requerido.

$b^2 = u^2 t^2 x^2 = u^2 s^2 a \in A$ y $b^3 = u^3 t^3 x^3 = u^3 s^3 c \in A$.

<u>Afirmación</u> $b \notin A$. En caso contrario $b \in A \Longrightarrow \frac{x}{s} = \frac{utx}{uts} = \frac{b}{s'} \in A_S$, contradicción ya que $\frac{x}{s} \notin A_S$.

Puesto que S es cualquier subconjunto multiplicativamente cerrado de A, sea $P \in \mathrm{Spec}(A)$, con $P \supset I$ minimal sobre I, el conductor de A en B; es decir, P es tal que si $P' \in \mathrm{Spec}(A)$, con $P \supset P' \supset I$, entonces $P = P'$.

P existe, ver [4, Ejercicio 8, Pag. 13].

<u>Afirmación</u>: $I_S \neq A_S$, con I_S el conductor de A_S en B_S

$I \subset P \Longrightarrow I \cap (A - P) = \phi$. Ahora bien $I \cap (A - P) = \phi$ y $S = A - P \Longrightarrow I_S \subsetneq A_S$, es decir $I_S \neq A_S$. De aqui $A_S \neq B_S$.

Reemplazando A y B por A_S y B_S respectivamente, reducimos la situación al caso en que A es local con ideal maximal P, ver [4, Proposición 3.11 (iv)].

Además como P es minimal sobre I, tenemos que

$$\operatorname{rad}(I) = \bigcap \{ P' : P' \text{ ideal primo de } A,\ P' \supset I \} = P.$$

Ahora bien $\frac{B}{I}$ es reducido o tiene elementos nilpotentes.

i) Asumamos que $\frac{B}{I}$ tiene elementos nilpotentes.

Sea $\bar{y} \in \frac{B}{I}$, tal que $(\bar{y})^n \in I$, $n \geq 2$, y n mínimo. Sea $x = y^{n-1}$, entonces $x \notin I$, x^2, $x^3 \in I$.

Ahora bien $x \notin I$, implica que existe $z \in B$ tal que $xz \notin A$. Tomando $b = xz$, tenemos que $b \in B$, b^2, $b^3 \in A$, pero $b \notin A$.

ii) Asumamos ahora que $\frac{B}{I}$ es reducido.

$\frac{B}{I}$ reducido y $\frac{A}{I} \subset \frac{B}{I} \Longrightarrow \frac{A}{I}$ reducido. Luego

$I = \mathrm{rad}(I) = P.$

Así $\frac{A}{P}$ es cuerpo. Por hipótesis B es finito sobre A, por lo tanto $\frac{B}{I}$ es una extensión finita de $\frac{A}{P}$. Así existe un número finito de ideales primos $\frac{Q_i}{I}$ de $\frac{B}{I}$ tales que $\frac{Q_i}{I} \cap \frac{A}{P} = (0)$. Ver [4, Ejercicio 15, Pag. 77]. Puesto que $\frac{B}{I}$ es reducido tenemos que $\bigcap_{i=n}^{n} \frac{Q_i}{I} = \mathrm{nil}(\frac{B}{I}) = (0)$.

Además como $\frac{A}{P}$ es campo, se tiene que Q_i, i=1, 2, ..., n son maximales.

Así tenemos que

$$\frac{B}{I} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{\frac{B}{I}}{\frac{Q_i}{I}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{B}{Q_i}, \quad \text{con } \frac{B}{Q_i} \text{ campos.}$$

Usando <u>Lema 1.4</u> tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \frac{A}{P} & \longrightarrow & \frac{B}{I} & \longrightarrow & \frac{B}{P} = \bigoplus_{1=i}^{n} \frac{B}{Q_i} \\ \big\downarrow & & & & \\ \frac{A}{P} & & & & \end{array}$$

puede ser completado de forma única, por lo tanto $n = 1$ y así se debe tener que $\frac{A}{P} = \frac{B}{P}$, de donde $A = B$, contrario a la hipótesis de que $A \neq B$.

Corolario 1.12. Sean $A \subset B \subset C$ anillos. Si A es seminormal en B y B es seminormal en C, entonces A es seminormal en C.

DEMOSTRACION. Sea $b \in C$, con $b^2, b^3 \in A$, entonces $b \in C$, con $b^2, b^3 \in B$ y puesto que B es seminormal en C se tiene que $b \in B$.

Ahora bien $b \in B$, $b^2, b^3 \in A$ y A seminormal en B, implica que $b \in A$. Luego A es seminormal en C.

Notas:

i) Si A es seminormal en C, trivialmente se tiene que A es seminormal en B, sin embargo no necesariamente B es seminormal en C; Tomese $A = K[x^2]$, $B = K[x^2, x^3]$, $C = K[x]$, donde $K[x]$ es el anillo de polinomios con coeficientes en K.

ii) Lo anterior dice que el recíproco del Corolario 1.12 no se sigue.

TEOREMA 1.13. Sean $A \subset B$ anillos. Entonces $\underset{B}{+}A$ es la unión filtrada de todos los subanillos de B, los cuales pueden ser obtenidos a partir de A por un número finito de extensiones subintegrales elementales.

DEMOSTRACION. Sea C la unión de tales subanillos de B, es decir; $C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, donde cada A_α es tal que:

$$A = A_0^\alpha \subset A_1^\alpha = A[a_1] \subset A_2^\alpha = A_1^\alpha[a_2] \subset \ldots \subset A_{n_\alpha}^\alpha = A_{n_\alpha-1}^\alpha[a_{n_\alpha}] = A[a_1, a_2, \ldots, a_{n_\alpha}] = A_\alpha$$

y además a_i^2; $a_i^3 \in A_{i-1}^\alpha$, $a_i \notin A_{i-1}^\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$; es decir A_i^α es una extensión subintegral elemental de A_{i-1}^α, para $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$.

Veamos que C es una unión filtrada, es decir para cada par A_α, A_β, existe A_δ, tal que $A_\alpha \subset A_\delta$ y $A_\beta \subset A_\delta$.

Sea A_β "del mismo tipo que A_α", es decir:

$A = A_o^\beta \subset A_1^\beta = A[b_2] \subset \ . \ . \ . \subset A_{n_\beta}^\beta = A[b_1, b_2, \ldots , b_{n_\beta}] = A_\beta$ con A_j^β extensión subintegral elemental de A_{j-1}^β.

Si $A_\alpha \subset A_\beta$ ó $A_\beta \subset A_\alpha$ no hay nada que probar. Sea b_j tal - que $b_j \notin A_\alpha$ y $b_{j-1} \in A_\alpha$.

$b_{j-1} \in A_\alpha \Longrightarrow b_{j-2}, b_{j-3}, \ldots , b_1 \in A_\alpha \Longrightarrow A[b_1, b_2, \ldots , b_{j-1}] \subset A_\alpha$.

Si tomamos $A_\delta = A_\alpha[b_j, b_{j+1}, \ldots , b_{n_\beta}]$ tenemos que $A_\alpha \subset A_\delta$ y $A_\beta \subset A_\delta$. Además $b_j^2, b_j^3 \in A[b_1, b_2, \ldots , b_{j-1}]$ implica que $b_j^2, b_j^3 \in A_\alpha$; luego A_δ se obtiene a partir de A por un número finito de extensiones subintegrales elementales.

Veamos que C es subintegral sobre A.

En primer lugar C es entero sobre A, ya que dado $x \in C$, $x \in A_\alpha$ para algún y por transitividad se obtiene que A_α es entero sobre A.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & C = \bigcup A_\alpha \\ F & \end{tikzcd}$$

donde el homorfismo ϕ y el cuerpo F son arbitrarios.

Por Lema 1.7 tenemos que A_i^{α} es subintegral sobre A_{i-1}^{α} y utilizando Lema 1.6 obtenemos que A_{α} es subintegral sobre A, para todo α, luego el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & A_{\alpha} \arrow[dl, dashed, "\psi_{\alpha}"] \\ F & \end{tikzcd}$$

puede ser completado de forma única para todo α. Definamos $\psi : C = \bigcup A_{\alpha} \longrightarrow F$, como $\psi(x) = \psi_{\alpha}(x)$, si $x \in A_{\alpha}$.

Si $x \in A_{\beta}$, entonces $\psi(x) = \psi_{\beta}(x)$. Ahora bien como C es una unión filtrada, se tiene que existe A_{δ} tal que $A_{\alpha} \subset A_{\delta}$ y $A_{\beta} \subset A_{\delta}$, luego $\psi_{\alpha}(x) = \psi_{\beta}(x) = \psi_{\delta}(x)$, por lo tanto ψ es independiente de α y β. Así 1 puede ser completado de manera única para todo homomorfismo ϕ y para todo cuerpo F. Luego C es subintegral sobre A y por ser ${}^{+}_{B}A$ maximal se tiene que

$A \subset C \subset {}^{+}_{B}A \subset B$.

Ahora bien, si $C \subsetneq {}^{+}_{B}A \subset B$, entonces C no es seminormal en B; por Teorema 1.11 podemos encontrar $b \in B$, $b^2, b^3 \in C$; pero

$b \notin C$. $b^2, b^3 \in C \Longrightarrow b^2, b^3 \in A_\delta = D$, para algún δ; por ser - C filtrada.

Tenemos que $b^2, b^3 \in D \subset C$, donde D se obtiene a partir de A por un número finito de extensiones subintegrales elementales; - entonces $D[b]$ es el resultado de una extensión más, así $D[b] \subset C$ ó $D[b] = C$. En ambos casos $b \in C$.

Contradicción. Luego $C = \underset{B}{+}A$.

Proposición 1.14. Sean $A \subset B$ anillos. Entonces la formación de $\underset{B}{+}A$ conmuta con localización respecto a subconjuntos multiplicativamente cerrados de A, es decir $\left[\underset{B}{+}A\right]_S = \underset{B_S}{+}A_S$.

DEMOSTRACION. Tenemos que:

$$A \subset \underset{B}{+}A \subset B \Longrightarrow A_S \subset \left[\underset{B}{+}A\right]_S \subset B_S.$$

Por Teorema 1.13 $\underset{B}{+}A = \bigcup A_\alpha$. Luego $L = \left[\underset{B}{+}A\right]_S = \left[\bigcup A_\alpha\right]_S = \bigcup (S^{-1}A_\alpha)$.

Afirmación: L es la extensión subintegral maximal de A_S en B_S. Si no lo fuera sea D una extensión subintegral no trivial de L en B_S, tal que $L \subsetneq D \subset B_S$.

Por Teorema 1.11 podemos encontrar $\frac{x}{s} \in D$, con $(\frac{x}{s})^2$, $(\frac{x}{s})^3 \in L$, pero $\frac{x}{s} \notin L$.

$(\frac{x}{s})^2$, $(\frac{x}{s})^2 \in L = \bigcup (S^{-1}A_\alpha) \Longrightarrow (\frac{x}{s})^2$, $(\frac{x}{s})^3 \in S^{-1}A_\beta$, para algún β; ya que la unión es filtrada.

Resumiendo tenemos que: $(\frac{x}{s})^2$, $(\frac{x}{s})^3 \in S^{-1}A_\beta$, pero $\frac{x}{s} \notin S^{-1}A_\beta$.

Procediendo como en el Teorema 1.11 tenemos que si $z = utx$, entonces z^2, $z^2 \in A_\beta$, pero $z \notin A_\beta$. Luego $D' = A_\beta[z]$ es una extensión subintegral elemental de A_β. Por Teorema 1.13 $A_\beta[z] \subset {}^{+}_{B}A$ y de aqui $(A_\beta[z])_S \subset \left[{}^{+}_{B}A\right]_S = L$.

Afirmación: $\frac{x}{s} \in (A_\beta[z])_S$.

$\frac{x}{s} = \frac{utx}{uts} = \frac{z}{s'} \in (A_\beta[z])_S$, ya que $z \in A_\beta[z]$ y $s' \in S$.

Luego $\frac{x}{s} \in L$, contradicción ya que $\frac{x}{s} \notin L$; por lo tanto

$L = \left[{}^{+}_{B}A\right]_S$ es la extensión subintegral maximal de A_S en B_S.

Pero sabemos que dicha extensión es ${}^{+}_{B_S}A_S$. Luego se obtiene la igualdad deseada $\left[{}^{+}_{B}A\right]_S = {}^{+}_{B_S}A_S$.

Corolario 1.15. Sean $A \subset B$ anillos. Sea S cualquier subconjunto multiplicativamente cerrado de A. Entonces:

i) Si A es seminormal en B (resp. subintegral), entonces A_S es seminormal en B_S (resp. subintegral).

ii) A es seminormal en B (resp. subintegral) si y sólo si, $B_M = A_M B$ es seminormal en A_M (resp. subintegral); para todo ideal maximal M de A.

DEMOSTRACION.

a) Si A es seminormal en B, entonces $\underset{B}{+}A = A$, por lo tanto, usando Proposición 1.14 $A_S = \left[\underset{B}{+}A\right]_S = \underset{B_S}{+}A_S$ y por consiguiente A_S es seminormal en B_S.

b) Si B es subintegral sobre A, entonces $\underset{B}{+}A = B$. Procediendo de forma similar que en a) obtenemos que B_S es subintegral sobre A_S.

c) Sea A_M seminormal en B_M, para todo ideal maximal M de A.

Afirmación: Sean C, D, subanillos de un anillo dado R, entonces $C_M = D_M$, para todo ideal M de R, implica que $C = D$.

$x \in C \Longrightarrow \frac{x}{1} \in C_M \Longrightarrow \frac{x}{1} \in D_M \Longrightarrow \frac{x}{1} = \frac{b}{s_m}$ para algún $\frac{b}{s_m} \in D_M$.

Es decir $\frac{x}{1} = \frac{b}{s_m}$, $s_m \notin M$, $b \in D$. De aquí $x\, s_m \in D$.

Sea I el ideal generado por $\{ s_m : s_m \notin M \}$. $I = R$, ya que si $I \subsetneq R \Longrightarrow I \subset M_o$ para algún ideal maximal M_o. Pero $s_{m_o} \in I \Longrightarrow s_{m_o} \in M_o$ contradicción.

$I = R \Longrightarrow 1 \in I \Longrightarrow \Sigma r_m . s_m = 1 \Longrightarrow \Sigma r_m (s_m\, x) = x$. Pero $s_m x \in D$ y D R-módulo implica que $\Sigma r_m (s_m\, x) = x \in D$.

Similarmente $D \subset C$. Luego $D = C$, siempre que $C_M = D_M$, para todo ideal maximal M de R.

Ahora bien A_M seminormal en B_M implica que $A_M = {}_{B_M}^{+}A_M = ({}_{B}^{+}A)_M$, para todo ideal maximal M de A; por la afirmación anterior obtenemos que $A = {}_{B}^{+}A$, es decir A es seminormal en B. La implicación contraria se obtiene directamente de la parte a).

d) Similarmente B es subintegral sobre A si y sólo si, B_M es subintegral sobre A_M, para todo ideal maximal M de A.

Definición 1.16. Sea A un anillo. A se llama seminormal, si A es reducido y si para cualquier $b, c \in A$ con $b^3 = c^2$, existe un $a \in A$ tal que $a^2 = b$ y $a^3 = c$.

Lema 1.17. Sea A un anillo. Sean $x, y \in A$. Entonces $x^2 = y^2, x^3 = y^3 \Longrightarrow (x - y)^3 = 0$.

DEMOSTRACION. Trivial.

Proposición 1.18. Sea A un anillo. A es seminormal, si y sólo si, para cualesquiera $b, c \in A$ con $b^3 = c^2$, existe un único $a \in A$, tal que $a^2 = b$ y $a^3 = c$.

DEMOSTRACION. $\Longrightarrow$) a existe; veamos que es único. Sea $a_o \in A$, $a_o \neq a$ y $a_o^2 = b$, $a_o^3 = c$. Por Lema 1.17;

$a_o^2 = a^2$, $a_o^3 = a^3 \Longrightarrow (a - a_o)^3 = 0$. $a - a_o = 0 \Longrightarrow A$ no es reducido contradicción. Luego a es único.

$\Longrightarrow$) Veamos que A es reducido.

Sea $x \in A$, tal que $x^n = 0$, $n \geq 2$ (mínimo).

Sea $b = c = x^{n-1}$. Entonces $b, c \in A$ y $b^3 = c^2 = 0$; por lo tanto existe un único $a \in A$, tal que:

$$a^2 = b = x^{n-1} \quad y \quad a^3 = c = x^{n-1}.$$

Ahora bien, $b = c = a^3 \Longrightarrow b = a.a^2 = b\,a\,b \Longrightarrow ab = a^2 b \Longrightarrow$

$\Longrightarrow b = b^2 = x^{2n-2} = 0 \Longrightarrow b = x^{n-1} = 0$. Contradicción, ya que n es mínimo. Luego A es reducido.

Proposición 1.19. Sea A un anillo. Si A es seminormal, - así lo es A_S, para todo subconjunto multiplicativamente cerrado de A.

DEMOSTRACION. Es fácil probar que A_S es reducido para todo S.

Sea $x, y \in R_S$, con $x^3 = y^2$ en A_S. x, y pueden escribirse como: $x = \frac{b}{s^2}$, $y = \frac{c}{s^2}$, para algún $s \in S$, $b, c \in A$. Luego

$x^3 = y^2 \Longrightarrow$ Existe $t \in S$, tal que,
$t(b^3 s^6 - c^2 s^6) = 0 \Longrightarrow t\,b^3 = t\,c^2$, ya que s es una unidad.

Luego $(t^2 b)^3 = (t^3 c)^2$ y A reducido implican que existe un único $a \in A$, tal que: $a^2 = t^2 b$ y $a^3 = t^3 c$.

Haciendo $z = \frac{a}{st}$, tenemos que $z^2 = x$, $z^3 = y$. Es decir A_S es seminormal para todo S.

Sistemas inversos. Sea I un conjunto dirigido y sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, una familia de anillos, tal que $1 \in A_\alpha$, $\forall \alpha \in I$.

Para cada par α, $\beta \in I$, tal que $\alpha \leq \beta$; sea $\mu_{\alpha\beta} : A_\beta \longrightarrow A_\alpha$ un homomorfismo de anillos tal que:

i) $\mu_{\alpha\alpha}$ es el homomorfismo identidad de A_α, $\forall \alpha \in I$.

ii) $\mu_{\alpha\gamma} = \mu_{\alpha\beta} \circ \mu_{\beta\gamma}$, siempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, es decir el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_\gamma \arrow[r, "\mu_{\beta\gamma}"] \arrow[dr, "\mu_{\alpha\gamma}"'] & A_\beta \arrow[d, "\mu_{\alpha\beta}"] \\ & A_\alpha \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Entonces decimos que los anillos A_α y los homomorfismos $\mu_{\alpha\beta}$ forman un Sistema Inverso $(A_\alpha, \mu_{\alpha\beta})_{\alpha,\ \beta\in I}$ sobre el conjunto dirigido I.

<u>Tenemos lo siguiente</u>:

i) $\bar{A} = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ es un anillo con identidad $1 = (1)_{\alpha\in I}$. La operación es el producto por coordenada.

ii) $A = \{ (a_\alpha)_{\alpha\in I} \mid \mu_{\alpha\beta}(a_\beta) = a_\alpha$, siempre que $\alpha \leq \beta \}$, con el producto usual es un subanillo de $\bar{A}$, llamado el Límite Inverso del sistema inverso $(A_\alpha, \mu_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ y lo denotaremos por: $A = \varinjlim A_\alpha$.

Proposición 1.20. Si $A_\alpha = \varinjlim A_\alpha$ y A_α es seminormal $\alpha \in I$, entonces A es seminormal.

DEMOSTRACION. Sean $b = (b_\alpha)_{\alpha \in I}$, $c = (c_\alpha)_{\alpha \in I}$ en A, tal que $b^3 = c^2$, es decir, tal que $b_\alpha^3 = c_\alpha^2$, $\forall \alpha \in I$. Ahora bien $b_\alpha^3 = c_\alpha^2$, $\forall \alpha \in I$ y A_α seminormal $\forall \alpha \in I \Longrightarrow$ Para cada $\alpha \in I$, existe un único $a_\alpha \in A_\alpha$, tal que

$$a_\alpha^2 = b_\alpha \quad y \quad a_\alpha^3 = c_\alpha.$$

Tomando $a = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$, tendremos que $a^2 = b$ y $a^3 = c$; lo deseado. Veamos ahora que $a \in A$, es decir:

$$\mu_{\alpha\beta}(a_\beta) = a_\alpha, \text{ siempre que } \alpha \leq \beta.$$

Ahora bien $\mu_{\alpha\beta}(b_\beta) = b_\alpha$, siempre que $\alpha \leq \beta$. Luego

$\mu_{\alpha\beta}(b_\beta) = b_\alpha \Longrightarrow \mu_{\alpha\beta}(a_\beta^2) = a_\alpha^2 \Longrightarrow [\mu_{\alpha\beta}(a_\beta)]^2 = a_\alpha^2$. Por unicidad en R_α, tenemos que $\mu_{\alpha\beta}(a_\beta) = a_\alpha$, siempre que $\alpha \leq \beta$. Luego $A = \varinjlim A_\alpha$ es seminormal.

Proposición 1.21. Sean $A \subset B$ anillos con B seminormal. Entonces, A es seminormal $\Longleftrightarrow$ A es seminormal en B.

DEMOSTRACION. $\Longrightarrow$) Sean $d \in B$, d^2, $d^3 \in A$, Coloquemos $b = d^2$ y $c = d^3$. Entonces $b^3 = c^2$, luego existe un único $a \in A$ tal que:

$a^2 = b$ (i)

$a^3 = c$ (ii) .

En particular d satisface (i) y (ii). Por la unicidad, se tiene que $d = a \in A$. Así A es seminormal en B.

$\Longleftarrow$) Sean $b, c \in A$, con $b^3 = c^2$.

$b, c \in A \Longrightarrow b, c \in B$ con $b^3 = c^2$ y B seminormal $\Longrightarrow$ Existe un único $a \in B$, tal que $a^2 = b$ y $a^3 = c$. Luego tenemos $a \in B$, con $a^2, a^3 \in A$. Como A es seminormal en B, se tiene que $a \in A$. Así A es seminormal.

Proposición 1.22. A un anillo reducido, $S = \{ a \in A \mid a \text{ es regular} \}$ y $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ el conjunto de los ideales primos minimales de A. Entonces $S = A - \bigcup P_\alpha$.

DEMOSTRACION. Sea $\phi : A \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} (\frac{A}{P_\alpha})$, dada por $\phi(a) = (a + P_\alpha)_{\alpha \in I}$. Puesto que A es reducido, $nil(A) = \bigcap P_\alpha = (0)$. Así ϕ es 1-1 ver [4, Proposición 1.10].

De aqui $A \subset \prod_{\alpha \in I} (\frac{A}{P_\alpha})$.

<u>Afirmación</u>: $A \subset \prod_{\alpha \in I} (\frac{A}{P_\alpha}) \Longrightarrow A - \bigcup P_\alpha \subset S$.

Sea $r \in A - \bigcup P_\alpha$, entonces $r \in A$ y $r \notin P_\alpha$, $\alpha \in I$.

$r \in A$ y $A \subset \prod_{\alpha \in I} (\frac{A}{P_\alpha}) \Longrightarrow r$ puede verse como un elemento de la forma $(r + P_\alpha)_{\alpha \in I}$; por lo tanto probar que r es regular es equivalente a probar que $(r + P_\alpha)_{\alpha \in I}$ es regular.

Si $(r + P_\alpha)_{\alpha \in I}$ no fuese regular, entonces existe

$(a_\alpha + P_\alpha)_{\alpha \in I} \neq (0)$ tal que

$(r + P_\alpha)_\alpha \ (a_\alpha + P_\alpha)_\alpha = (r\, a_\alpha + P_\alpha)_\alpha = (0) \Longrightarrow r\, a_\alpha \in P_\alpha, \ \forall \alpha \in I$

$\Longrightarrow r \in P_\alpha, \forall \alpha$ ó $a_\alpha \in P_\alpha, \ \forall \alpha$. Contradicción. Luego

$(r + P_\alpha)$ es regular, así r es regular, es decir $A - \bigcup P_\alpha \subset S$.

Sea P un ideal primo minimal de A, entonces A reducido implica que A_P es reducido, por lo tanto $nil(A_P) = P_P = PA_P = (0)$. Además P_P es primo minimal en A_P.

$P \cap S = \phi$, ya que de lo contrario, $r \in P \cap S \Longrightarrow \frac{r}{1} \in P_P = (0)$

$\Longrightarrow$ existe $s \in S$ tal que $s\,r = 0$ y como r es regular $\Longrightarrow s = 0$ contradicción, ya que $0 \notin S$. Ahora bien $P \cap S = \phi$ y P minimal arbitrario $\Longrightarrow (\cup P_\alpha) \cap S = \phi \Longrightarrow S \subset (\cup P_\alpha)' = A - \cup P_\alpha$. Luego se tiene la igualdad.

Corolario 1.23. Sea A un anillo reducido con solo un número finito de ideales primos minimales P_i, $1 \leq i \leq n$, entonces

$Q(A) = \prod_{i=1}^{n} K(P_i)$, donde $Q(A)$ es anillo de cocientes de A, $K(P_i)$ cuerpo.

DEMOSTRACION. Por Proposición 2.21 $S = A - \bigcup_{1=i}^{n} P_i$. Tenemos que $S^{-1} P_1, \ldots, S^{-1} P_n$ son ideales primos de A_S, además cualquier ideal primo de A_S es del tipo $S^{-1}P$, con P primo en A, luego $P \cap S = \phi \Longrightarrow P \subset \bigcup_{1=i}^{n} P_i \Longrightarrow P \subseteq P_i$, para algún i; pero P_i minimal $\Longrightarrow P = P_i$ para algún i.

Así los ideales $\left\{S^{-1} P_i\right\}_{i=1}^{n}$ son ideales maximales de $A_S = \{ \frac{a}{b}$: $a \in A$, $b \in S \} = \{ \frac{a}{b} : a \in A$, b regular $\} = Q(A)$.

Definamos $\phi : A_S = Q(A) \longrightarrow \prod_{1=i}^{n} K(P_i)$, como

$$\phi(\frac{a}{s}) = (\frac{a}{s} + S^{-1} P_1 , \dots , \frac{a}{s} + S^{-1} P_n)$$

ϕ es 1-1, ya que $nil(A_S) = \bigcap_{1=i}^{n} S^{-1}P_i = (0)$ y ϕ es sobre ya que $S^{-1} P_i$ maximal en A_S, implica que $S^{-1}P_i + S^{-1} P_j = A_S$, para $i \neq j$. Luego $Q(A) \simeq \prod_{i=1}^{n} K(P_i)$. ver [4, Proposición 1.10].

Definición 1.24. Sea A un anillo. Si b, c ε A con $b^3 = c^2$, definimos E(A, b, c) como el anillo reducido:

$$E(A, b, c) = \frac{A[X]}{(X^2-b,\ X^3-c)}_{red}\ ,\ \text{donde}\ A_{red} = \frac{A}{nil(A)},$$ para cualquier anillo A.

Simplificando la notación, tendremos que

$$E(A, b, c) = \frac{\widetilde{A[X]}}{nil(\widetilde{A[X]})} \quad \text{donde} \quad \widetilde{A[X]} = \frac{A[X]}{I}, \text{ con}$$

$I = (X^2 - b)\ A[X] + (X^3 - c)\ A[X]$.

Proposición 1.25. Si A es un anillo reducido y $b^3 = c^2$, entonces; $\phi : A \longrightarrow E(A, b, c)$ dada por

$\phi(a) = a + I + nil(\widetilde{A[X]})$ es 1-1.

DEMOSTRACION. Tenemos las siguientes aplicaciones:

$$A \xrightarrow{\tilde{\phi}} \widetilde{A[X]} \longrightarrow E(A,\ b,\ c)$$

$$a \longrightarrow a + I \longrightarrow a + I + nil(\widetilde{A[X]}).$$

Veamos que $\tilde{\phi}(a) = a + I$ es inyectiva.

$a \in \operatorname{Ker} \tilde{\phi} \Longrightarrow \tilde{\phi}(a) \in I \Longrightarrow a \in I \Longrightarrow a = (X^2-b)\ f(X) + (X^3-c)g(X).$

Luego $\qquad a \equiv (X^3 - c)\ g(X) \left[\bmod(X^2 - b)\right] \quad . . . \quad (i).$

Dividiendo $g(X)$ por $X^2 - b$ obtenemos,

$g(X) = (X^2 - b)\ q(X) + (r + sX)$, es decir

$$g(X) \equiv (r + sX)\ [\bmod(X^2 - b)] \quad . . . \quad (ii).$$

Además, $X^3 - c = X(X^2 - b) + (bX - c)$. De aquí

$$X^3 - c \equiv (bX - c)\ [\bmod(X^2 - b)] \quad . . . \quad (iii).$$

Utilizando (i), (ii) y (iii) tenemos que:

$a \equiv (bX - c)\ (r + sX)\ [\bmod(X^2 - b)]$, es decir;

$a \equiv (b\ r\ X + b\ s\ X^2 - cr - c\ s\ X)\ [\bmod(X^2 - b)].$

Dividiendo $b\ s\ X^2$ por $X^2 - b$, obtenemos que:

$a \equiv ((br - sc)X + (b^2 s - r\ c))\ [\bmod(X^2 - b)]$. De aquí

$rb - sc = 0$ y $a - (b^2\ s - rc) = 0$. Luego

$rb = sc$ y $a \in (b,c) = bA + cA$.

Ahora bien:

$a = b^2 s - rc \Longrightarrow ab = b^3 s - br\,c = c^2 s - br\,c = c(cs - br) = 0$

$a = b^2 s - r\,c \Longrightarrow ac = cb^2 s - rc^2 = cb^2 s - rb^3 = b^2(cs - rb) = 0$

$ab = ac = 0 \Longrightarrow ab\,A + a\,c\,A = 0$. Pero

$a \in bA + c\,A \Longrightarrow a^2 \in a\,b\,A + a\,c\,A = (0) \Longrightarrow a^2 = 0$. Puesto que A es reducido, tenemos que $a = 0$. Así $\tilde{\phi}$ es 1-1.

Veamos ahora que $\phi : A \longrightarrow E(A, b, c)$ en 1-1. Supongamos que $\phi(a) = 0$, para algún $a \neq 0$:

$\phi(a) = 0 \Longrightarrow a + I \in \text{nil}(\widetilde{A[X]})$, es decir $a^n + I = I$, para algún $n \geq 1$.

Por ser A reducido $a \neq 0 \Longrightarrow a^n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$; Además por ser $\tilde{\phi}$, 1-1, tenemos que $a^n \neq 0 \Longrightarrow \tilde{\phi}(a^n) \neq I \Longrightarrow [\tilde{\phi}(a)]^n \neq I \Longrightarrow$
$\Longrightarrow a^n + I \neq I, \quad \forall n \geq 1$. Contradicción, Luego necesariamente ϕ es 1-1.

Proposición 1.26. Sean $A \subset B$ anillos con B reducido. Sea $a \in B$, con $a^2 = b \in A$, $a^3 = c \in A$. Entonces $E[A,b,c] \approx A[a]$.

DEMOSTRACION. Con las mismas notaciones que en la Proposición 1.25, tenemos lo siguiente:

$\psi_1 : A[X] \longrightarrow A[a]$, definida por $\psi_1(X) = a$, es sobre.

Puesto que $\psi_1(X^2 - b) = a^2 - b = 0$ y $\psi_1(X^3 - c) = a^3 - c = 0$, se tiene que $I \subset \text{Ker } \psi_1$, por lo tanto ψ_1 induce una aplicación, $\psi : \widetilde{A[X]} = \frac{A[X]}{I} \longrightarrow A[a]$, dada por;

$$\psi(X + I) = \psi_1(X) = a.$$

Obviamente ψ es sobre.

<u>Afirmación</u>: $\text{Ker } \psi = \text{nil}(\widetilde{A[X]})$.

Sea $f(x) + I \in \text{nil}(\widetilde{A[X]}) \Longrightarrow (f(x) + I)^n = I \Longrightarrow f(x)^n + I = I$, para algún $n \geq 1$. $\psi((f(x) + I)^n) = \psi(f(x) + I)^n = (f(a))^n = 0$, ya que $f(x)^n \in I$, para algún $n \geq 1$.

Ahora bien, puesto que $[\psi(f(x) + I)]^n = 0$
$\psi(f(x) + I) \in A[a] \subset B$ con B reducido, se tiene que
$\psi(f(x) + I) = 0$, es decir, $f(x) + I \in \text{Ker } \psi$. Luego
$\text{nil}(\widetilde{A[X]}) \subseteq \text{Ker } \psi$.

Veamos que $\text{Ker } \psi \subseteq \text{nil}(\widetilde{A[X]})$.

Sea x la imagen de X por ψ_1 en $E(A, b, c)$, es decir $\psi_1(X) = x$. Luego en $E(A, b, c)$ tenemos:

$$0 = \psi_1(X^2 - b) \Longrightarrow \psi_1(X)^2 - \psi_1(b) = 0 \Longrightarrow x^2 = b \ \ldots \quad (i)$$

$$0 = \psi_1(X^3 - c) \Longrightarrow \psi_1(X)^3 - \psi_1(c) = 0 \Longrightarrow x^3 = c \ldots \quad (ii).$$

Ya que por Proposición 1.25 $\phi: A \longrightarrow E(A, b, c)$ es 1-1, entonces podemos considerar $A \subset E(A, b, c)$.

De (i) y (ii) obtenemos que $xb = c$.

Sea $p + qx \varepsilon \operatorname{Ker} \psi$, es decir $\psi(p + qx) = p + qa = 0$. Entonces

$$b(p + qx) = bp + bqx = b\,p + q\,a^3 = b\,p + q\,a\,b = b(p + qa) = 0.$$

También:

$$(p + qx)(p - qx) = p^2 - q^2x^2 = p^2 - q^2b = p^2 - q^2a^2 = (p - qa)(p + qa) = 0.$$

De aquí también se obtiene que $p^2 = q^2a^2 = q^2b$.

Además

$$p^2(p + qx) \quad q^2[b(p + qx)] = 0$$

$$x^2(p + qx) = b(p + qx) = 0.$$

Luego:

$$p^2(p+qx) = 0 \Longrightarrow p^2(p+qx)^2 = 0 \Longrightarrow [b(p+qx)]^2 = 0 \ldots \quad (iii)$$

$$x^2(p+qx) = 0 \Longrightarrow x^2(p+qx)^2 = 0 \Longrightarrow [x(p + qx)]^2 = 0 \ldots \quad (iv).$$

Ahora bien; $p(p + qx)$, $x(p + qx) \varepsilon E(A,b,c)$, ya que x pertenece al anillo $E(A, b, c)$. Puesto que $E(A, b, c)$ es reducido - obtenemos que; $p(p + qx) = 0$ y $x(p + qx) = 0$.

Por lo tanto

$$(p + qx)^2 = p(p + qx) + qx(p + qx) = 0 \Longrightarrow p + qx = 0.$$

Luego $p + qx \in nil(\widetilde{A[X]})$. Así obtenemos la igualdad.

De aquí

$$\frac{\widetilde{A[X]}}{Ker\,\psi} \simeq A|a|, \text{ es decir } E(A, b, c) \simeq A[a].$$

<u>Proposición 1.27</u>. Sea $A \subset B$ anillos reducidos con B subintegral sobre A. Sea $\phi : B \longrightarrow C$, con C reducido. Si $\phi|_A$ es inyectiva, así lo es ϕ.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. Podemos asumir que B es finito sobre A, ya que necesitamos probar que si $z \neq 0 \in B$, entonces $\phi(z) \neq 0$, donde $z \in A[z]$ y $A \subset A[z] \subset B$, con $A[z]$ subintegral sobre A (Lema 1.6).

Ahora bien, puesto que B es subintegral sobre A, tenemos que $B = {}_B^+A$ (Lema 1.5). Así por <u>Teorema 1.13</u> $B = \bigcup_\alpha B_\alpha$, donde cada B_α es un subanillo de B, que puede ser obtenido a partir de A, por un número finito de extensiones subintegrales elementales, es decir:

$A \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n = B_\alpha$ y B_i extensión subintegral elemen

Por lo tanto

$$(p + qx)^2 = p(p + qx) + qx(p + qx) = 0 \Longrightarrow p + qx = 0.$$

Luego $p + qx \in \mathrm{nil}(\widetilde{A[X]})$. Así obtenemos la igualdad.

De aquí

$$\frac{\widetilde{A[X]}}{\mathrm{Ker}\,\psi} \simeq A|a|, \text{ es decir } E(A, b, c) \simeq A[a].$$

<u>Proposición 1.27</u>. Sea $A \subset B$ anillos reducidos con B subintegral sobre A. Sea $\phi : B \longrightarrow C$, con C reducido. Si $\phi|_A$ es inyectiva, así lo es ϕ.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. Podemos asumir que B es finito sobre A, ya que necesitamos probar que si $z \neq 0 \in B$, entonces $\phi(z) \neq 0$, donde $z \in A[z]$ y $A \subset A[z] \subset B$, con $A[z]$ subintegral sobre A (Lema 1.6).

Ahora bien, puesto que B es subintegral sobre A, tenemos que $B = {}_{B}^{+}A$ (Lema 1.5). Así por <u>Teorema 1.13</u> $B = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$, donde cada B_{α} es un subanillo de B, que puede ser obtenido a partir de A, por un número finito de extensiones subintegrales elementales, es decir:

$A \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n = B_{\alpha}$ y B_i extensión subintegral elemen tal de B_{i-1}.

Tenemos que $A \subset B_1 = A[x]$, con $x^2 = b$; $x^3 = c \in A$ y $xb = c$.

Afirmación: $\phi|_{B_1}$ es 1-1, $B_1 = \{ p + q x, p, q \in A \}$

puesto que $\phi|_A$ es 1-1, podemos asumir sin perder generalidad que $A \subset C$, es decir $\phi(p) = p$, $\forall p \in A$.

Sea $a \in C$ la imagen de x, según ϕ; entonces podemos escribir $\phi(p + qx) = p + qa$.

Supongamos $\phi(p + qx) = p + qa = 0$. Procediendo de manera similar que en Proposición 1.26, obtenemos $p + qx = 0$.

Así $\phi|_{B_1}$ es 1-1. Reiterando este proceso $\phi|_{B_2}$ es 1-1, obteniendo finalmente que $\phi|_{B_\alpha}$ es 1-1. Puesto que B es finito sobre A, obtenemos que $\phi : B \longrightarrow C$ es 1-1.

Sistemas directos. Se definen de manera similar que los sistemas inversos, solamente intercambiamos los anillos A_α, es decir escribiremos $\mu_{\beta\alpha} : A_\alpha \longrightarrow A_\beta$, siempre que $\alpha \leq \beta$.

Aquí $A = \varinjlim A_\alpha$, está dada por el subanillo de $\bar{A} = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$;

$A = \{ (a_\alpha)_{\alpha \in I} \mid \mu_{\beta\alpha}(a_\alpha) = a_\beta,$ siempre que $\alpha \leq \beta \}$.

TEOREMA 1.28. Sea A un anillo reducido. Entonces existe una extensión B de A, tal que B es subintegral sobre A, con B seminormal. Además dicha extensión es universal para homomorfismo de A a anillos seminormales, es decir, si C es seminormal y $\phi : A \longrightarrow C$, entonces ϕ tiene una única extensión $\psi : B \longrightarrow C$. Además ψ es inyectiva si ϕ lo es. Finalmente B es único hasta isomorfismo.

DEMOSTRACION. Puesto que todo conjunto puede ser bien ordenado (Teorema de Zermelo), bien ordenamos todos los pares (b_α, c_α) en A, con $b_\alpha^3 = c_\alpha^2$, en el sentido siguiente:

$(b_\alpha, c_\alpha) < (b_\beta, c_\beta) \Longleftrightarrow \alpha < \beta$.

Sea $A_{-1} = A$

$A_{\alpha+1} = E(A_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$; siguiente de A_α.

Tenemos que A_α es reducido $\forall \alpha \in I$.

Sea $A_\lambda = \varinjlim_{\alpha<\lambda} A_\alpha$, si λ es límite ordinal, es decir λ no tiene inmediato predecesor.

Tenemos pues que $A_\lambda = \{ (a_\alpha)_{\alpha \in I}, \alpha < \lambda$ y $\mu_{\beta\alpha}(a_\alpha) = a_\beta$, siempre que $\alpha \leq \beta \}$.

Afirmación:

(i) A_λ es reducido $\forall \lambda$.

Sea $z \in A_\lambda$ con $z^n = 0$.

$z \in A_\lambda \Longrightarrow z = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\alpha < \lambda \Longrightarrow 0 = z^n = (a_\alpha^n)_{\alpha \in I} = (0) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a_\alpha^n = 0$, $\forall \alpha < \lambda \Longrightarrow a_\alpha = 0$, $\forall \alpha < \lambda$, ya que $a_\alpha \in A_\alpha$ y A_α es reducido $\forall \alpha \in I$. Luego $z = (0)$, $\alpha < \lambda$.

(ii) Cada A_α es subintegral sobre A, ya que por Proposición 1.26 $E(A, b, c) \simeq A[a]$, con $a^2 = b$, $a^3 = c \in A$ y de aquí $A_{\alpha+1} = E(A_\alpha, b_\alpha, c_\alpha) \simeq A_\alpha[a_\alpha]$. Utilizando acá Lema 1.6 ya que por Proposición 1.25; podemos considerar $A \subset E(A, b, c)$.

Por construcción tenemos que A_λ es subintegral sobre A, para cada A_λ. Al final de esta construcción obtenemos $A' = \bigcup A_\lambda$, con A' reducido, puesto que cada A_λ lo es y A' subintegral sobre A.

También, si $b^3 = c^2$ en A, entonces existe $a \in A'$ con $a^2 = b$, $a^3 = c$. Veamoslo

$b^3 = c^2$ en $A \Longrightarrow b^3 = c^2 \in A_\alpha$, para algún α; entonces existe $a_\alpha \in A_{\alpha+1} \subset A'$ tal que $a_\alpha^2 = b$ y $a_\alpha^3 = c$.

Sea ahora $A^{(o)} = A$, $A^{(n+1)} = A^{(n)'}$. Consideremos $B = \bigcup A^{(n)}$, $n \geq 0$, $n \in z$.

<u>Afirmación</u>: $A \subset B$, con B subintegral sobre A y B seminormal. Tenemos que $A \subset A' \subset A'' \subset \dots \subset B$; como A' es subintegral sobre A, por <u>Lema 1.6</u> obtenemos que B es subintegral sobre A.

Veamos ahora que B es seminormal.

$b^3 = c^2$ en $B \Longrightarrow b^3 = c^2$ en $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$, para algún n. Luego existe $a \in A^{(n+1)} = A^{(n)'}$ con $a^2 = b$ y $a^3 = c$. De aquí, existe $a \in B$ con $a^2 = b$ y $a^3 = c$; además cada $A^{(n)}$ es reducido, por lo tanto B es reducido; así B es seminormal.

Veamos ahora que se cumple la propiedad universal.

Sean C seminormal y $\phi : A \longrightarrow C$ un homomorfismo de anillos. Veamos que ϕ tiene una única extensión $\psi : B \longrightarrow C$, es decir se tiene el segmento diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Ahora bien,

$b^3 = c^2$ en $A \Longrightarrow \phi(b^3) = \phi(c^2) \Longrightarrow \phi(b)^3 = \phi(c)^2$ en C. Como C es seminormal, existe un único $y \in C$ tal que $y^2 = \phi(b)$, $y^3 = \phi(c)$.

Consideremos $E(A, b, c)$, Definición 1.24.

$X^2 = b \Longrightarrow \phi(b) = \phi(X)^2 \Longrightarrow y^2 = \phi(X)^2$ . . . (i)

$X^3 = c \Longrightarrow \phi(c) = \phi(X)^3 \Longrightarrow y^3 = \phi(X)^3$ . . . (ii).

Por Lema 1.17 obtenemos que $\phi(X) = y$ con $E(A, b, c) \simeq A[y] \subset C$, y puesto que y es único ϕ queda bien definida de esta manera. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\ E(A,b,c) \arrow[d] & \\ C & \end{tikzcd}$$

Por Proposición 1.25 podemos asumir $A \subset E(A, b, c)$ y como $\phi(X) = y$, y único, se tiene que la extensión ψ es única.

Por Proposición 1.27 se tiene que si $\phi : A \longrightarrow C$ es inyectiva así lo es $\psi : B \longrightarrow C$.

Veamos que B es único, hasta isomorfismo. Sea C, con C subintegral sobre A y C seminormal.

C subintegral sobre $A \Longrightarrow A \subset C \Longrightarrow \phi : A \longrightarrow C$ es inyectiva; por lo tanto $\psi : B \longrightarrow C$ es 1-1, así podemos considerar $B \subset C$. Luego obtenemos $A \subset B \subset C$.

Puesto que B es seminormal y C es subintegral sobre B obtenemos que $B = C$.

Definición 1.29. El anillo B del Teorema 1.28 se llama la seminormalización de A.

Corolario 1.30. Sean $A \subset B$ anillos con B seminormal, entonces ${}_{B}^{+}A$ es la seminormalización de A.

Prueba: Tenemos $A \subset {}_{B}^{+}A \subset C$.

${}_{B}^{+}A$ seminormal en B y B seminormal $\Longrightarrow {}_{B}^{+}A$ es seminormal.

Como ${}_{B}^{+}A$ es subintegral sobre A se tiene el resultado deseado.

Corolario 1.31. Sea $A \subset B$ anillos. Si B es la seminormalización de A y S es cualquier conjunto multiplicativamente - cerrado de A, entonces B_S es la seminormalización de A_S.

Prueba:

i) B subintegral sobre $A \Longrightarrow B_S$ es subintegral sobre A_S, ver Proposición 1.10.

ii) B seminormal $=$ B_S es seminormal, para todo S, Proposición 1.19.

Luego B_S subintegral sobre A_S y B_S seminormal, implica que B_S es la seminormalización de A_S, para todo S.

CAPITULO II

2.1. SEMINORMALIDAD SOBRE SERIES DE POLINOMIOS.

TEOREMA 2.1. Sean $R \subset T$ anillos, con $x_1, x_2, \dots, x_n$ indeterminadas.

i) Si R es seminormal en T, entonces $R[[x_1, \dots, x_n]]$ es seminormal en $T[[x_1, \dots, x_n]]$.

ii) R es seminormal, si y sólo si, $R[[x_1, \dots, x_n]]$ es seminormal.

iii) Si R tiene sólo un número finito de ideales primos minimales y R es seminormal, entonces $R[[x_1, \dots, x_n]]$ es seminormal en un anillo cociente.

DEMOSTRACION.

i) Aplicando inducción sobre n, es suficiente probar esta parte para el caso $n = 1$. Escribiremos $T[[x]]$ en vez de $T[[x_1]]$.

Sea R seminormal en T, con $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in T[[x]]$, $f^2, f^3 \in R[[x]]$.

Es suficiente probar que $(f - a_o)^2 \in R[[x]]$ y

$(f - a_o)^3 \in R[[x]]$, ya que escribiendo

$$g = \frac{f - a_o}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x^{i-1} \in T[[x]], \text{ tenemos:}$$

$$(f - a_o)^2 \in R[[x]] \Longrightarrow x^2 g^2 \in R[[x]] \Longrightarrow g^2 \in R[[x]]$$

$$(f - a_o)^3 \in R[[x]] \Longrightarrow g^3 \in R[[x]].$$

Luego tenemos que $g \in T[[x]]$, con $g^2, g^3 \in R[[x]]$. Luego $a_1 \in T$, con $a_1^2, a_1^3 \in R$, por lo tanto $a_1 \in R$.

Reiterando este proceso obtenemos que $a_n \in R$, $\forall n \geq 0$,

es decir; $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \in R[[x]]$.

Tenemos que probar ahora que $(f - a_o)^2$, $(f - a_o)^2 \in R[[x]]$. Esto es cierto, si y sólo si, $a_o\, f \in R[[x]]$. Para mostrar esto, es suficiente probar que $a_o\, a_m \in R$, $\forall m \geq 0$.

Argumentando por inducción sobre m, mostraremos que

$$\beta = a_o\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \; . \; . \; . \; a_m^{n_m} \in R \; . \; . \; . \quad (1)$$

para todo entero $n_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Para $m = 0$, trivialmente se cumple, ya que $a_o \in R$.

Asumamos que ① se cumple para m.

Sea $f^* = a_o + a_1 x + \dots + a_m x^m \in T[x]$ y consideremos:

$$g = a_o f^2(f - f^*)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^s f^{n-s+2} a_o (f^*)^s.$$

Ahora bien $n - s + 2 \geq 2$, es par o impar.

$n - s + 2$ par $\Longrightarrow n - s + 2 = 2k \Longrightarrow f^{n-s+2} = (f^2)^k \in R[[x]]$, ya que $f^2 \in R[[x]]$.

$n - s + 2$ impar $\Longrightarrow n-s+2 = 2k+1 = 2(k-1)+3 \Longrightarrow f^{n-s+2} = f^{2(k-1)} . f^3 \in R[[x]]$.

Además por hipótesis de inducción $a_o (f^*)^s \in R[x]$. De aquí $g \in R[[x]]$. En particular el coeficiente $a_o^3 a_{m+1}^n$ de $x^{(m+1)n}$ está en R, para todo $n \geq 0$.

Sea $\alpha = a_o a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m} a_{m+1}^{n_{m+1}} \in T$, para $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m + 1$. Entonces para $s \geq 4$,

$$\alpha^s = a_o^s a_1^{sn_1} \dots a^{s(m+1)} = a_o^{s-4} (a_o a_1^{sn_1} \dots a_m^{sn_m}) a_o^3 a_{m+1}^{s(m+1)} \in R,$$

luego $\alpha \in T$, con $\alpha^s, \alpha^{s+1} \in R$ y R seminormal $\Longrightarrow \alpha \in R$.

Así $\beta \in R$; en particular $a_o a_m \in R$, para todo m, por lo tanto $a_o f \in R[[x]]$, es decir $R[[x]]$ es seminormal en $T[[x]]$.

ii) $\Longleftarrow$) Sean $b, c \in R$, tal que $b^3 = c^2$. En particular $b, c \in R[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Ahora bien, $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ seminormal $\Longrightarrow$ Existe

$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x_1, \ldots, x_n]]$ tal que $f^2 = b$ y $f^3 = c$. De aquí $a_o \in R$ y a_o es tal que $a_o^2 = b$ y $a_o^3 = c$.

Luego R es seminormal.

$\Longrightarrow$) Sea $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la colección de todos los ideales primos minimales de R, entonces $\phi : R \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} \frac{R}{P_\alpha}$, dada por $\phi(r) = (r + P_\alpha)_{\alpha \in I}$, es 1-1, ya que $\mathrm{nil}(R) = \bigcap P_\alpha = (0)$; puesto que R es reducido.

Luego $R \subset \prod_{\alpha \in I} (\frac{R}{P_\alpha}) \subset \prod_{\alpha \in I} (Q(\frac{R}{P_\alpha}))$, donde $Q(\frac{R}{P_\alpha})$ denota el campo cociente del dominio entero $\frac{R}{P_\alpha}$.

Sea $W = \Pi(Q(\frac{R}{P_\alpha}))$, $Q(\frac{R}{P_\alpha}) = \{ \frac{\bar{a}}{\bar{b}}, \bar{a} \in \frac{R}{P_\alpha}, \bar{b}$ regular $\}$.

W es seminormal, ya que W es un campo y todo campo es seminormal.

i) W campo $\longrightarrow W$ es reducido.

ii) Sean $b, c \neq 0 \in W$, con $b^3 = c^2$. Escogiendo $a = \frac{c}{b}$, tenemso que $a^2 = b$ y $a^3 = c$.

Tenemos pues, $R \subset W$ con W seminormal. Por Proposición 1.21, R seminormal $\Longrightarrow$ R es seminormal en $W \Longrightarrow R[[x_1,\ldots, x_n]]$ es seminormal en $W[[x_1, \ldots , x_n]]$.

Ahora bien, puesto que $W[[x_1,\ldots,x_n]] \simeq \Pi(Q(\frac{R}{P_\alpha}))[[x_1,\ldots,x_n]]$, se tiene que $W[[x_1, \ldots , x_n]]$ es un producto directo de dominios seminormales, luego $W[[x_1, \ldots , x_n]]$ es seminormal.

Aplicando nuevamente Proposición 1.21 , tenemos $R[[x_1, \ldots , x_n]] \subseteq W[[x_1, \ldots , x_n]]$ con $W[[x_1, \ldots , x_n]]$ seminormal y $R[[x_1, \ldots , x_n]]$ seminormal en $W[[x_1, \ldots, x_n]]$. Luego $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ es seminormal.

iii) Por (ii) tenemos que $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ es seminormal.

<u>Afirmación</u>: $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ tiene solo un número finito de ideales primos minimales.

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ los ideales primos minimales de R, entonces $P_1[[x_1, \ldots, x_n]], \ldots, P_m[[x_1, \ldots, x_n]]$ son ideales primos de $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. Ver [4, Ejercicio 7, Pág. 37] y aplicar inducción sobre n.

Ahora bien, $I = \bigcap_{1=i}^{n} P_i[[x_1, \ldots, x_n]] = (0)$, ya que si $f \in I \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \in P_i[[x_1, \ldots, x_n]]$, $i = 1, 2, \ldots, n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a_j \in P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\bigcap_{1=i}^{n} P_i = (0)$, se tiene que $a_j = 0$, j. Luego $f = 0$.

En consecuencia se Q un ideal primo minimal de $R[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Se tiene que $Q \supset (0) \Longrightarrow Q \supset \bigcap_{i=1}^{n} P_i[[x_1, \ldots, x_n]] \Longrightarrow$

$\Rightarrow Q \supset P_j[[x_1, \ldots, x_n]]$. para algún $j \Longrightarrow Q = P_j[[x_1, \ldots, xj_n]]$, -

para algún j; ya que Q es minimal. De aquí $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ - tiene sólo un número finito de ideales primos minimales. Aplicando Corolario 1.23:

$$\tilde{Q} = Q(R[[x_1, \ldots, x_n]]) = \prod_{1=i}^{m} K(P_i[[x_1, \ldots, x_n]].$$

Como cada $K(P_i[[x_1, \ldots, x_n]])$ es seminormal, se tiene que - $\tilde{Q}$ es seminormal. Luego tenemos que $R[[x_1, \ldots, x_n]] \subseteq \tilde{Q}$ - con $\tilde{Q}$ seminormal y $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ seminormal, por Proposición 2.21, obtenemos que $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ es seminormal

en $\prod_{i=1}^{m} K[P_i[x_1, \ldots, x_n]]$, su anillo de cocientes.

2.2. SEMINORMALIDAD Y GRUPOS DE PICARD.

Sean $A \subset B$ anillos, con B finito y entero sobre A. Sea $P \in \mathrm{Spec}(A)$, entonces existen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \mathrm{Spec}(B)$, tales que $Q_i \cap A = P$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para cada i tenemos las inyecciones; $W_i : K(P) \longrightarrow K(Q_i)$, dadas por $W_i(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{a}{s} + Q_i BQ_i$, $1 \leq i \leq n$.

Definamos:

$$A' = \left\{ b \in B : \text{i) } \frac{b}{1} + Q_i B_{Q_i} \in W_i(K(P)), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \right.$$

$$\left. \text{ii) } W_i^{-1}\left(\frac{b}{1} + Q_i B_{Q_i}\right) = W_j^{-1}\left(\frac{b}{1} + Q_j B_{Q_j}\right), \qquad \forall i, j \right\}$$

Proposición 2.2.

i) A' es un subanillo de B que contiene a A, es decir $A \subset A' \subset B$.

ii) Existe un único ideal $P' \in \operatorname{Spec}(A')$, tal que, $P' \cap A = P$.

iii) El homomorfismo $W : K(P) = \dfrac{A_P}{PA_P} \longrightarrow K(P') = \dfrac{A'_{P'}}{P'A'_{P'}}$, dado por

$W(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{a}{s} + P'A'_{P'}$, es un isomorfismo.

DEMOSTRACION.

i) Se demuestra facilmente.

ii) Puesto que B es entero sobre A, entonces B es entero sobre A'; así dado $P' \in \operatorname{Spec}(A')$, existe $Q \in \operatorname{Spec}(B)$, tal que $P' = A' \cap Q$. En realidad $Q = Q_i$, para algún $i = 1, 2, \ldots, n$; ya que

$$P' = A' \cap Q \Longrightarrow P' \cap A = A \cap A' \cap Q = A \cap Q = P.$$

Digamos $P' = A' \cap Q_1$. Sea $P'' \in \operatorname{Spec}(A')$, tal que

$P'' \cap A = P = P' \cap A$. Análogamente $P'' = A' \cap Q_2$.

Tenemos las inyecciones:

$K(P) \longrightarrow K(P') \longrightarrow K(Q_1)$

$K(P) \longrightarrow K(P'') \longrightarrow K(Q_2)$.

Sea $a \in P' - P''$.

$a \in P' \Longrightarrow \frac{a}{1} \in P'A'_{P'} \subset Q_1 B_{Q_1} \Longrightarrow \frac{a}{1}$ es cero en $K(Q_1)$.

$a \notin P'' \Longrightarrow a \notin Q_2 \Longrightarrow \frac{a}{1}$ no es cero en $K(Q_2)$.

$a \in A' \Longrightarrow W_1^{-1}(\frac{a}{1} + Q_1B_{Q_1}) = W_2^{-1}(\frac{a}{1} + Q_2B_{Q_2})$, sin embargo

$W_1^{-1}(\frac{a}{1} + Q_1B_{Q_1}) = W_1^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}$, mientras que

$W_2^{-1}(\frac{a}{1} + Q_2B_{Q_2}) = \frac{a}{1} + PA_P = \bar{0}$, lo cual es una contradicción.

Luego se tiene ii).

iii) W es 1-1, ya que $W(\frac{a}{s} + PA_P) = \bar{0} \Longrightarrow \frac{a}{s} + P'A'_{P'} = P'A'_{P'} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{a}{s} \in P'A'_{P'} \Longrightarrow a \in P'$ y $s \notin P' \Longrightarrow a \in P$ y

$s \notin P' \Longrightarrow \frac{a}{s} \in PA_P \Longrightarrow \frac{a}{s} + PA_P = \bar{0}$.

Veamos que W es sobre. Sea $z = \frac{a'}{s'} + P'A'_{P'} \in K(P')$, - entonces $a' \in A'$ y $s' \notin P'$.

$s' \notin P' \Longrightarrow s' \notin Q_1 \Longrightarrow \frac{s'}{1} \notin Q_1B_{Q_1} \Longrightarrow \frac{s'}{1} + Q_1B_{Q_1}$ es una unidad en $K(Q_1)$. Además $s' \in A' \Longrightarrow \frac{s'}{1} + Q_1B_{Q_1} \in W_1(K(P))$ y como $\frac{s'}{1} + Q_1B_{Q_1}$ es una unidad en el campo $K(Q_1)$, tenemos $\frac{1}{s'} + Q_1B_{Q_1} \in W_1(K(P)) \Longrightarrow \frac{1}{s'} + Q_1B_{Q_1} = W_1(y + PA_P)$, para algún $y \in A_P$. Similarmente

$a' \in A' \Longrightarrow \frac{a'}{1} + Q_1B_{Q_1} = W_1(x + PA_P)$, para algún $x \in A_P$.

De aquí, obtenemos $W_1(xy + PA_P) = \frac{a'}{s'} + Q_1B_{Q_1}$.

Luego tenemos $K(P) \xrightarrow{W} K(P') \xrightarrow{W'} K(Q_1)$, con

$W_1 = W' \circ W$.

Ahora bien

$W'(\frac{a'}{s'} + P'A'_{P'}) = \frac{a'}{s'} + Q_1B_{Q_1} = W'(W(xy + PA_P))$ y W', 1-1, implica que $W(xy + PA_P) = \frac{a'}{s'} + P'A'_{P'}$. Luego W es sobre.

Lema 2.3. El anillo A' es seminormal en B.

DEMOSTRACION. Recordando Definición 1.2, la Proposición 2.2 dice que A' es subintegral sobre A. Por construcción A' es maximal, por lo tanto $A' = {}^{+}_{B}A$, es decir A' es seminormal en B.

Definición 2.4. Decimos que el anillo A' se obtiene de B, por "glueing" sobre P.

TEOREMA 2.5. Sean $A \subset B$ anillos, con B finito y entero sobre A. Entonces, A es seminormal en B, si y sólo si; A es una intersección de los anillos A' obtenidos de B por "glueing" sobre los ideales primos de A.

DEMOSTRACION. $\Leftarrow$) Sea $A = \bigcap A'$, A' obtenido de B por "glueing" sobre los ideales primos de A. Sea $b \in B$, con $b^2, b^3 \in A$; entonces b^2, b^3 A', $\forall A'$; y como A' es seminormal en B, entonces $b \in A'$, $\forall A'$. De aquí $b \in A$. Luego A es seminormal en B.

$\Rightarrow$) Sea A seminormal en B, es decir ${}^{+}_{B}A = A$. Para todo A' obtenido de B por "glueing" sobre P, tenemos que $A \subset A' \subset B$; luego $A \subset \bigcap A'$.

Sea $x \in \bigcap A'$, sea $P \in \operatorname{Spec}(A)$, P fijo. Para este P, existe un único $P' \in \operatorname{Spec}(A')$ tal que $P' \cap A = P$; además existen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \operatorname{Spec}(B)$, tal que, $P = A \cap Q_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Para cada i tenemos las inyecciones:

$$K(P) \xrightarrow{W} K(P') \xrightarrow{W_i'} K(Q_i), \text{ con } W_i = W_i' \circ W.$$

Ahora bien $x \in A' \subset B \Longrightarrow \frac{x}{1} + Q_i B_{Q_i} \in W_i(K(P))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por ser W_i, 1-1, existe un único $\frac{a}{s} \in A_P$, tal que $W_i(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{x}{1} + Q_i B_{Q_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pero $W_i(\frac{a}{s} + PA_P) = \frac{a}{s} + Q_i B_{Q_i}$, luego $\frac{x}{1} - \frac{a}{s} \in Q_i B_{Q_i}$.

De aquí $\frac{x}{1} - \frac{a}{s} \in \bigcap Q_i B_{Q_i} = \bigcap (Q_i B_{Q_i} \cap A_P B) = \operatorname{Jac}(A_P B)$. Por lo tanto $\frac{x}{1} \in A_P + \operatorname{Jac}(A_P B)$. Como $P \in \operatorname{Spec}(A)$ es arbitrario tenemos que $\frac{x}{1} \in \bigcap (A_P + \operatorname{Jac}(A_P B))$. Por Lema 1.5 tenemos $x \in \underset{B}{+}A = A$.

Definición 2.6. Sea A un dominio entero y K su campo de fracciones. Sea I un A-submódulo de K. Entonces I se llama un ideal f fraccionario de A, si existe $d \in A$, tal que

$dI \subset A$.

El ideal fraccionario I de A se llama invertible, si existe un ideal fraccionario J de A, tal que $IJ = A$.

Denotaremos por $Inv(A)$ el grupo de los ideales fraccionarios - invertibles de A.

Definición 2.7. Sean A, K como en 2.6. Un ideal I de A se llama principal fraccionario, si $I = Ad$, para algún $d \in K - \{0\}$.

Notas:

i) Todo ideal I de A es un ideal fraccionario, ya que $1.I = I \subset A$.

ii) Todo ideal principal fraccionario I de A es invertible, ya que si $I = Ad$, $d \in K - \{0\}$, entonces $J = Ad^{-1}$, es tal que $IJ = A$.

iii) Tenemos que $Pic(A)$ denota el grupo de Picard de A, esto es, el grupo de módulos proyectivos de rango uno, bajo $\otimes_A$.

Sin embargo, se tiene que para dominios enteros y anillos noetherianos $Pic(A)$ es isomorfo a $\frac{Inv(A)}{Prin(A)}$, donde $Prin(A)$ denota el subgrupo de $Inv(A)$, consistiendo de los ideales principales fraccionarios; ver [11, Pag. 251].

$dI \subset A$.

El ideal fraccionario I de A se llama invertible, si existe un ideal fraccionario J de A, tal que $IJ = A$.

Denotaremos por $Inv(A)$ el grupo de los ideales fraccionarios - invertibles de A.

Definición 2.7. Sean A, K como en 2.6. Un ideal I de A se llama principal fraccionario, si $I = Ad$, para algún $d \in K - \{0\}$.

Notas:

i) Todo ideal I de A es un ideal fraccionario, ya que $1.I = I \subset A$.

ii) Todo ideal principal fraccionario I de A es invertible, ya que si $I = Ad$, $d \in K - \{0\}$, entonces $J = Ad^{-1}$, es tal que $IJ = A$.

iii) Tenemos que $Pic(A)$ denota el grupo de Picard de A, esto es, el grupo de módulos proyectivos de rango uno, bajo $\otimes_A$.

Sin embargo, se tiene que para dominios enteros y anillos noetherianos $Pic(A)$ es isomorfo a $\frac{Inv(A)}{Prin(A)}$, donde $Prin(A)$ denota el subgrupo de $Inv(A)$, consistiendo de los ideales principales fraccionarios; ver [11, Pag. 251].

Lema 2.8. Sea A un dominio entero y K su cuerpo de fraccio nes. Si A es quasi-local, es decir A posee exactamente un ideal maximal, entonces, todo ideal fraccionario invertible I de A es principal.

DEMOSTRACION. Sea I invertible. Entonces existe un ideal fraccionario J de A, tal que, $IJ = A$. Sea M el único ideal maximal de A.

$$IJ = A \Longrightarrow \text{Existe } a \in I,\ b \in J, \text{ tal que } ab \notin M.$$

Sea $u \in A - M$. Consideremos $v = ub \in J$. Ahora bien $b \in J$, $u \in A \Longrightarrow ubI \subseteq A$, es decir $vI \subseteq A$.

Afirmación: $vI = A$, es decir $I = \frac{1}{v} A$. Al contrario:

$vI \neq A$ y vI ideal de $A \Longrightarrow vI \subseteq M \Longrightarrow uba \in M \Longrightarrow ab \in M$ ó $u \in M$,

ya que M es primo. Contradicción. Luego $I = \frac{1}{v} A$.

TEOREMA 2.9. Sea A un dominio entero y $A[x]$ su anillo de polinomios. Sea

Φ : (ideales invertibles de A) $\longrightarrow$ (ideales invertibles de $A[x]$), dada por $\phi(I) = IA[x]$; polinomios de $A[x]$ con coeficientes en I.

Si ϕ es un isomorfismo, entonces A es seminormal en K, su campo de fracciones.

DEMOSTRACION. Supongamos que A no es seminormal en K. Sea $\alpha \in K - A$, tal que $\alpha^2, \alpha^3 \in A$. Sean $I' = (\alpha^2, 1 + \alpha x)$, $J' = (\alpha^2, 1-\alpha x)$ ideales fraccionarios de $A[x]$.

$I'J' = (\alpha^4, \alpha^2 + \alpha^3 x, \alpha^2 - \alpha^3 x, 1 - \alpha^2 x^2) \subseteq A[x]$. Ahora bien; $x^4 \alpha^4 + (1 + \alpha^2 x^2)(1 - \alpha^2 x^2) = 1$ y $\alpha^4, (1 - \alpha^2 x^2) \in I'J' \Longrightarrow 1 \in I'J' \Longrightarrow I'J' = A[x] \Longrightarrow I'$ es invertible, con $J' = (I')^{-1}$.

Afirmamos que I' no es un ideal extendido, es decir, no existe un ideal fraccionario I_o de A, tal que $I' = I_o A[x]$. Supongamos lo contrario. Como $A = \bigcap A_M$, M ideal maximal de A, ver [13, Pag. 8, Lema 2], entonces $\alpha \notin A \Longrightarrow \alpha \notin A_M$, para algún ideal maximal M de A; Por lo tanto podemos asumir que A es quasi-local.

Ahora bien, puesto que $A[x] \simeq A[-x]$ y $I' = (\alpha^2, 1 + \alpha x) \longrightarrow J' = (\alpha^2, 1 - \alpha x)$ se tiene que $J' = J_o A[x]$, J_o ideal fraccionario de A. Ahora bien $1 \in I_o$, $1 \in J_o \Longrightarrow I_o J_o = A \Longrightarrow I_o$ es invertible, luego por

Lema 2.8 I_o es principal, así $I' = I_o A[x]$ es principal - fraccionario de $A[x]$.

Sea $I' = (f(x))$, $f(x) \varepsilon I'$.

$\alpha^2 \varepsilon I' \Longrightarrow \alpha^2 \varepsilon K \Longrightarrow \alpha^2$ es una unidad $\Longrightarrow I' K[x] = K[x] \Longrightarrow f(x)$ es una unidad, por lo tanto $f(x) \varepsilon K$, es decir $f(x)$ es una constante.

Tenemos pues;

$f - f \ \alpha x = f(1 - \alpha x) \varepsilon I' J' = A[x] \Longrightarrow f(1 - \alpha x) \varepsilon A[x]$ y como $\alpha \notin A$, se debe tener que $f \varepsilon A$, así

$I' = (f) \quad A[x] \Longrightarrow 1 + \alpha x \quad A[x] \Longrightarrow \alpha \varepsilon A$. Contradicción, por lo tanto I' no es un ideal extendido, así ϕ no es sobre.

Lema 2.10. Sea A un dominio entero. Sea ϕ como en el Teorema 2.9. Entonces; $\phi(I) = I A[x]$ es principal $\Longleftrightarrow$ I es principal.

DEMOSTRACION. $\Longrightarrow$) Sea $I A[x] = f(x) A[x]$,

$f(x) = a_o + a_1 x + \ldots , + a_n x^n$, $a_i \varepsilon I$. Afirmamos que

$I = a_o A$.

$a \varepsilon I \Longrightarrow a \varepsilon I A[x] = f(x) A[x] \Longrightarrow a = f(x) g(x)$; $g(x) \varepsilon A[x]$

$\Longrightarrow a = a_o b_o + \ldots , + a_n b_m x^{m+n} \Longrightarrow a = a_o b_o \Longrightarrow a \varepsilon a_o A \Longrightarrow I \subseteq a_o A$.

Trivialmente se tiene que $a_o A \subseteq I$. Así $I = a_o A$, luego I - es principal.

$\Leftarrow$) I principal $\Longrightarrow I = bA$, $b \in I \Longrightarrow \phi(I) = bA\, A[x] = bA[x]$.

$\Longrightarrow$ $I\,A[x] = bA[x]$, es decir $IA[x]$ es principal.

TEOREMA 2.11. Sea A un dominio entero. Si A es seminormal, entonces la aplicación $\phi : \mathrm{Pic}(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A[x])$ es un isomorfirmo.

DEMOSTRACION. De hecho ϕ es 1-1. Esto se sigue del Lema 2.10

y de que $\psi : \mathrm{Inv}(A) \longrightarrow \mathrm{Inv}(A[x]) \longrightarrow \dfrac{\mathrm{Inv}(A[x])}{\mathrm{Prin}(A[x])} = \mathrm{Pic}(A[x])$, es tal que

$\mathrm{Ker}\ \psi = \mathrm{Prin}(A)$.

Afirmación: Todo ideal invertible I de $A[x]$ es extendido, es decir ϕ es sobre.

Por [16, Teorema 1], podemos asumir que $I \cap A = I_o \neq (0)$, es decir I_o contiene elementos regulares de A. Por [15, Proposición 3.1], $I = \bigcap$ (ideales principales fraccionarios), por - [14, Lema 2];

$I_o = \bigcap \{ r\, C_A(g)^{-1} : I \subseteq \frac{r}{g} A[x],\ r \in A,\ g(x)$ elemento regular de $A[x] \}$; $C_A(g(x))$ = ideal de A generado por los coeficientes de $g(x)$.

Supongamos que $I \subseteq_g^r A[x]$. Sea $P \in \mathrm{Spec}(A)$ y sea A' el anillo obtenido de $\bar{A}$ por "glueing" sobre P. Por [12, Satz 2.2]; $IA'[x] \simeq J \otimes_{A'} A'[x]$, para algún A'-módulo J de rango uno. Como K es campo de fracciones de A', por [6, <u>Corolario</u> - 2, Pag. 120], J puede ser considerado como un ideal de A', es decir $J \subseteq A'$; por lo tanto

$IA'[x] \simeq J \otimes_{A'} A'[x] \simeq J A'[x]$; ver [4, Ejercicio 6, Pag. 36].

Por [6, Proposición 9, Pag. 116], tenemos que:

$IA'[x] = \alpha\, JA'[x]$ . . . (i)

para algún $\alpha \in K(x)$, $K(x)$ = campo de fracciones de $A[x]$.

Ahora bien I_o contiene elementos regulares de A.

$a \neq 0$ regular en $A \Longrightarrow a$ es una unidad en $K \Longrightarrow IK[x] = K[x]$ y usando (i) obtenemos que $IK[x] = \alpha\, JK[x] = K[x]$, así α es una unidad en $K[x]$, luego $\alpha \in K$.

Para todo ideal I de $A[x]$, se tiene que $C_A(IA[x]) = I$, luego

$\alpha J = C_{A'}(\alpha JA'[x]) = C_{A'}(IA'[x]) = C_{A'}(I')$ . . . (ii)

Usando (i) y (ii) obtenemos

$IA'[x] = \alpha JA'[x] = C_{A'}(I)\ A'[x] = C_{A'}(I)$ . . . (iii)

$A \subset A' \Longrightarrow I \subseteq \frac{r}{g} A'[x]$, además

$C_{A'}(g)\ C_{A'}(I) = C_{A'}(g)\ C_{A'}(IA'[x]) \subseteq C_{A'}(gIA'[x]) \subseteq C_{A'}(rA'[x]) = rA'$.

De aqui $C_{A'}(g)\ C_{A'}(I) \subseteq rA'$, $\forall A'$ obtenido de A por "glueing" sobre P.

Luego $C_{A'}(g) C_{A'}(I) \subseteq \bigcap rA' = r(\bigcap A') = rA$, usando Teorema 2.5, ya que A es seminormal. Luego $C_A(g)\ C_A(I) \subseteq rA$. De aquí

$C_A(I) \subseteq r\ C_A(g)^{-1}A = rC_A(g)^{-1} \subseteq I_o$.

sea $f(x) \in I \Longrightarrow$ Coeficiente de $f(x) \in I_o \Longrightarrow f(x) \in I_oA[x] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow I \subseteq I_o\ A[x]$.

También $I \cap A = I_o \Rightarrow I_o \subset I \Rightarrow I_oA[x] \subseteq I$. Luego

$I = I_oA[x]$, por lo tanto ϕ es sobre, así

$\phi : \mathrm{Pic}(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A[x])$ es un isomorfismo.

2.3. ANILLOS GRADUADOS SEMINORMALES.

Definición 2.12. Un anillo graduado, es un anillo R, junto - con una familia $(R_n)_{n\geq 0}$, de sub grupos del grupo aditivo R, -

tales que $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ y $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$, para todo $n, m \geq 0$.

Del hecho de que $R_o R_o \subseteq R_o$ se deduce que R_o es un subanillo de R.

Ejemplos de Anillos Graduados.

i) $R[x] = R \oplus Rx \oplus R x^2 \oplus \ldots$.

ii) $R[x,y] = R \oplus (Rx + Ry) \oplus (Rx^2 + Rxy + Ry^2) \oplus \ldots$.

iii) En general $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un anillo graduado.

Observaciones:

i) Los sub grupos $(R_n)_{n \geq 0}$, son llamados los componentes homogéneos de R de grado n, y los elementos de R_n son llamados los elementos homogéneos de R de grado n.

ii) Obviamente cada elemento $r \in R$, puede ser escrito de forma única como una suma $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$, donde cada r_n es homogénea de grado n, y todas, excepto un número finito de las r_n son cero. Cada r_n se llama la n-ésima componente homogénea de r.

En [19], Traverso define a un anillo R; seminormal, si -

$R = \{x \in \bar{R} : \frac{x}{1} \in R_P + J(\bar{R}_P)$, para todo $P \in \mathrm{Spec}(R)\}$,

donde $\bar{R}$ es la clausura entera de R y $J(\bar{R}_P)$ es el radical de Jacobson de $\bar{R}_P$.

De aquí tenemos lo siguiente:

<u>Lema 2.13.</u> Sea R un anillo con clausura entera $\bar{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) R es seminormal.

ii) Si $x \in \bar{R}$ y $x^2, x^3 \in R$, entonces $x \in R$.

<u>Prueba</u>. R seminormal $\Longrightarrow R = {}^{+}_{R}R \Longrightarrow R$ es seminormal en $\bar{R} \Longrightarrow x \in \bar{R}$ y $x^2, x^3 \in R$, entonces $x \in R$. Ver <u>Lema 1.5</u> y <u>Teorema 1.11</u>.

Sea $R = R_o \oplus R_1 \oplus \ldots$. Un dominio entero graduado y sea S el conjunto multiplicativamente cerrado de R, de los elementos homogéneos no cero de R; entonces $S^{-1}R = \bigoplus_{n \in Z} (S^{-1}R)_n$, es un dominio entero graduado con;

$(S^{-1}R)_n = \{ \frac{a}{b} : b \neq 0$, a homogéneo con $\mathrm{grad}(a) - \mathrm{grad}(b) = n\}$, ver [6, Proposición 21, Pag. 72].

$R = \{x \in \bar{R} : \frac{x}{1} \in R_P + J(\bar{R}_P),$ para todo $P \in \mathrm{Spec}(R)\}$,

donde $\bar{R}$ es la clausura entera de R y $J(\bar{R}_P)$ es el radical de Jacobson de $\bar{R}_P$.

De aquí tenemos lo siguiente:

Lema 2.13. Sea R un anillo con clausura entera $\bar{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) R es seminormal.

ii) Si $x \in \bar{R}$ y $x^2, x^3 \in R$, entonces $x \in R$.

Prueba. R seminormal $\Longrightarrow R = {}^{+}_{R}R \Longrightarrow R$ es seminormal en $\bar{R} \Longrightarrow x \in \bar{R}$ y $x^2, x^3 \in R$, entonces $x \in R$. Ver Lema 1.5 y Teorema 1.11.

Sea $R = R_o \oplus R_1 \oplus \ldots$. Un dominio entero graduado y sea S el conjunto multiplicativamente cerrado de R, de los elementos homogéneos no cero de R; entonces $S^{-1}R = \bigoplus_{n \in Z} (S^{-1}R)_n$, es un dominio entero graduado con;

$(S^{-1}R)_n = \{\frac{a}{b} : b \neq 0,\ a$ homogéneo con $\mathrm{grad}(a) - \mathrm{grad}(b) = n\}$, ver [6, Proposición 21, Pag. 72].

También la clausura entera $\bar{R}$ de R es un subanillo graduado $\bar{R} = \bar{R}_o \oplus \bar{R}_1 \oplus \ldots$, de $S^{-1}R$, donde $\bar{R}_i$ es la clausura entera de R_i, $\forall i$, ver [6, Pag. 322, Proposición 21].

Lema 2.14. Sea $R = R_o \oplus R_1 \oplus \ldots$, un dominio entero - graduado. Si R es seminormal, entonces R_o es seminormal.

DEMOSTRACION. Sea $r_o \in \bar{R}_o$, con $r_o^2, r_o^3 \in R_o$.

$r_o^2, r_o^3 \in R_o \Longrightarrow r_o^2, r_o^3 \in R$, con $r_o \in \bar{R}$. Como R es seminormal, por Lema 2.13 se tiene que $r_o \in R$, de aquí $\text{grado}(r_o) = 0$. Luego $r_o \in R_o$.

Lo recíproco del Lema 2.14 no se sigue. Considerese $R=K[x^2,x^3]$, K cuerpo.

Se tiene que $R = K \oplus K[x^2] \oplus K[x^3] \oplus \ldots$, con $\text{grado}(x) = 1$ y $R_o = K$ seminormal. Sin embargo R no es seminormal.

TEOREMA 2.15. Sea $R = R_o \oplus R_1 \oplus \ldots$, un dominio entero graduado, con clausura entera $\bar{R} = \bar{R}_o \oplus \bar{R}_1 \oplus \ldots$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) R es seminormal.

(2) **Para cada elemento homogéneo** $x \in \bar{R}$, **si** $x^2, x^3 \in R$, **entonces** $x \in R$.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. (1) $\Longrightarrow$ (2) se sigue inmediatamente de <u>Lema 2.13</u>.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Asumamos que R no es seminormal, entonces existe un $r \in \bar{R} - R$, con $r^2, r^3 \in R$; tal que:

i) Si $z \in \bar{R}$, con $z^2, z^3 \in R$ y z tiene menos componentes homogéneos diferentes de cero que r, entonces $z \in R$.

ii) Si $z \in \bar{R} - R$, con $z^2, z^3 \in R$ y z tiene igual número de componentes homogéneos que r, entonces la longitud de la parte inicial de las componentes homogéneas diferentes de cero de z, las cuales están en R, es menor o igual que la longitud de la parte inicial de las componentes homogéneas diferentes de cero, de r, las cuales están en R.

Sea $r = r_{m_1} + r_{m_2} + \ldots + r_{m_k} + \ldots + r_{m_n}$, con $r_{m_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $r_{m_1} + r_{m_2} + \ldots + r_{m_{j-1}} \in R$ y $r_{m_j} \notin R$, es decir la longitud de la parte inicial de r es $j-1$. Se tiene que $j \geq 1$ ya que de hecho $r_{m_1} \in R$.

Ahora bien;

(2) **Para cada elemento homogéneo** $x \in \bar{R}$, **si** $x^2, x^3 \in R$, **entonces** $x \in R$.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. (1) ⟹ (2) se sigue inmediatamente de <u>Lema 2.13.</u>

(2) ⟹ (1) Asumamos que R no es seminormal, entonces existe un $r \in \bar{R} - R$, con $r^2, r^3 \in R$; tal que:

i) Si $z \in \bar{R}$, con $z^2, z^3 \in R$ y z tiene menos componentes homogéneos diferentes de cero que r, entonces $z \in R$.

ii) Si $z \in \bar{R} - R$, con $z^2, z^3 \in R$ y z tiene igual número de componentes homogéneos que r, entonces la longitud de la parte inicial de las componentes homogéneas diferentes de cero de z, las cuales están en R, es menor o igual que la longitud de la parte inicial de las componentes homogéneas diferentes de cero, de r, las cuales están en R.

Sea $r = r_{m_1} + r_{m_2} + \ldots + r_{m_k} + \ldots + r_{m_n}$, con $r_{m_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $r_{m_1} + r_{m_2} + \ldots + r_{m_{j-1}} \in R$ y $r_{m_j} \notin R$, es decir la longitud de la parte inicial de r es $j-1$. Se tiene que $j \geq 1$ ya que de hecho $r_{m_1} \in R$.

Ahora bien;

$$r^2 = r_{m_1}^2 + \ldots + 2\, r_{m_1} r_{m_j} + \ldots + r_{m_n}^2 \in R \ldots , \qquad (*)$$

$$r^3 = r_{m_1}^3 + \ldots + 3\, r_{m_1}^2 r_{m_j} + \ldots + r_{m_n}^3 \in R \ldots , \qquad (**).$$

Entonces

$r^2 \in R \Longrightarrow$ la $(m_1 + m_j)$-ésima componente de r^2, está en R, es decir $2\, r_{m_1} r_{m_j} \in R$.

$r^3 \in R \Longrightarrow$ la $(2m_1 + m_j)$-ésima componente de r^3, está en R, es decir $3\, r_{m_1}^2 r_{m_j} \in R$.

Multiplicando r, por $2\, r_{m_1}$, obtenemos:

$$z = 2\, r_{m_1} . r = 2\, r_{m_1}^2 + 2 r_{m_1} r_{m_2} + \ldots + 2\, r_{m_1} r_j + \ldots + 2\, r_{m_1} r_{m_n} .$$

De aquí la longitud de la parte inicial de $z = 2\, r_{m_1} r$ que está en R es $\geq j$.

Puesto que $z^2, z^3 \in R$ y z tiene igual número de componentes homogéneos que r, entonces por ii) $z \notin R$ implica que la longitud de la parte inicial de z que está en R es $\leq j$; lo cual es una contradicción. Luego $z = 2\, r_{m_1} r \in R$.

De manera similar multiplicando r por $3\, r_{m_1}^2$, obtenemos que $3\, r\, r_{m_1}^2 \varepsilon R$.

Sea ahora $x = r - r_{m_1}$. $x \notin R$ ya que $r \notin R$; pero

$x^2 = r^2 - 2\, r\, r_{m_1} + r_{m_1}^2 \varepsilon R$ y

$x^3 = r^3 - 3\, r^2\, r_{m_1} + 3\, r\, r_{m_1}^2 - r_{m_1}^3 \varepsilon R.$

Ahora bien $x \varepsilon \bar{R}$, ya que $r \varepsilon \bar{R}$ y $r_{m_1} \varepsilon R \subset \bar{R}$, además $x^2, x^3 \varepsilon R$ y $x = r - r_{m_1}$, tiene menos componentes homogéneos diferentes de cero que r, entonces por condición i) se debe tener que $x \varepsilon R$. Contradicción. Luego R debe ser seminormal.

<u>TEOREMA 2.16</u>. Sea $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \ldots$, un dominio entero graduado. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es seminormal.

(2) R_0 es seminormal y $\phi : \mathrm{Pic}(R_0) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R)$ es un isomorfismo.

<u>*DEMOSTRACION*</u>. (1) $\Longrightarrow$ (2) Por <u>Lema 2.14</u> R_0 es seminormal.

La segunda parte se sigue del Teorema 2.11 y de un resultado debido a Weibel; para una prueba ver [2, Lema 5.7] ó [1, Proposición 6.1].

(2) ==> (1) Por Teorema 2.15 necesitamos probar solamente que para cada elemento homogéneo $r \in \bar{R}$, si $r^2, r^3 \in R$, entonces $r \in R$.

Si $\mathrm{grad}(r) = 0$, entonces r está en el cuerpo cociente de R_o y por ser R_o seminormal se tiene que $r \in R_o$. De aquí $r \in R$.

Por lo tanto podemos asumir que $\mathrm{grad}(r) > 0$. Si $r \notin R$, procediendo de manera similar que en la prueba del Teorema 2.9, obtenemos que existe un ideal fraccionario invertible de R que no es isomórfico a un ideal invertible extendido de R_o, es decir ϕ no es sobre. Con lo que el teorema queda demostrado.

BIBLIOGRAFIA

[1] D.F., Anderson. Graded Krull domains, comm - Algebra 7(1979)79-106.

[2] D.F., Anderson. Proyective modules over subrings of K[x,y] generated by monomials, Pacific J. Math. 79(1978)5-17.

[3] D.F., Anderson. Seminormal Graded Ring, J. Pure Appl. Algebra 21(1981)1-7.

[4] M.F., Atiyah and I., Macdonald. "Introduction to Conmutative - Algebra", Addison - Wesley, - Reading, Mass., 1969.

[5] H., Bass. Algebraic K-Theory (Benjamin, New York, 1968).

[6] N., Bourbaki Conmutative Algebra (Addison, Wesley, Reading, MA, 1972).

[7] J.W., Brewer and D., Costa. Seminormality and proyective modules over polynomial rings, J. Algebra 58(1979)208-216.

BIBLIOGRAFIA

[1] D.F., Anderson. Graded Krull domains, comm - Algebra 7(1979)79-106.

[2] D.F., Anderson. Proyective modules over subrings of K[x,y] generated by monomials, Pacific J. Math. 79(1978)5-17.

[3] D.F., Anderson. Seminormal Graded Ring, J. Pure Appl. Algebra 21(1981)1-7.

[4] M.F., Atiyah and I., Macdonald. "Introduction to Conmutative - Algebra", Addison - Wesley, - Reading, Mass., 1969.

[5] H., Bass. Algebraic K-Theory (Benjamin, New York, 1968).

[6] N., Bourbaki Conmutative Algebra (Addison, Wesley, Reading, MA, 1972).

[7] J.W., Brewer and D., Costa. Seminormality and proyective modules over polynomial rings, J. Algebra 58(1979)208-216.

[8] J.W., Brewer, D., Costa and K., Mc Crimmon. Seminormality and root closure in polynomials ring and - Algegraic Curves, J. Algebra 58(1979) 217-266.

[9] J.W., Brewer and WARREN D., Nichols. Seminormality in Power Series Rings.

[10] E., Davis. On the Geometric interpretation of seminormality, Proc. Amer. Math. Soc. 68(1978) 1-5.

[11] R., Gilmer and R., Heitmann. On Pic(R[x]) for R seminormal, J. Pure Appl. Algebra - 16(1980) 251-257.

[12] F., Ischebeck. Zwei Bemerkungen über seminormale Rings, Math Z. 152(1977) 101-106.

[13] H., Matsumura. "Commutative Algebra" Benjamin, New York, 1970

[14] J., Querre. Sur le groupe des classes de diviseurs, C.R. Acad. Sci. - París, 284(1977) 397-399.

[15] D.E, Rush. The G-funtion of MacRae - Canad. J. Math 26(1974)854-865.

[16] D.E., Rush. Pic(R) and the R-flatness of $\frac{R[x]}{I}$, J. Pure Appl. Algebra 14(1979)307-310.

[17] D.E., Rush. Seminormality, J. Algebra 67 (1980)377-384.

[18] R.G., Swan. On seminormality, J. Algebra 67(1980)210-229.

[19] C., Traverso. Seminormality and Picard - group, Annali della Scuola - Norm. Sup. Pisa 24(1970) 585-595.