NOTAS DE MATEMATICA

Nº 35

ESPECTRO E HIPERBOLICIDAD NO LINEALES

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1979

INTRODUCCION

En estas notas consideramos un espacio de Banach real E y el espacio de aplicaciones lipschitz, $Lip(E)$, de E en si mismo. Enseguida introducimos una noción de espectro $\sigma(f)$ para elementos f de $Lip(E)$, la cual mejora la dada en |7| y generaliza el caso lineal . El resultado más interesante en esta dirección es el teorema 3.10 en el cual se calcula $\sigma(f)$ si f es de clase C^1 y E es de dimensión finita. Nuestra exposición prosigue introduciendo una noción de hiperbolicidad (h_o) para elementos f de $Lip(E)$ y probamos que esta definición coincide con la definición ordinaria de hiperbolicidad de operadores lineales. El resultado más importante es el teorema 5.14 el cual liga los conceptos y de hiperbolicidad (h_o) la manera siguiente: "Si f es hiperbólica (h_o) de clase C^1 entonces $\sigma(f) \cap S^1 = \phi$".

Estas notas contienen resultados que obtuve durante mi año sabático y tienden a cubrir el plan de trabajo que introduje ante la Universidad el 22-02-78.

Deseo agradecer a la Señorita RAMIREZ ELIDE el esmero puesto en el tipeado de este trabajo y a la Comisión de Publicaciones por la reproducción del mismo.

C O N T E N I D O

ESPECTRO E HIPERBOLICIDAD NO LINEALES

§1) ESPACIOS DE FUNCIONES LIPSCHITZIANAS.

1.1. Sean X,Y espacios métricos y denotemos por d la métrica de ambos espacios. Una aplicación $f:X \to Y$ se dice lipschitz si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$d(f(x), f(x')) \leq Md(x,x') \qquad x,x' \in X \qquad (1)$$

La constante M es llamada una constante de lipschitz de f y aplicando el axioma del supremo (números reales) se deduce enseguida la existencia de una constante de lipschitz minimal para f, la cual será denotada $\text{lip}(f)$. El conjunto de aplicaciones lipschitz de X en Y será denotado $\text{Lip}(X,Y)$. Sea Z es otro espacio métrico y sean $f \in \text{Lip}(X,Y)$, $g \in \text{Lip}(Y,Z)$, entonces $g \circ f \in \text{Lip}(X,Z)$ y $\text{lip}(g \circ f) \leq$ $\leq \text{lip}(g) . \text{lip}(f)$.

También pondremos $\text{Lip}(X) = \text{Lip}(X,X)$ y recordamos que un elemento $f \in \text{Lip}(X)$ es una contracción si $\text{lip}(f)<1$. El resultado más conocido en esta dirección es el Teorema del punto fijo de Banach el cual enunciamos a continuación.

1.2. PROPOSICION. Sea X un espacio métrico completo no vacío y sea $f \varepsilon \mathrm{Lip}(X)$ una contracción entonces f posee un punto fijo único. (Es decir, existe un único elemento $x_o \varepsilon X$ tal que $f(x_o) = x_o$).

DEMOSTRACION. Ver [3] .

1.3. DEFINICIONES Y NOTACIONES. Diremos que un elemento $f \varepsilon \mathrm{Lip}(X)$ es una unidad si f es biyectiva y $f^{-1} \varepsilon \mathrm{Lip}(X)$. El conjunto de unidades de $\mathrm{Lip}(X)$ será denotado por $U(X)$. Un elemento $f \varepsilon U(X)$ será llamado dilatación si f^{-1} es una contracción:
De la proposición 1.1 se sigue toda dilatación en un espacio métrico completo posee un único punto fijo. Finalmente sea $U \subseteq X$ un abierto no vacío; diremos que un elemento $f \varepsilon \mathrm{Lip}(U,X)$ es regular si las tres condiciones siguientes son satisfechas:

1.3.a) $f(U)$ es un abierto de X

1.3.b) La restricción de f, $f_U\colon U \to f(U)$ es biyectiva.

1.3.c) f_U^{-1} es lipschitz

Nótese que la condición 1.3.c) es equivalente a

1.3.c)' Existe $m > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq m d(x,y)$ $x,y \varepsilon U$.

El conjunto de elementos regulares de $\mathrm{Lip}(U,X)$ será denotado $R(U,X)$. Claramente $U(X) \subseteq R(X,X)$.

§2) APLICACIONES LIPSCHITZ REGULARES.

En esta sección E denotará un espacio de Banach real, cuya norma será denotada por $\| \; \|$, y $U \subseteq E$ denotará un abierto no vacío. En $Lip(U,E)$ consideraremos la estructura usual de espacio vectorial real.

2.1. PROPOSICION. Sea F un espacio normado y sea $f \in Lip(U,F)$. Si f es diferenciable en $x_o \in U$ entonces $\| f'(x_o) \| \leq lip(f)$ ($f'(x_o)$ = derivada de Frechet de f en x_o). Si U es convexo y f es diferenciable en U entonces $lip(f) = \sup\{\|f'(x)\| : x \in U\}$.

DEMOSTRACION. Ejercicio.

2.2. PROPOSICION. (a) La aplicación $Lip(U,E) \to R$, $f \to lip(f)$ define una seminorma en $Lip(U,E)$.

b) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $Lip(U,E)$ en la seminorma $f \to lip(f)$ y si existe $x_o \in U$ tal que $\{f_n(x_o)\}$ es convergente en E, entonces existe $f \in Lip(U,E)$ tal que $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$ ($x \in U$) y $lip(f_n - f) \to 0$ ($n \to \infty$).

DEMOSTRACION. Ejercicio.

De ahora en adelante la topología considerada en $Lip(U,E)$ será la inducida por la seminorma $f \to lip(f)$.

2.3. PROPOSICION. Sean $f \in U(E)$ y $\phi \in Lip(E)$ tales que $lip(f^{-1})\ lip(\phi) < 1$ entonces $f+\phi \in U(E)$ y

$$lip((f+\phi)^{-1}).\ [1 - lip(f^{-1})\ lip(\phi)] \leq lip(f^{-1})$$

(En particular $U(E)$ es un abierto de $Lip(E)$).

DEMOSTRACION. Comenzaremos probando que para cada $y \in E$ existe un único $x \in E$ tal que

$$f(x) + \phi(x) = y \qquad (1)$$

Ahora la ecuación (1) es equivalente a

$$f^{-1}(y-\phi(x)) = x \qquad (2)$$

Para cada $y \in E$ definamos $K_y: E \to E$ mediante $K_y(x) = f^{-1}(y-\phi(x)$. Es fácil verificar que K_y es una contracción de E y por la proposición 1.1 existe un único x tal que $K_y(x) = x$. Hemos probado asi que $f+\phi$ es biyectiva y que su inversa es la aplicación $T: E \to E$ definida por $T(y)$ = único punto fijo de K_y. Ya que

$$f^{-1}(y-\phi(T(y))) = T(y) \qquad \text{entonces}$$

$$\| T(y) - T(y') \| \leq lip(f^{-1}) \| y-y' + \phi(T(y')) - \phi(T(y)) \| \leq$$

$$\leq lip(f^{-1}) \left[\| y-y' \| + lip(\phi) \| T(y) - T(y') \| \right]$$

Es decir

$$\left[1 - lip(f^{-1})\ lip(\phi)\right] \| Ty-Ty' \| \leq lip(f^{-1})\ \| y-y' \|$$

lo cual termina la demostración.

2.4. OBSERVACION. Diremos que un elemento $f \in U(E)$ es una isometría si $\mathrm{lip}(f) = \mathrm{lip}(f^{-1}) = 1$. Esto equivale a decir que $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ $x,y \in E$. Por la proposición 2.3 se sigue que si $f \in U(E)$ es una isometría y $\phi \in \mathrm{Lip}(E)$ es una contracción entonces $f+\phi \in U(E)$ y $\mathrm{lip}((f+\phi)^{-1}) \leq [1 - \mathrm{lip}(\phi)]^{-1}$. De manera análoga si $f \in U(E)$ es una isometría y $\phi \in \mathrm{Lip}(E)$ es una dilatación entonces $f+\phi \in U(E)$ y $\mathrm{lip}((f+\phi)^{-1}) \leq \mathrm{lip}(\phi^{-1})[1 - \mathrm{lip}(\phi^{-1})]^{-1}$. (En efecto $\mathrm{lip}(f o \phi^{-1}) \leq \mathrm{lip}(\phi^{-1}) < 1$ y por la proposición 2.3, (aplicada a f = identidad) obtenemos que $I + f o \phi^{-1} \in U(E)$ y $\mathrm{lip}((I + f o\phi^{-1})^{-1}) < [1- \mathrm{lip}(f\phi^{-1})]^{-1} \leq$ $\leq [1 - \mathrm{lip}(\phi^{-1})]^{-1}$, pero $f + \phi = (I + f o \phi^{-1}) o\, \phi$ y el resultado se sigue fácilmente porque $(f+\phi)^{-1} = \phi^{-1} o$ $(I + f o\phi^{-1})^{-1})$.

2.5. PROPOSICION. $R(U,E)$ es un abierto de $\mathrm{Lip}(U,E)$. Más precisamente, si $f \in R(U,E)$ y $\phi \in \mathrm{Lip}(U,E)$ verifican $\mathrm{lip}(f_U^{-1})\ \mathrm{lip}(\phi) < 1$ entonces $f+\phi \in R(U,E)$ y

$$\mathrm{lip}[(f+\phi)_U^{-1}]\ [1 - \mathrm{lip}(f_o^{-1})\ \mathrm{lip}(\phi)] \leq \mathrm{lip}(f_o^{-1}) \quad *$$

(f_U es como en 1.3.b).

DEMOSTRACION. Sea $f \in R(U,E)$ y pongamos $m = [\mathrm{lip}(f_U^{-1})]^{-1}$, entonces $\|f(x) - f(x')\| \geq m\|x-x'\|$ $x,x' \in U$.

Sea $\phi \in Lip(U,E)$ tal que $lip(\phi) < m$, entonces $f+\phi$ es inyectiva. (En efecto, si $f(x) + \phi(x) = f(x') + \phi(x')$ entonces $m\|x-x'\| \leq \|f(x)-f(x')\| = \|\phi(x)-\phi(x')\| \leq$ $\leq lip(\phi)\|x-x'\|$, de aquí $[m - lip(\phi)] \|x-x'\| \leq 0$ y en consencuencia $(x = x')$.

Sea $V = (f+\phi)(U)$ entonces $S = (f+\phi)_U : U \to V$ es una biyección y proceciendo como en la proposición 2.3 se muestra que S^{-1} es lipschitz y verifica la desigualdad (*). Resta mostrar que V es un abierto de E.

Sea $y_o \in V$ y sea $x_o \in U$ tal que $y_o = f(x_o) + \phi(x_o)$; ya que $f(U)$ es un abierto de E existe $\eta > 0$ tal que $B(f(x_o),\eta) \subseteq f(U)$ (si $\alpha \in R$ es positivo y $a \in E$ entonces $B(a,\alpha) = \{x \in E : \|x-a\| < \alpha\}$). Ya que U es abierto existe $\gamma > 0$, $\gamma \leq \eta\, lip(f_U^{-1})$, tal que $B(x_o,\gamma) \subseteq U$; pongamos $\varepsilon = r[m - lip(\phi)]$; probaremos que $B(y_o,\varepsilon) \subseteq V$.

Dados $x \in B(x_o,\gamma)$, $y \in B(y_o,\varepsilon)$ se tiene que

$$\|(y-\phi(x))-f(x_o)\| = \|(y-y_o) - (\phi(x) - \phi(x_o))\| <$$

$$< \varepsilon + r\, lip(\phi) = rm \leq \eta$$; en consecuencia $y-\phi(x) \in f(U)$ y por tanto la aplicación $T_y: B(x_o,\gamma) \to E$ dado por $T_y(x) = f_U^{-1}(y-\phi(x))$ está bien definida $(\forall\, y \in B(y_o,\varepsilon))$.

Por otra parte

$$\| T_y(x) - T_y(x') \| \leq \operatorname{lip}(f_U^{-1}) \operatorname{lip}(\phi) \| x-x' \| =$$

$$= \frac{1}{m} \operatorname{lip}(\phi) \| x-x' \| \qquad y$$

$$\| T_y(x_o) - x_o \| = \| f_U^{-1}(y-\phi(x_o)) - f_U^{-1}(f(x_o)) \| \leq$$

$$\leq \operatorname{lip}(f_u^{-1}) \| y-y_o \| < \frac{1}{m} \varepsilon = r \left[1 - \frac{1}{m} \operatorname{lip}(\phi)\right] .$$

Podemos aplicar ahora 10.1.2 de [3] (pag 271) para deducir la existencia de un (único) $x \in B(x_o,\gamma)$ tal que $T_y(x) = x$; es decir $f_U^{-1}(y-\phi(x)) = x$ ó sea $y - \phi(x) = f(x)$, lo cual termina la demostración.

Nuestro próximo objetivo es probar que si $f \in R(U,E)$ es de clase c^1 entonces f_U: $U \to f(U)$ es un difeomorfismo. Para ello necesitamos el siguiente lema previo.

2.6. LEMA. Sean E,F espacios de Banach, $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ abiertos no vacíos; ϕ: $U \to V$, Ψ: $V \to U$ aplicaciones verificando las siguientes condiciones:

1) $\phi \circ \Psi$= identidad de V

2) $\Psi \in \operatorname{Lip}(V,U)$

3) ϕ es de clase c^1

Entonces $\phi'(x)$ es sobreyectiva $(x \in \Psi(V))$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sean $Z_o \varepsilon V$ y $x_o = \Psi(Z_o)$, definamos $R: U \to F$ mediante $R(x) = \phi(x) - \phi'(x_o)(x-x_o)$, entonces R es de clase c^1, $R(x_o) = \phi(x_o) = \phi(x_o) = z_o$ y $R'(x_o) = 0$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}[\mathrm{lip}(\Psi)]^{-1}$. (Nótese que $\mathrm{lip}(\Psi) \neq 0$, porque si no Ψ sería constante). Y escojamos $\dot{r} > 0$ tal que $B(x_o,\gamma) \subseteq U$ y $\|R'(x)\| < \varepsilon$ $(x \varepsilon B(x_o,\gamma))$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq r[\mathrm{lip}(\Psi)]^{-1}$ y $B(Z_o,\delta) \subsetneq V$ entonces $\Psi(B(Z_o,\delta)) \subseteq B(x_o,\gamma)$ (porque $\|\Psi(Z)-x_o\| = $ $= \|\Psi(Z_o)\| < \mathrm{lip}(\Psi)\ \delta < \gamma$ si $Z \varepsilon B(Z_o,\delta))$. Probaremos que $\phi'(x_o)(E)$ contiene la bola $B(0, \frac{1}{2}\delta)$ lo cual, naturalmente, dará fin a la demostración.

Dado $y \varepsilon B(0, \frac{1}{2}\delta)$ definamos $T_y: B(Z_o,\delta) \to F$ mediante $T_y(Z) = y + R\Psi(Z)$, entonces $\|T_y(Z) - T_y(Z')\| \leq$ $\leq \varepsilon\ \mathrm{lip}(\Psi)\ \|Z-Z'\| = \frac{1}{2}\|Z-Z'\|$ y $\|T_y(Z_o) - Z_o\| =$ $= \|y + R\Psi(Z_o) - Z_o\| = \|y + R(x_o) - Z_o\| = \|y\| < \frac{1}{2}\delta$.

Entonces, de [3], 10.1.2 (pag 271) se sigue la existencia de un único elemento $Z \varepsilon B(0, \frac{1}{2}\delta)$ tal que $T_y(Z) = Z$; es decir $Z = y + R\Psi(Z)$. Pongamos $x = \Psi(Z)$, entonces $\phi(x) = Z$ y así $\phi(x) = y + R(x)$; luego $\phi'(x_o)(x-x_o) = \phi(x) - R(x) = y$ lo cual termina la demostración.

2.7. <u>COROLARIO</u>. Sea $f \in R(U,E)$ de clase c^1 entonces la restricción $f_U: U \to f(U)$ es un difeomorfismo y existe $m > 0$ tal que $\| f'(x)u \| \geq m \| u \|$ $x \in U$, $u \in E$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Si $m = [\text{lip}(f_o^{-1})]^{-1}$ sabemos que $\| f(x) - f(x') \| \geq m \| x-x' \|$, de aquí $\| f'(x)u \| \geq m \| u \|$ $x \in U$, $u \in E$. Basta mostrar que $f'(x)$ es sobreyectiva $\forall x \in U$; pero $f_U . f_U^{-1}$ = identidad de U y de la proposición 2.6 se sigue que $f'(x) = f_U'(x)$ es sobreyectiva para todo $x \in f_U^{-1}(f(U)) = U$ y termina la demostración.

2.8. <u>COROLARIO</u>. Si $f \in U(E)$ es de clase c^1 entonces f es un difeomorfismo.

<u>DEMOSTRACION</u>. Se sigue de 2.7 y el hecho que $U(E) \subsetneq R(E,E)$.

2.9. <u>NOTACIONES</u>. Pondremos $\tilde{R}(U,E) = \{f \in \text{lip}(E) : f|_U \in R(U,E)\}$ ya que la aplicación $\text{Lip}(E) \to \text{Lip}(U,E)$, $f \to f|_U$ es continua se tiene que $\tilde{R}(U,E)$ es un abierto de Lip(E). Además si V es un abierto de E conteniendo U entonces $\tilde{R}(V,E) \subsetneq \tilde{R}(U,V)$. Dado un subconjunto $A \subset E$ (A no vacío) definimos $\tilde{R}(A,E) = \cup \{\tilde{R}(V,E) : V \subset E$ es abierto conteniendo A$\}$; es decir, $f \in \tilde{R}(A,E)$ si y sólo si existe $V \subset E$ abierto conteniendo A tal que $f|_V$ es regular. (Nótese que la definición de $\tilde{R}(A,E)$ coincide con la de

$\tilde{R}(U,E)$ cuando A es abierto porque $\cup\{R(V,E): U \subset V \subset E,$ V abierto$\} = \tilde{R}(U,V))$. En particular $\tilde{R}(A,E)$ es un abierto de Lip(E).

§3) UNA NOCION DE ESPECTRO PARA FUNCIONES LIPSCHITZ.

En esta sección E denotará un espacio de Banach con norma $\| \ \|$ y la aplicación identidad de E será denotada por I. Además $\tilde{E}$ denotará el espacio complejificado de E. Recordamos que $\tilde{E}$ como espacio de Banach no es otra cosa que el espacio producto $E \times E$ provisto de la norma producto $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. La multiplicación compleja en $\tilde{E}$ viene dada por $(\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$ $(x,y \in E;\ \alpha, \beta \in R,\ i^2 = -1)$ *

3.1. $\tilde{E}$ con el producto definido por (*) es un espacio vectorial complejo; además si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $p \in \tilde{E}$ entonces $\|\lambda p\| \leq \sqrt{2}\ |\lambda|\ \|p\|$. (En efecto; si $\lambda = \alpha + i\beta$; $\alpha, \beta \in R$; entonces $\|\lambda p\| \leq (|\alpha| + |\beta|)\|p\|$, pero es claro que $(|\alpha|+|\beta|)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2) = 2\ |\lambda|^2)$.

Si E,F son espacios de Banach entonces $\widetilde{E \times F}$ es canónicamente $\mathbb{C}$-isomorfo a $\tilde{E} \times \tilde{F}$. (Ejercicios).

Sea $f: E \to F$ (E,F espacios de Banach) una aplicación entonces la complejificación de f es la aplicación $\tilde{f}: \tilde{E} \to \tilde{F}$ definida por $\tilde{f}(x,y) = (f(x), f(y))$. En el caso que f es una aplicación R-lineal se tiene que f es $\mathbb{C}$-lineal. También es fácil verificar que $f \in Lip(E,F)$ si y sólo si $\tilde{f} \in Lip(\tilde{E},\tilde{F})$ y en cada caso $lip(f) = lip(\tilde{f})$.

3.2. <u>DEFINICION</u>. Dada $f \in Lip(E)$ se define el <u>resolvente</u> de f como el subconjunto $\rho(f)$ de $\mathbb{C}$ dado por

$$\rho(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \tilde{f} - \lambda \tilde{I} \in R(\Delta(E), E)\}$$

donde $\tilde{I}$ = identidad de $\tilde{E}$ = complejificada de I, y $\Delta(E) = \{(x,y) \in E : x = y\}$. <u>El espectro de f</u> se define como el complemento de $\rho(f)$ en $\mathbb{C}$; es decir, $\sigma(f) = \mathbb{C} - \rho(f)$.

<u>El resolvente real</u> de f es el conjunto $\rho(f,R) = \{\lambda \in \rho(f): : \lambda \in R\}$ y el <u>espectro real</u> de f se define como $\sigma(f,R) = \{\lambda \in \sigma(f): \lambda \in R\}$. Es evidente que estas nociones de espectro y resolvente coinciden con las usuales en el caso que f es lineal.

3.3. <u>PROPOSICION</u>. Sea $f \in Lip(E)$ entonces $\lambda \in \rho(f,R)$ si y sólo si $f - \lambda I \in U(E)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Ya que $\lambda \in R$ se tiene $\tilde{f} - \lambda\tilde{I} = \widetilde{f - \lambda I}$, en consecuencia podemos suponer $\lambda = 0$. Debemos probar entonces que $f \in U(E)$ si y sólo si $\tilde{f} \in \tilde{R}(\Delta(E),\tilde{E})$. Ahora, es evidente que si $f \in U(E)$ entonces $\tilde{f} \in U(\tilde{E})$ y por tanto $\tilde{f} \in \tilde{R}(\Delta(E),\tilde{E})$. Recíprocamente, ya que $\tilde{f} \in \tilde{R}(\Delta(E),\tilde{E})$ entonces $\tilde{f}(\Delta(E))$ es un abierto de $\Delta(E)$,

o sea que $f(E)$ es un abierto de E. Por otra parte existe un abierto $V \subsetneq E$ conteniendo $\Delta(E)$ y una constante $m > 0$ tal que $\| f(x,y) - f(u,v) \| \geq m \| (x,y) - (u,v) \|$ $(x,y), (u,v) \in V$; de aquí

$$\| f(x) - f(x') \| = \| \tilde{f}(x,x) - \tilde{f}(x',x') \| \geq m \| (x,x) - (x',x') \| = m \| x - x' \| .$$

En consecuencia $f(E)$ es cerrado en E y $f: E \to E$ es una biyección tal que $\| f^{-1}(x) - f^{-1}(x') \| \leq \frac{1}{m} \| x - x' \|$ lo cual termina la demostración.

3.4. <u>PROPOSICION</u>. Sea $f \in Lip(E)$ entonces $\sigma(f)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. De hecho $\sigma(f) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{2}\, lip(f)\}$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Ya que la aplicación $\mathbb{C} \to Lip(\tilde{E})$, $\lambda \to \tilde{f} - \lambda\tilde{I}$ es continua y $R(\Delta(E), \tilde{E})$ es un abierto, se sigue que $\rho(f)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y en consecuencia $\sigma(f)$ es cerrado. Sea ahora $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \sqrt{2}\, lip(f) = \sqrt{2}\, lip(\tilde{f})$, entonces $lip(\frac{1}{\lambda}\tilde{f}) < 1$ (ver 3.1.) y en consecuencia $\tilde{I} - \frac{1}{\lambda}\tilde{f} \in U(\tilde{E})$, (ver proposición 2.3). De aquí $\tilde{f} - \lambda\tilde{I} \in U(\tilde{E})$ dando fin a la demostración.

3.5. <u>PROPOSICION</u>. Si $f \in Lip(E)$ es de clase C^1 entonces

$$\sigma(f) \supseteq \{\sigma(L) : L \in f'(E)\}$$

$(\overline{f'(E)})$ = clausura en L(E) de f'(E), donde L(E) = espacio de aplicaciones lineales continuas de E en si mismo (y $f': E \to L(E)$ la diferencial de f).

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $\lambda \in \rho(f)$ y sea $V \subseteq E$ un abierto conteniendo $\Delta(E)$ tal que la restricción de $\tilde{f}-\lambda\tilde{I}$ a V es regular. De 2.7 sabemos que $(\tilde{f})'(x,y)-\lambda\tilde{I}$ es invertible $\forall$ $(x,y) \in V$ y existe $m > 0$ tal que

$$\| (f'(x,y) - \lambda I)Z \| \geq m\| Z\| \qquad (x,y) \in V \qquad Z \in \tilde{E}.$$

Por otra parte $\tilde{f}'(x,x) = \widetilde{f'(x)}$ y en consecuencia

$$\| (\widetilde{f'(x)} - \lambda\tilde{I})Z\| \geq m\| Z\| \qquad x \in E, \qquad Z \in \tilde{E}.$$

Si $L \in f'(E)$ se sigue de 3.6 (ver más abajo) que $\tilde{L} - \lambda\tilde{I}$ es invertible. De aquí $\lambda \in \bigcap\{\rho(L): L \in \overline{f'(E)}\}$ o sea $\rho(f) \subseteq \bigcap\{\rho(L): L \in f'(E)\}$ y el resultado se sigue tomando complementos.

3.6. <u>LEMA</u>. Sea F un espacio de Banach y sea $\{L_n\}$ una sucesión en L(F) (=aplicaciones lineales continuas de F en si mismo) tal que (1) L_n es invertible, $n = 1,2...$ (2) existe $m > 0$ verificando $\| L_n(u)\| \geq m \| u\|$ $n = 1,2,...$ $u \in F$. Si $L_n \to L$ entonces L es invertible.

<u>DEMOSTRACION</u>. Claramente podemos suponer m=1; también es claro que $\| L(u)\| \geq \| u\|$, $u \in F$. Pongamos $F_o = L(F)$, entonces F_o es un subespacio cerrado de F

y queremos mostrar que $F_o = F$. Supongamos que existe $v \in F - F_o$ con $\|v\| = 1$, aplicando el Teorema de Hann-Banach ([1]) podemos deducir la existencia de un funcional lineal continuo $\phi: F \to R$ tal que $\phi(F_o)=\{0\}$ y $\phi(v) = 1$. En particular $\phi \circ L = 0$ y $\phi \circ L_n \to 0$. Ya que L_n es invertible existe $u_n \in F$ tal que $L_n(u_n) = v$, de aquí $\|u_n\| \leq \|L_n(u_n)\| = \|v\| = 1$. y $\|\phi \circ L_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\phi L_n(x)| \geq |\phi L_n(u_n)| = |\phi(v)| = 1$.
Esta contradicción ($\|\phi \circ L_n\| \geq 1$ y $\phi L_n \to 0$) termina la demostración.

Nuestro objetivo principal en esta sección es mostrar que en la proposición 3.5 se tiene igualdad si $\overline{f'(E)}$ es compacto. (Nótese que si $\dim E < +\infty$ entonces $\overline{f'(E)}$ es siempre compacto por ser cerrado y acotado, ver proposición 2.1). Entre tanto necesitamos varios resultados intermedios.

3.7. <u>LEMA</u>. Sea $f: E \to E$ una aplicación y sea $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha, \beta \in R$ y $\beta \neq 0$. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que $\|(\tilde{f}-\lambda\tilde{I})(x,x) - (\tilde{f}-\lambda\tilde{I})(x',x')\| \geq$
$\geq K\|x-x'\|$; $x,x' \in E$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Para abreviar pongamos $g = \tilde{f} - \lambda\tilde{I}$; si el lema fuera falso existirían sucesiones $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$

en E tal que $x_n \neq x'_n$ y $\| g(x_n, x_n) - g(x'_n, x'_n) \| \leq$ $\leq \frac{1}{n} \| x_n - x'_n \|$.

Pongamos $a = \alpha - \beta$, $b = \alpha + \beta$ ($a \neq b$ porque $\beta \neq 0$) entonces

$$\left.\begin{aligned} \| f(x_n) - f(x'_n) - a(x_n - x'_n) \| &\leq \frac{1}{n} \| x_n - x'_n \| \\ \| f(x_n) - f(x'_n) - b(x_n - x'_n) \| &\leq \frac{1}{n} \| x_n - x'_n \| \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sea $u_n = \| x_n - x'_n \|^{-1} (x_n - x'_n)$, de (1) se sigue que

$$\frac{f(x_n) - f(x'_n)}{\| x_n - x'_n \|} - au_n \to 0, \quad \frac{f(x_n) - f(x'_n)}{\| x_n - x'_n \|} - bu_n \to 0$$

De aquí $(b-a)\, u_n \to 0$ y en consecuencia $u_n \to 0$ $(a \neq b)$; esto contradice el hecho que $\| u_n \| = 1$ $(n=1,2,\ldots)$ y da fin a la demostración.

3.8. PROPOSICION. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio de Banach F y sea $g \in \mathrm{Lip}(F)$ de clase C^1 verificando las condiciones siguientes:

1) Existe $k > 0$ tal que $\| g(x) - g(y) \| \geq k \| x-y \|$ $x,y \in A$

2) Existe $m > 0$ tal que $\| g'(a)u \| \geq m \| u \|$; $a \in A$ y $\forall\, u \in F$.

3) $g'(a)$ es invertible $\forall\, a \in A$.

Entonces $g \in \tilde{R}(A,F)$.

DEMOSTRACION. Podemos asumir que $m = k$ (en caso contrario trabajaríamos con $\min \{m,k\}$). De las hipótesis 2) y 3) y el teorema de la función inversa se sigue que para cada $a \in A$ existe $\rho(a) > 0$ tal que

i) $g'(x)$ es invertible $x \in B(a, \rho(a))$

ii) $\| g(x)-g(y) \| \geq \frac{m}{2} \| x-y\|$ si $x,y \in B(a,\rho(a))$

Aquí $B(x_o,\gamma) = \{x \in F: \| x-x_o\| < \gamma\}$, para $x_o \in F$ y $\gamma > 0$.

Sean $M = \text{lip}(g)$, $\gamma(a) = \frac{1}{4} \frac{m}{m+2M} \rho(a)$,

$$W = \cup\{B(a,\gamma(a)): a \in A\},$$

entonces W es un abierto de F conteniendo A y $g(W)$ es abierto (Teorema de la función inversa y (i)). Probaremos que $\| g(x)-g(y) \| \geq \frac{m}{2} \| x-y\|$ $x,y \in W$, lo cual dará fin a la demostración.

Supongamos que existen $x,y \in W$ tales que $\| g(x) - g(y) \| < \frac{m}{2} \| x-y\|$ y sean $a,b \in A$ tales que $x \in B(a,\gamma(a))$, $y \in B(b,\gamma(b))$. Podemos asumir $\gamma(b) \leq \gamma(a)$; de aquí

$$m\| b-a\| \leq \| g(b)-g(a) \| \leq \| g(b)-g(y) \| +\| g(y)-g(x) \| +$$
$$+ \| g(x) - g(a) \| \leq 2M\, \gamma(a) + \frac{m}{2} \| y-x\| \leq (2M+m)\gamma(a) +$$
$$+ \frac{m}{2} \| b-a\| , \quad \text{luego} \quad \frac{m}{2} \| b-a\| \leq (2M+m)\gamma(a) = \frac{1}{4} m\, \rho(a) ,$$

o sea $\| b-a\| \leq \frac{1}{2}\rho(a)$. En consecuencia

$$\| y-a\| \leq \| y-b\| + \| b-a\| \leq \gamma(a) + \frac{1}{2}\rho(a) \leq \frac{3}{4}\rho(a) .$$

(Nótese que $\gamma(a) \leq \frac{1}{4}\rho(a)$) tenemos así que $x,y \in B(a,\rho(a))$ y de aquí $\| g(x)-g(y)\| \geq \frac{m}{2}\| x-y\|$.

Esto contradice el hecho que $\| g(x)-g(y)\| < \frac{m}{2}.\| x-y\|$ y termina la demostración.

En fin, a objeto de mostrar el resultado principal de esta sección, necesitamos un resultado debido a Hadamard [4] y Rheimboldt [8], el cual enunciamos a continuación.

3.9. PROPOSICION. Sea E un espacio de Banach y $f: E \to E$ una aplicación de clase c^1 tal que:

1) $f'(x)$ es invertible ; $x \in E$ y
2) existe $m > 0$ tal que $\| f'(x)u\| \geq m\| u\|$, $x,u \in E$.

(Nótese que si $\dim E < +\infty$ entonces 2) implica 1)).
Entonces f es un difeomorfismo.

DEMOSTRACION. Daremos una prueba en el caso que f es de clase c^2. En el caso general la prueba, aunque más complicada y es similar y puede encontrarse en [8]. Supongamos entonces que $f \in c^2$; claramente también podemos suponer que $f(0) = 0$.

Dado $y \in E$ consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = [f'(x)]^{-1}(y) \ , \quad x(0) = 0 \qquad (1)$$

Ya que $f \in C^2$, se sigue que (1) posee una solución (ver [2]) la cual está definida en todo R porque $\| f'(x)^{-1} \| \leq \frac{1}{m}$ $(x \in E)$. Sea $\alpha_y: R \to E$ la solución de (1); del teorema de diferenciabilidad con respecto a parámetros para ecuaciones diferenciales (ver [2]) se sigue que la aplicación $R \times E \to E$, $(t,y) \to \alpha_y(t)$ es diferenciable. Por otra parte $\frac{d}{dt}(f\, \alpha_y)(t) = f'(\alpha_y(e))\, \alpha_y'(t) = y$ (ver (1)) y en consecuencia

$f\alpha_y(t) - ty$ no depende de t, pero para $t = 0$, $f\, \alpha_y(t) - ty$ vale cero y así $f\alpha_y(t) = ty$ $(t \in R, y \in E)$. Sea $g: E \to E$ la aplicación diferenciable definida por $g(y) = \alpha_y(1)$, entonces $f \circ g = I$. De aquí $g(E)$ es cerrado y g es inyectiva. Además $g'(x) = [f'(g(x))]^{-1}$ y del teorema de la función inversa se sigue que $g(E)$ es un abierto de E, lo cual da fin a la demostración.

<u>NOTA</u>. El teorema 3.9 vale si 2) es válida y si (1)' $\exists\, x_o$: $f'(x_o)$ es invertible. (En efecto sea $A = \{x \in E: f'(x)$ es invertible$\}$ entonces A es abierto (no vacío) de E pero de 3.6 se sigue que A es cerrado en E, luego $A=E$ y el resultado se sigue de 3.9).

3.10. <u>TEOREMA</u>. Sea $f \in Lip(E)$ de clase C^1; si $\overline{f'(E)}$ es compacto entonces

$$\sigma(f) = \bigcup \{\sigma(L) : L \in \overline{f'(E)}\}$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $\lambda \in \bigcap \{\rho(L) : L \in \overline{f'(E)}\}$, de acuerdo a 3.5. bastará probar que $\lambda \in \rho(f)$.

<u>AFIRMACION</u>. Existe $m > 0$ tal que $\|(\widetilde{f'(x)} - \lambda\tilde{I})\, Z\| \geq$ $\geq m\|Z\|$ $\forall x \in \tilde{E}$ y $\forall Z \in E$. En efecto; en caso contrario existirían sucesiones $\{x_n\}$ en E y $\{Z_n\}$ en $\tilde{E}$ con $\|Z_n\| = 1$ tales que $(\widetilde{f'(x_n)} - \lambda\tilde{I})Z_n \to 0$. Ya que $\overline{f'(E)}$ es compacto podemos asumir que $f'(x_n) \to L$ y así $(\tilde{L} - \lambda\tilde{I})Z_n \to 0$; pero $\tilde{L} - \lambda\tilde{I}$ es invertible $(\lambda \in \rho(L))$ implicando que $Z_n \to 0$. Esto contradice el hecho que $\|Z_n\| = 1$ $(n-1,2,\ldots)$ y prueba la afirmación.

Pongamos $\lambda = \alpha + i\beta$; $\alpha, \beta \in R$ y consideremos los casos siguientes:

<u>CASO 1. $\beta = 0$</u>. Entonces $\|(f'(x)-\lambda I)u\| = \|(\widetilde{f'(x)}-\lambda\tilde{I})$ $(u,u)\| \geq m\|u\|$ y $f'(x) - \lambda I$ es invertible $(x \in E)$. El resultado se sigue aplicando 3.9 a $f - \lambda I$.

<u>CASO 2. $\beta \neq 0$</u>. Se sigue de la proposición 3.8 aplicada a $F = \tilde{E}$, $A = \Delta(E)$ = diagonal de $\tilde{E}$ y $g = \tilde{f} - \lambda\tilde{I}$. (Nótese que por 3.7 g y $\Delta(E)$ satisfacen 1ª de 3.8). Esto termina la demostración.

§4) APLICACIONES ASOCIADAS A UNA FUNCION LIPSCHITZ.

En lo que resta de esta exposición, el símbolo $\| \ \|$ denotará la norma de cualquier espacio de Banach. E denotará un espacio de Banach e I denotará la identidad de E. Dados espacios de Banach F,G, notaremos por $C_b(F,G)$ al espacio de Banach de aplicaciones continuas y acotadas $\alpha: F \to G$ provisto de la norma del supremo $\|\alpha\| = \sup\{\|\alpha(x)\| : x \in F\}$. También pondremos $C_b(E) = C_b(E,E)$

4.1. <u>NOTACIONES</u>. Sean $f \in Lip(E)$ y $\alpha \in C_b(E)$ entonces $\|f(x+\alpha(x)) - f(x)\| \leq lip(f)\|\alpha\|$ $(x \in E)$. De aquí la aplicación $f_\#: C_b(E) \to C_b(E)$ dada por $f_\#(\alpha) = f \circ (I + \alpha) - f$ está bien definida. También es claro que $\|f_\#(\alpha) - f_\#(\alpha')\| \leq lip(f) \; \|\alpha - \alpha'\|$, lo cual dice que $f_\# \in Lip(C_b(E))$ y $lip(f_\#) \leq lip(f)$. $f_\#$ será llamada la aplicación asociada a f.

4.2. <u>PROPOSICION</u>. Sea $f \in Lip(E)$ de clase c^1. Si f' es uniformemente continua entonces $f_\#$ es de clase c^1 y

$$[(f_\#)'(\alpha) \; \beta] \; (x) = f'(x + \alpha(x')) \; (\beta(x))$$

(Para abreviar pondremos $f_\#'(\alpha)\beta = f'(I+\alpha).\beta$).

<u>DEMOSTRACION</u>. Ejercicio.

4.3. <u>OBSERVACION</u>. La proposición 4.2 falla si f' no es uniformemente continua, como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $E = R$, $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$, claramente $f \in \operatorname{Lip}(R)$ y es de clase C^1. Veremos que $f_\#$ no es diferenciable en $\alpha_0 = 0$. En efecto; en caso contrario se tendría que

$$\frac{1}{\|\alpha\|} \sup_{x \in R} \left| \int_x^{x+\alpha(x)} (\operatorname{sen} t^2 - \operatorname{sen} x^2)\, dt \right| \to 0 \quad \text{si}$$

$\|\alpha\| \to 0$.

Sea $\alpha_n \in C_b(R)$ la aplicación constante $\alpha_n \equiv \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\ldots)$, debemos tener que

$$\sup_{x \in R} n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} (\operatorname{sen} t^2 - \operatorname{sen} x^2) dt \right| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty \qquad (*)$$

Pero $$\frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2n\pi}{t - 2n\pi} \to 1 \quad \text{si} \quad t \to 2n\pi \quad (n=1,2,\ldots)$$

y $\operatorname{sen} t$ es 2π-periódica, en consecuencia existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{sen} t \geq \frac{1}{2}(t-2n\pi)$ si $2n\pi \leq t \leq 2n\pi + \delta$, $n=1,2,\ldots$

Sea $x_n = \sqrt{2n\pi}$ entonces $\int_{x_n}^{x_n+\frac{1}{n}} (\operatorname{sen} t^2 - \operatorname{sen} x_n^2)\, dt =$ $= \int_{x_n}^{x_n+1/n} \operatorname{sen} t^2\, dt$. Ya que $\frac{x_n}{n} \to 0$ existe $N \geq 1$

tal que $\frac{2x_n}{n} + \frac{1}{n} \leq \delta$ si $n \geq N$; si $x_n \leq t \leq x_n + \frac{1}{n}$ entonces $x_n^2 = 2n\pi \leq t^2 \leq x_n^2 + \delta$ para $n \geq N$, en consecuencia $\operatorname{sen} t^2 \geq \frac{1}{2}(t^2 - 2n\pi) = \frac{1}{2}(t^2 - x_n^2)$ $(n \geq N)$ y

$$\int_{x_n}^{x_n+\frac{1}{2}} \operatorname{sen} t^2 \, dt \geq \frac{1}{2} \int_{x_n}^{x_n+\frac{1}{n}} (t^2 - x_n^2)\,dt = \frac{1}{6} t^3 \Big|_{x_n}^{x_n+\frac{1}{2}} - \frac{x_n}{n} \geq \frac{1}{6} \frac{3x_n^2}{n} = 2\pi .$$

De aquí $n \left| \int_{x_n}^{x_n+\frac{1}{n}} (\operatorname{sen} t^2 - \operatorname{sen} x_n^2)\,dt \right| \to +\infty$ si $n \to \infty$

lo cual contradice (*) y termina la prueba.

4.4. <u>PROPOSICION</u>. Sea $f \in U(E)$ entonces $f_\# \in U(E)$ y $\operatorname{lip}((f_\#)^\varepsilon) \leq \operatorname{lip}(f^\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $\beta \in C_b(E)$, entonces

$$\| f^{-1}(f(x) + \beta(x)) - x \| = \| f^{-1}(f(x) + \beta(x)) - f^{-1}(f(x)) \| \leq$$

$\leq \operatorname{lip}(f^{-1}) \| \beta \|$, en consecuencia la aplicación $T: C_b(E) \to C_b(E)$, $T(\beta) = f^{-1} \circ (f+\beta) - I$ está bien definida. Ahora, es fácil verificar que $T \circ f_\# = f_\# \circ T =$ identidad de $C_b(E)$ y que $T \in \operatorname{Lip}(C_b(E))$ con $\operatorname{lip}(T) \leq \operatorname{lip}(f^{-1})$ lo cual termina la demostración.

Nuestro principal objetivo en esta sección es encontrar recíprocas parciales a la proposición 4.1 (ver 4.5 y 4.6).

4.5. PROPOSICION. Sea $f \in Lip(E)$ tal que $f_{\#} \in U(C_b(E))$ entonces existe $h \in Lip(E)$ tal que $f \circ h = I$. En particular $f \in U(E)$ si $\dim E < +\infty$.

DEMOSTRACION. Sea $k: E \to E$ la composición

$$E \xrightarrow{J} C_b(E) \xrightarrow{(f_{\#})^{-1}} C_b(E) \xrightarrow{\phi} E$$

desde J es la inclusión natural, $J(a)$ = aplicación constante de valor a y Φ es la evaluación en $x=0$; es decir $\Phi(\alpha) = \alpha(0)$. Ya que $lip(J) \leq 1$ y $lip(\phi) \leq 1$ se sigue que $k \in Lip(E)$ y $lip(k) \leq lip(f_{\#})^{-1} \leq lip(f^{-1})$.

Pongamos $\alpha_a = (f_{\#})^{-1}(J(a))$ entonces $k(a) = \alpha_a(0)$ y $J(a) = f_{\#}(\alpha_a) = f \circ (I+\alpha_a) - f$; de aquí $a = J(a)(0) =$ $= f(\alpha_a(0)) - f(0) = f(k(a)) - f(0)$.

Sea $h: E \to E$ definida por $h(a) = k(a-f(0))$, entonces $f \circ h = I$ y $lip(h) = lip(k)$.

De la identidad $f \circ h = I$ se deduce que $h(E)$ es cerrado en E y que h es inyectiva. Si $\dim E < +\infty$ entonces $h(E)$ es abierto en E (ver [6]), así $h: E \to E$ es una biyección y da fin a la demostración.

4.6. PROPOSICION. Sea $f \in Lip(E)$ de clase c^1 tal que $f_\# \in U(C_b(E))$ entonces $f \in U(E)$.

DEMOSTRACION. Sea $m = [lip(f_\#^{-1})]^{-1}$, entonces

$$\| f_\#(\alpha) - f_\#(\alpha') - f_\#(\alpha') \| \geq m \| \alpha - \alpha' \| \qquad \alpha , \alpha' \in C_b(E).$$

Y como $f_\#(0) = 0$ se tiene que $\| f_\#(\alpha) \| \geq m \| \alpha \|$ $\forall \alpha \in C_b(E)$; es decir

$$\sup_{x \in E} \| f(x+\alpha(x)) - f(x) \| \geq m \sup_{x \in E} \| \alpha(x) \| \; ; \quad \alpha \in C_b(E) \quad (1)$$

Para cada entero $n \geq 1$ sea $\phi_n : [0,\infty) \to [0,1]$ una aplicación continua tal que $\phi_n(0) = 1$ y $\phi_n(t) = 0$ si $t \geq \frac{1}{n}$. Fijemos $x_o \in E$ y para cada $u \in E$ sea $\alpha_{n,u} \in C_b(E)$ definida por $\alpha_{n,u}(x) = \phi_n(\| x-x_o \|)u$; es claro que $\| \alpha_{n,u} \| = \| u \|$ y que $\alpha_{n,u}(x) = 0$ si $\| x-x_o \| \geq \frac{1}{n}$. De (1) se tiene que

$$\sup_{\| x-x_o \| \leq \frac{1}{n}} \| f(x + \alpha_{n,u}(x)) - f(x) \| \geq m \| u \| \qquad (2)$$

y en consecuencia existe una sucesión $\{x_n\}$ en E tal que $x_n \to x_o$ y

$$\| f(x_n + \alpha_{n,u}(x_n)) - f(x_n) \| \geq m \| u \| + \frac{1}{n} \qquad (3)$$

Podemos escribir $\alpha_{n,u}(x_n) = \lambda_n u$ con $\lambda_n \in [0,1]$ y como $[0,1]$ es compacto podemos admitir que $\lambda_n \to \lambda_o \in [0,1]$. De (3) se sigue que

$$\| f(x_o + \lambda_o u) - f(x_o) \| \geq m \| u \| . \qquad (4)$$

(En particular $\lambda_o \geq \frac{m}{\operatorname{lip}(f)}$ si $u \neq 0$, $\lambda_o = \lambda_o(u)$ depende de u). Ya que $f \in C^1$ (4) puede escribirse bajo la forma

$$\| \int_o^1 f'(x_o + s \lambda_o u) \lambda_o u \, dt \| \geq m \| u \|$$

entonces

$$\lambda_o \| \int_o^1 f'(x_o + s \lambda_o u) u \, dt \| \geq m \| u \|$$

y como $\lambda_o \leq 1$ queda

$$\| \int_o^1 f'(x_o + s \lambda_o u) u \, dt + \| \geq m \| u \| \qquad (5)$$

Hemos probado así que $\forall u \in E$ $(u \neq 0)$ existe $\lambda_o = \lambda_o(u) \in [0,1]$ verificando da desigualdad (5). Sean $v \in E$ y $\varepsilon \in R$ tales que $\| v \| = 1$ y $\varepsilon \neq 0$ si aplicamos (5) al vector $u = \varepsilon v$, vemos que existe $\lambda_o = \lambda_o(\varepsilon, v) \in [0,1]$ tal que

$$\| \int_o^1 f'(x_o + \varepsilon s \lambda_o v) u \, ds \| \geq m \qquad (6)$$

tipo (h_o) si:

5.2.a) $f_\# - h^* \in U(C_b(E)) \quad \forall\ h \in U(E) \quad (h^*: C_b(E) \to C_b(E))$.

5.2.b) La aplicación $U(E) \to R$, $h \to lip((f_\# - h^*)^{-1})$ es acotada.

Pondremos $H_o(E) = \{f \in U(E):\ f$ es de tipo $(h_o)\}$ y si $f \in H_o(E)$ definimos $C(f) = \sup\{lip(f_\# - h^*)^{-1}):$ $h \in U(E)\}$.

5.3. <u>EJEMPLOS</u>. Sea $f \in (E)$ una contracción (resp. dilatación entonces (ver 4.4.) $f_\#$ es una contracción (resp. dilatación y como h^* es una isometría se tiene que $f_\# - h^*$ es invertible (ver 2.4) y que $lip((f_\# - h^*)^{-1}) \leq$ $\leq [1 - lip(f)]^{-1}$ (resp. $lip(f_\# - h^*)^{-1}) \leq lip(f^{-1})$ $[1 - lip(f^{-1})]^{-1}$).

5.4. <u>PROPOSICION</u>. Sea $f \in H_o(E)$ y supongamos que E es un producto, $E = E_1 \times E_2$, de dos espacios de Banach. Si f es de la forma $f(x_1,x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ entonces $f_k \in H_o(E_k)$, $k = 1,2$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea C_1 el subespacio de $C_b(E)$ definido por $\alpha \in C_1$ si y sólo si α es de la forma $\alpha(x_1,x_2) = (\gamma(x_1),0)$ con $\gamma \in C_b(E_1)$ (C_1 es canónicamente isométrico a $C_b(E_1)$, $\gamma \to \alpha$, $\alpha(x_1, x_2) =$ $= (\gamma(x_1),0)$). Dado $h_1 \in U(E_1)$ sea $h \in U(E)$ definido

por $h(x_1,x_2) = (h_1(x_1),x_2)$. Dada $\delta \in C_b(E_2)$ sea $\beta(x_1,x_2) = (\delta(x_1),0)$; ya que $L_h = f_\# - h^*$ es invertible, existe $\alpha \in C_b(E)$ tal que $L_h(\alpha) = \beta$. Escribamos $\alpha(x_1,x_2) = (\alpha_1(x_1,x_2), \alpha_2(x_1,x_2))$, entonces la igualdad $L_h(\alpha) = \beta$ equivale a

$$\begin{aligned} f_1(x_1 + \alpha_1(x_1,x_2)) - f_1(x_1) - \alpha_1 h(x_1,x_2) &= \delta(x_1) \\ f_2(x_1 + \alpha_2(x_1,x_2)) - f_2(x_2) - \alpha_2 h(x_1,x_2) &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Tomando $x_2 = 0$ en la primera igualdad de (1) queda

$$f_1(x_1 + \alpha_1(x_1,0)) - f_1(x_1) - \alpha_1(h_1(x_1),0) = \delta(x_1 \qquad (2).$$

Sea $\gamma \in C_b(E_2)$ definida por $\gamma(x_1) = \alpha(x_1,0)$, entonces

$$f_1(x_1 + \gamma(x_1)) - f_1(x_1) - \gamma h_1(x_1) = \delta(x_1) \qquad (3)$$

además $\bar{\alpha}_2 = 0$ también satisface la segunda igualdad de (1); de aquí $\bar{\alpha}(x_1,x_2) = (\gamma(x_2),0)$ también satisface (1), o sea que $L_h(\bar{\alpha}) = \beta$. Como L_h es inyectiva se tiene $\alpha = \bar{\alpha}$, lo cual muestra que $L_h^{-1}(C_1) \subseteq C_1$, pero es claro que $L_h(C_1) \subseteq C_1$ y de aquí, la restricción $\tilde{L}_h : C_1 \to C_1$ es una unidad de C_1 ($\tilde{L}_h \in U(C_1)$) pero la isometría $C_b(E_1) \to C_1$ ($\gamma \to \alpha$, $\alpha(x_1, x_2) = (\gamma(x_1),0)$) permite identificar $f_{1\#} - h_1^*$ con $\tilde{L}_h$;

luego $f_{1\#} - h_1^*$ está en $U(C_b(E_1))$ y $\mathrm{lip}[(f_{1\#}-h_1^*)^{-1}] =$
$= \mathrm{lip}((\tilde{L}_h)^{-1}) \leq \mathrm{lip}(L_h) \leq C(f)$. Esto prueba que $f_1 \in H_o(E_1)$; de manera análogo se muestra que $f_2 \in H_o(E_2)$ dando fin a la demostración.

5.5. PROPOSICION. Sean E_1, E_2 espacios de Banach y sean $f_1 \in U(E_1)$ una contracción y $f_2 \in U(E_2)$ una dilatación. Sea $E = E_1 \times E_2$ y $f \in U(E)$ definida por $f(x_1,x_2) =$
$= (f_1(x_1), f_2(x_2))$, entonces $f \in H_o(E)$.

DEMOSTRACION. Sea $h \in U(E)$ e identifiquemos $C_b(E)$ con $C_b(E,E_1) \times C_b(E,E_2)$ de la manera natural; entonces $f_\# - h^*$ se identifica a la aplicación

$$C_b(E,E_1) \times C_b(E,E_1) \to C_b(E,E_1) \times C_b(E,E_2)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \to (\tilde{f}_{1\#}(\alpha_1) - h_1^*(\alpha_1), \ \tilde{f}_{2\#}(\alpha_2) - h_2^*(\alpha_2))$$

donde $h_k^*: C_b(E,E_k) \to C_b(E,E_k)$ es la isometría $h_k^*(\alpha_k) =$
$= \alpha_k \circ h$ y $\tilde{f}_{k\#}: C_b(E,E_k) \to C_b(E,E_k)$ viene dada por

$\tilde{f}_{k\#}(\alpha_k) = f_k \circ (\pi_k + \alpha_k) - f_k \circ \pi_k$ y $\pi_k: E \to E_k$ a la proyección natural.

Pero es fácil verificar que $\tilde{f}_{1\#}$ es una contracción $(\mathrm{lip}(\tilde{f}_{1\#}) \leq \mathrm{lip}(f_1))$ y que $\tilde{f}_{2\#}$ es una contracción $(\mathrm{lip}((f_{2\#})^{-1}) \leq \mathrm{lip}(f_2^{-1}))$. De 2.4 se sigue que

$f_{\#} - h^* \in U(C_b(E))$ y que $\mathrm{lip}((f_{\#} - h^*)^{-1}) \leq$

$\leq \max\{[1-\mathrm{lip}(f_1)]^{-1}, \mathrm{lip}(f_2^{-1})\ [1-\mathrm{lip}(f_2^{-1})]^{-1}\}$

dando fin a la demostración.

5.6. <u>PROPOSICION</u>. $H_o(E)$ es un abierto de $\mathrm{Lip}(E)$ (no vacío por 5.3.).

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $f \in H_o(E)$ y sea $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{[\mathrm{lip}(f^{-1})]^{-1}, C(f)^{-1}\}$ ($C(f)$ como en 5.2). Sea $g \in \mathrm{Lip}(E)$ tal que $\mathrm{lip}(g-f) \leq \varepsilon$, entonces $g \in U(E)$ (ver 2.3) y $\mathrm{lip}((g_{\#} - h^*) - (f_{\#} - h^*)) = \mathrm{lip}(g_{\#} - f_{\#}) = \mathrm{lip}((g-f)_{\#}) \leq$ $\leq \mathrm{lip}(g-f) \leq \frac{1}{2} C(f)^{-1} \leq \frac{1}{2} \mathrm{lip}(f_{\#} - h^*)^{-1})$. Otra vez de 2.3 se tiene que $g_{\#} - h^* \in U(C_b(E))$ y que $\mathrm{lip}((g_{\#} - h^*)^{-1}) \leq 2\, C(f)$, lo cual termina la demostración.

5.7. <u>PROPOSICION</u>. (Conjugación). Sean $f,g \in H_o(E)$ tales que $f - g \in C_b(E)$, entonces existe un único elemento $\alpha \in C_b(E)$ tal que

1) $I + \alpha$ es un homeomorfismo y

2) $f \circ (I + \alpha) = (I + \alpha) \circ g$ (f,g son conjugados).

<u>DEMOSTRACION</u>. Ya que $f_{\#} - g^* \in U(C_b(E))$ existe un único $\alpha \in C_b(E)$ tal que $f_{\#}(\alpha) - g^*(\alpha) = g-f$; es decir $f(I + \alpha) - f - \alpha \circ g = g - f$, lo cual equivale a

$$f(I+\alpha) = (I+\alpha)og \qquad (1)$$

De manera análoga, $g_{\#} - f^{*} \in U(C_b(E))$ y en consecuencia existe $\beta \in C_b(E)$ tal que $g_{\#}(\beta) - f^{*}(\alpha) = f-g$, o sea

$$(I+\beta)o\ f = g\ o(I+\beta) \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue rápidamente que

$$f\ o\ (I+\alpha)\ (I+\beta) = (I+\alpha)\ (I+\beta)\ o\ f \qquad (3)$$

pero podemos escribir $(I+\alpha)\ o\ (I+\beta) = I+\gamma$ con $\gamma = \beta + \alpha\ o(I+\beta)$. (Nótese que $\gamma \in C_b(E)$). Y entonces (3) se convierte en

$$f\ o(I+\gamma) = (I+\gamma)o\ f\ . \qquad (4)$$

Ahora (4) equivale a $(f_{\#} - f^{*})\ (\gamma) = 0$, pero $f_{\#} - f^{*} \in U(C_b(E))$ y $(f_{\#} - f^{*})\ (0) = 0$, luego $\gamma = 0$ lo cual muestra que $(I+\alpha)\ (I+\beta) = I$. De manera análoga se muestra que $(I+\beta)o\ (I+\alpha) = I$ lo cual da fin a la demostración.

5.8. PROPOSICION. (Cambio de Variables). Sean E, F espacios de Banach y $p : E \rightarrow E$ un isomorfismo lineal. Si $f \quad H_o(E)$ entonces $p^{-1}\ o\ f\ o\ p \quad H_o(F)$.

DEMOSTRACION. Sea $Q: C_b(F) \rightarrow C_b(E)$ definida por $Q(\alpha) = p\ o\ \alpha\ o\ p^{-1}$ y pongamos $g = p^{-1} o\ f\ o\ p$, claramente $g \in U(F)$ $(f \in U(E))$. Dado $k \in U(F)$ sea

$h = p\,k\,p^{-1}$ $(h \in U(E))$ entonces, es fácil comprobar que $(g_{\#} - k^{*}) = Q^{-1} \circ (f_{\#} - h^{*}) \circ Q$ lo cual da fin a la demostración.

5.9. PROPOSICION. Sea $f \in H_o(E)$ entonces existe $h \in lip(E)$ tal que $(f - I) \circ h = I$. Si $\dim E < +\infty$, $f-I \in U(E)$. También $f - I \in U(E)$ si f es de clase c^1. $(1 \notin \sigma(f))$.

DEMOSTRACION. Basta observar que $f_{\#} - I^{*} = (f-I)_{\#}$ y el resultado se sigue de 4.5 y 4.6.

Uno de los objetivos principales de esta sección es probar que si $f \in H_o(E)$ es de clase c^1 y $\dim E < +\infty$, entonces $\sigma(f) \cap S^1 = \phi$, donde $S^1 = \{\lambda \in ¢: |\lambda| = 1\}$. Para ello necesitamos algunos resultados intermedios.

5.10. LEMA. Existen sucesiones $\{a_n\}$ y $\{\phi_n\}$ en R y $C_b(E,R)$ respectivamente tales que $a_n > 0$, $a_n \to 0$, $\phi_n(E) = [-1,1]$, $\phi_n(-x) = -\phi_n(x)$ $(x \in E,\ n=1,2,\dots)$ y $\phi_n(x) = 0$ si $\|x\| \geq a_n$.

DEMOSTRACION. Sea $u_o \in E$ un $\|u_o\| = 1$ y sea $\phi: E \to R$ un funcional lineal continuo con $\phi(u_o) = 1$ (Teorema de Hann Banach [ ]). En particular la $\|x\|_1 = \max\{|\phi(x)|, \|x - \phi(x)u_o\|\}$ es una norma en E equivalente a la norma original $\|\ \|$ de E.

Sean $\alpha_n: [0,\infty) \to [0,1]$, $\delta_n: R \to R$ aplicaciones continuas tales que $\delta_n(0) = 1$, $\alpha_n(t) = 0$ si $|t| \geq \frac{1}{n}$,

$\delta_n(R) = [-1,1]$, δ_n es impar. Y $\delta_n(t) = 0$ si $|t| \geq \frac{1}{n}$. Definamos $\phi_n \in C_b(E)$ por $\phi_n(x) = \alpha_n($ $(\| x-\phi(x)u_o \|)$ $\delta_n(\phi(x))$; entonces $\phi_n(E) = [-1,1]$, ϕ_n es impar y $\phi_n(x) = 0$ si $\| x \|_1 \geq \frac{1}{n}$. El resultado se sigue fácilmente del hecho que $\| \;\; \|$ es equivalente a $\| \;\; \|_1$.

5.11. PROPOSICION. Si $f \in H_o(E)$ es de clase c^1 entonces existe $m > 0$ tal que $\| f'(x)u + u \| \geq m \| u \|$ $x,u \in E$. Si $\dim E < +\infty$ $f + I \in U(E)$. $(-1 \notin \sigma(f))$.

DEMOSTRACION. Ya que $L = f_{\#} - (-I)^* \in U(C_b(E))$ existe $m > 0$ tal que $\| L(\alpha)-L(\alpha') \| \geq m \| \alpha - \alpha' \|$ $\forall \alpha,\alpha'$ $C_b(E)$ Sean $\{a_n\}$, $\{\phi_n\}$ como en el lema 5.10. y fijemos $x_o, u \in E$ Sean α_n, $\alpha' \in C_b(E)$ definidas por $\alpha'(x) = x_o$, $\alpha_n(x) = $ $= x_o + \phi_n(x)u$; entonces $\| \alpha-\alpha' \| = \| u \|$ y

$$\sup_{\|x\| \leq a_n} \| f(x + x_o + \phi_n(x)u) - f(x + x_o) - \phi_n(-x)u \| \geq m \| u \|$$

luego existe $x_n \to 0$ tal que

$$\| f(x_n + x_o + \phi_n(x_n)u) - f(x_n+x_o) + \phi_n(x_n)u \| \geq m \| u \| - \frac{1}{n}$$

(Recuerde que $\phi_n(-x) = -\phi_n(x)$). Ya que $\phi_n(x_n) \in [-1,1]$, podemos suponer que $\phi_n(x_n) \to \lambda_o$ y de aquí

$$\| f(x_o+\lambda_o u) - f(x_o) + \lambda_o u \| \geq m \| u \|$$

Para mostrar que $\| f'(x)u + u\| \geq m\| u \|$ $(x, u \in E)$ se procede como en la prueba de 4.6. Si dim $E < +\infty$ se puede aplicar 3.9 para concluir que $f + I \in U(E)$.

<u>NOTA</u>. De 5.11 y 3.9 se obtienen que si $f \in H_o(E)$ es de clase c^1 y f' es uniformemente continua entonces $I + f$ U(E). Para ello bastará demostrar que $I+f'(x_o)$ es sobre $\forall$ $x_o \in E$. Ya que f' es uniformemente continua se tiene que $L = f_{\#} - (-I)^*$ es de clase c^1 y $L'=(f_{\#})'- (-I)^*$ (ver 4.2). Ya que $L \in U(C_b(E))$ se sigue de 2.8 que $L'(\alpha)$ es invertible $\forall$ $\alpha \in C_b(E)$. Fijemos x_o, $v \in E$ y sean $\{a_n\}$, $\{\phi_n\}$ como en 5.10. Definamos α, γ_n $C_b(E)$ mediante $\alpha \equiv$ constante de valor x_o, $\gamma_n(x) = \phi_n(x)v$ $(\gamma_n(-x) = - \gamma_n(x)$, $\| \gamma_n\| = = \| v\|$, $\gamma_n(x) = 0$ si $\| x\| \geq a_n)$. Entonces existe $\beta_n \in C_b(E)$ tal que $L'(\alpha)\beta_n = \gamma_n$ o sea

$$f'(x + x_o)\beta_n(x) - \beta_n(-x) = \gamma_n(x) \qquad (1)$$

De aquí $f'(-x + x_o)\beta_n(-x) - \beta_n(x) = -\gamma_n(x)$ (2)

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que $\phi_n(x_n) = 1$, entonces $x_n \to 0$ y $\gamma_n(x_n) = v$. De aquí

$$f'(x_n + x_o)\beta_n(x_n) - \beta_n(-x_n) = v \qquad (3)$$

$$f'(-x_n + x_o)\beta_n(-x_n) - \beta_n(x_n) = -v \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que

$$f'(x_n + x_o) \to f'(x_o) \quad y \quad f'(-x_n + x_o) \to f'(x_o) \qquad (5)$$

se obtiene de (3) y (4) (el hecho que $\| \beta_n \| \leq \frac{1}{m} \| L'(\alpha)\beta_n \| = \frac{1}{m} \| v \|$) que $f'(x_o)\,[\beta_n(x_n) + \beta_n(-x_n)] - [\beta_n(x_n) + \beta_n(-x_n)] \to 0$ (6) .

Si ponemos $g = f - I$, entonces (6) es equivalente a

$$g'(x_o)\ [\beta_n(x_n) + \beta_n(-x_n)] \to 0 \qquad (7).$$

De aquí (ver 5.9)) se deduce que

$$\beta_n(x_n) + \beta_n(-x_n) \to 0 \qquad (8) .$$

De (3), (5) y (8) se sigue que

$$[f'(x_o) + I]\beta_n(x_n) \to v \qquad (9)$$

Sea $L = f'(x_o) + I$, de 5.11. sabemos que existe $m > 0$ tal que $\| L\, u \| \geq m \| u \|$ ($u \in E$). De aquí

$\| \beta_n(x_n) - \beta_k(x_k) \| \leq \frac{1}{m} \| L(\beta_n(x_n)) - L(\beta_k(x_k)) \|$, pero como $\{L(\beta_n(x_n))\}$ es de Cauchy (por ser convergente) se sigue que $\{\beta_n(x_n)\}$ es de Cauchy, en consecuencia existe $u \in E$ tal que $\beta_n(x_n) \to u$ o sea $L\,u = v$, lo cual da fin a la demostración.

El resultado siguiente, aunque no es de interés general, tiene una demostración bastante curiosa.

5.12. PROPOSICION. Sea $f \in H_o(E)$ una función impar ($f(x) + f(-x) = 0$). Si $\dim E < +\infty$ o si f es de clase C^1 entonces $f + I \in U(E)$.

DEMOSTRACION. Sea $C = \{\alpha \in C_b(E): \alpha$ es impar$\}$ y sea $L: C_b(E) \to C_b(E)$, $L = f_{\#} - (-I)^*$ entonces

$$L(\alpha)\ (x) + L(\alpha)\ (-x) = g(x + \alpha(x)) - g(x - \alpha(-x))$$

donde $g = f-I$. Si $\dim E < +\infty$ o si $f \in C'$ sabemos que $g \in U(E)$ (ver 5.9). De aquí $\alpha \in C$ si y sólo si $L(\alpha) \in C$, en consecuencia la restricción $\tilde{L}: C \to C$ de L es una unidad ($\tilde{L} \in U(C)$).

Por el teorema de Hann-Banach tenemos un funcional lineal no trivial $\phi: E \to R$; sea $\delta: R \to [-1,1]$ una función continua impar y sobre y sea $\gamma = \delta \circ \phi : E \to [-1,1]$ (γ es impar sobre) para cada $a \in E$ sea $\beta_a \in C$ definida por $\beta_a(x) = \gamma(x)a$ ($\|\beta_a\| = \|a\|$) y sea $\alpha_a \in C$ tal que $L(\alpha_a) = \beta_a$; tomemos $x_o \in E$ tal que $\gamma(x_o) = 1$ y se $y_o = x_o + f(x_o)$ entonces

$$(f + I)\ (x_o + \alpha_a(x_o)) = a + y_o$$

Sea $K: E \to E$ la composición $E \xrightarrow{J} C \xrightarrow{(\tilde{L})^{-1}} C \xrightarrow{\phi} E$, donde $J(a) = \beta_a$, $\phi(\alpha) = x_o + \alpha(x_o)$ entonces

$(f + I)\ (k(a)) = a + y_o$ además $k \in Lip(E)$ y $lip(k) \leq$
$\leq Lip((\tilde{L})^{-1}) \leq Lip(L^{-1})$ porque $lip(J) \leq 1$ y $lip(\phi) \leq 1$.
Sea $h \in Lip(E)$ definida por $h(a) = k(a-y_o)$ entonces $(f + I) \circ h = I$, en particular $f + I \in U(E)$ si $\dim E < +\infty$.
También si f es de clase C^1 podemos razonar como en 4.6 (teniendo en cuenta 5.11) para concluir que $f+I \in U(E)$.

5.13. LEMA. Existe una sucesión $\{\phi_n\}$ en $C_b(\mathbb{C})$ tal que
1) $1 \leq \|\phi_n\| \leq 2$, (2) $\beta_n(z) = 0$ si $|z| \geq \frac{2}{n}$ y
3) $\beta_n(\lambda z) = \lambda\, \beta_n(z)$ si $\lambda \in S^1$, $z \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACION. Sea $\alpha_n: [0,\infty) \to [0,1]$ una aplicación continua tal que $\alpha_n(t) = 0$ si $|t| \geq \frac{2}{n}$ y $\alpha_n(\frac{1}{n}) = 1$.
Basta definir $\phi_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante $\phi_n(z) = \alpha_n(|z|)\, \dfrac{(n+1)z}{1+|z|}$.

5.14. TEOREMA. Sea $f \in H_o(E)$ de clase C^1. Si $\dim E < +\infty$ entonces $\sigma(f) \cap S^1 = \emptyset$.

DEMOSTRACION. De acuerdo al teorema 3.10 basta mostrar que $\sigma(L) \cap S^1 = \emptyset$ $\forall L \in \overline{f'(E)}$. Sea $L \in \overline{f'(E)}$ y supongamos que existe $\lambda \in S^1 \cap \sigma(L)$; de 5.9 y 5.12 se sigue $\lambda \neq \pm 1$, de aquí existe un espacio de Banach F y un isomorfismo lineal $p: E \to F \times \mathbb{C}$ tal que $p^{-1} L\, p: F \times \mathbb{C} \to$
$\to F \times \mathbb{C}$ es de la forma $(y,z) \to (Ay, By + \lambda z)$ para ciertas aplicaciones lineales $A: F \to F$, $B: F \to \mathbb{C}$. Trabajando

con $p^{-1} f\, p$ en vez de f (si fuera necesario) podemos asumir(5.8) que $E = F \times ¢$ y que $L z = \lambda z$, $z \in ¢$; donde estamos identificando $\{0\} \times ¢$ con $¢$.

Sea $h: E \to E$, $h(y,z) = (y,\lambda z)$, entonces $h \in U(E)$ y en consecuencia $f_{\#} - h^* \in U(E)$; de aquí existe $m > 0$ tal que $\| f(I+\alpha) - f(I+\alpha') - (\alpha - \alpha') \circ h \| \geq m \| \alpha - \alpha' \|$ $\forall\, \alpha,\alpha' \in C_b(E)$. (1).

Sea $\{\phi_n\}$ en $C_b(¢)$ como en el lema 5.13 y sea δ_n: $[0,\infty) \to [0,1]$ una función continua tal que $\delta_n(0)=1$ y $\delta_n(t) = 0$ si $t \geq \frac{2}{n}$. Fijemos $x_o \in E$ y $\omega \in ¢$ y definamos α_n, α', $\beta_n \in C_b(E)$ mediante α' = constante x_o, $\alpha_n(x) = x_o + \beta_n(x)$, $\beta_n(y,z) = (0, \delta_n(\| y\|) \cdot \phi_n(z)\omega)$. Observando que $\| \alpha_n - \alpha' \| = \| \beta_n \| = |\omega|$ y que $\beta_n(x) = 0$ si $\| x\| \leq \frac{2}{n}$ entonces (1) implica que

$$\sup_{\|x\| \leq \frac{2}{n}} \| f(x + \alpha_n(x)) - f(x + x_o) - \beta_n h(x) \| \geq m|\omega| \qquad (2)$$

luego, existe una sucesión $\{x_n\}$ en E, $x_n \to 0$ tal que

$$\| f(x_n + \alpha_n(x_n)) - f(x_n + x_o) - \beta_n\, h(x_n) \| \geq m\, |\omega| - \frac{1}{n} \qquad (3)$$

Ya que $0 \leq \delta_n(\| y_n\|) \leq 1$ y $|\phi_n(z_n)| \leq 2$ podemos admitir que $\delta_n(\|y_n\|)\ \phi_n(z_n) \to \omega_o \in ¢$; donde $(y_n,z_n) = x_n$.

De aquí $\beta_n(x_n) \to \omega_o\,\omega \equiv (0,\omega_o\,\omega)$ y $\beta_n(h_n(x)) \to \lambda\,\omega_o\,\omega$, en consecuencia de (3) se obtiene que

$$\| f(x_o + \omega_o\,\omega) - f(x_o) - \lambda\,\omega_o\,\omega\| \geq m\,|\omega| \tag{4}$$

De aquí

$$\| \int_o^1 f'(x_o + t\,\omega_o\,\omega)\omega_o\,\omega\,dt - \lambda\,\omega_o\,\omega\| \geq m|\omega| \ . \tag{5}$$

Sean $\varepsilon \in R$ y $Z \in ¢$ con $\varepsilon \neq 0$ y $|Z| = 1$; aplicando (5) a $\omega = \varepsilon\,Z$ se obtiene

$$\| \int_o^1 f'(x_o + \varepsilon\,t\,\omega_o\,Z)\,\omega_o\,Z - \lambda\,\omega_o\,Z\,\| \geq m \tag{6}$$

donde $\omega_o \in ¢$ depende de x_o, ε, Z y $|\omega_o| \leq 2$. Pongamos $\omega_\varepsilon = \omega(x_o,\varepsilon,Z)$, fijemos $Z \in C$ y escojamos una sucesión $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$ de modo que $\omega(x_o,\varepsilon_n,Z)$ converja a un elemento $\omega_o \in ¢$. $(|\omega_o| \leq 2|$. Entonces aplicando (6) a $\{\varepsilon_n\}$ y haciendo tender $n \to \infty$ se obtiene

$$\| f'(x_o)\,\omega_o Z - \lambda\,\omega_o\,Z\| \geq m \tag{7}$$

(Hemos probado así que dados $x_o \in E$ y $Z \in S^1$, existe $\omega_o = \omega_o(x_o,Z) \in C$ un $|\omega_o| \leq 2$ verificando (7)).

Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que $f'(x_n) \to L$

y fijemos $Z \in S^1$, Entonces existe una sucesión $\{\omega_n\}$ en $\not{C}$ con $|\omega_n| \leq 2$ tal que $\| f'(x_n)\omega_n Z - \lambda\, \omega_n Z \| \geq m$. Pero podemos asumir que $\omega_n \to \omega_o$ y así $\| L\, \omega_o Z - \lambda\, \omega_o \| \geq m$. Ya que $\omega_o Z \in C \equiv \{0\} \times \not{C}$ se tiene que $L\, \omega_o Z = \lambda\, \omega_o Z$. Esta contradicción termina la demostración.

Recordamos que una aplicación lineal continua $L:E \to E$ (E espacio de Banach) se dice hiperbólica si $\sigma(L) \cap S^1 = \emptyset$.

5.15. TEOREMA. Sea E un espacio de Banach de dimensión finita y sea $L: E \to E$ una aplicación lineal. Entonces $L \in H_o(E)$ si y sólo si L es hiperbólica.

DEMOSTRACION. Del teorema 5.14 sabemos que si $L \in H_o(E)$ entonces L es hiperbólica. Recíprocamente si L es hiperbólica entonces E puede identificarse a un producto $E_1 \times E_2$ (E_1, E_2 espacios de Banach) de suerte que L puede identificarse a una aplicación de la forma $L(x_1,x_2) = (L_1(x_1), L_2(x_2))$ tal que $\sigma(L_1) \subseteq \{\lambda \quad C: |\lambda| < 1\}$ y $\sigma(L_2) \subseteq \{\lambda \quad \not{C} : |\lambda| > 1\}$. (Ver [9]). Ahora se puede mostrar (ver [5]) que existen normas $\| \;\|_1$, $\| \;\|_2$ en E_1, E_2 respectivamente; equivalentes a las normas en E_1 , E_2 inducidas por la norma de E; tales que L_1 es una contracción respecto a $\| \;\|_1$ y L_2 es una dilatación respecto a $\| \|_2$. De la proposición 5.5 se sigue que L es de tipo (h_o) respecto a la norma $\|(x_1,x_2)\|' = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}$. Ahora $\| \|'$ es equivalente a la norma original $\| \|$ de E y es fácil comprobar que la definición de los espacios Lip(E) y U(E) no dependen de normas equivalentes en E. De aquí se sigue que $H_o(E)$ no depende de normas equivalentes en E lo cual da fin a la demostración.

§6) HIPERBOLICIDAD (1).

En esta sección introduciremos una noción de hiperbolicidad (tipo (h_1)) más fuerte que tipo(h_o) a fin de recuperar algunos de los resultados de la sección §5) en el caso en que E no es de dimensión finita.

6.1. <u>DEFINICION</u>. Diremos que $f \in U(E)$ es de tipo(h_1) si $\tilde{f}: \tilde{E} \to \tilde{E}$ es de tipo(h_o) $(\tilde{f} \in H_o(\tilde{E}))$. $H_1(E)$ denotará el subconjunto de U(E) formado por aquellas f de tipo (h_1). Si f es una contracción (resp. dilatación) entonces $\tilde{f}$ también lo es y en consecuencia $f \in H_1(E)$.

6.2. <u>PROPOSICION</u>.

a) $H_1(E)$ es un abierto de U(E).

b) $H_1(E) \subseteq H_o(E)$.

c) Si $E = E_1 \times E_2$ (E_1, E_2 espacios de Banach) y si

$f \in H_1(E_1 \times E_2)$ es de la forma $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ entonces $f_k \in H_1(E_k)$, $k = 1,2$.

d) Si $E = E_1 \times E_2$ y si $f \in Lip(E)$ es de la forma $f(x_1,x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ con f_1 contractante y f_2 dilatante entonces $f \in H_1(E)$.

DEMOSTRACION.

a) Ya que la aplicación ϕ: $Lip(E) \to Lip(\tilde{E})$ $\phi(f) = \tilde{f}$, es continua se tiene que $H_1(E) = \phi^{-1}(H_o(\tilde{E}))$ es abierto.

b) $\tilde{f}$: $\tilde{E} \to \tilde{E}$ viene dado por $\tilde{f}(x,y) = (f(x), f(y))$ y el resultado se sigue de 5.4.

c) $\widetilde{E_1 \times E_2}$ se identifica a $\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_1$ y $\tilde{f}$ se identifica a $(p_1, p_2) \to (\tilde{f}_1(p_1), \tilde{f}_2(p_2))$; el resultado se sigue entonces de 5.4.

d) $\tilde{f}_1$ es una contracción y $\tilde{f}_2$ es una dilatación, entonces $\tilde{f}$ (ver 5.5) es de tipo (h_o).

6.3. PROPOSICION. Sea $f \in H_1(E)$ de clase c^1, entonces existe una constante $k > 0$ tal que

$$\|(f'(x) - \lambda\tilde{I})u\| \geq k\|u\|$$

$$(x \in E, \quad u \in \tilde{E} \quad y \quad \lambda \in S^1.)$$

DEMOSTRACION. Sea $m = C(\tilde{f})^{-1}$ (ver 5.2) y pongamos $L = (\tilde{f})_{\#} - (-h)^*$, entonces $\| L(\alpha) - L(\alpha') \| \geq m \| \alpha - \alpha' \|$ $\forall \alpha, \alpha' \in C_b(\tilde{E})$, $(h \in U(\tilde{E}))$, o sea

$$\| \tilde{f}(I + \alpha) - \tilde{f}(\tilde{I} + \alpha') - (\alpha - \alpha') \circ (h) \| \geq m \| \alpha - \alpha' \| \quad (1).$$

Por otra parte, el teorema de Hann-Banach, permite identificar E un conjunto de la forma $R \times F$, para algún espacio de Banach E. Luego $\tilde{E}$ puede $\mathbb{C}$-identificarse a $\mathbb{C} \times \tilde{F}$; fijemos $\lambda \in S^1$ y definamos $h: \mathbb{C} \times \tilde{F} \to \mathbb{C} \times \tilde{F}$ por $h(z,y) = (\lambda z, y)$. Sea $\{\phi_n\}$ como en el lema 5.13 y para cada $n \geq 1$ sea $\delta_n: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\delta_n(0) = 1$ y $\delta_n(t) = 0$ si $t \geq \frac{2}{n}$. Fijemos p_o, $u \in \tilde{E}$ y sea α' = constante p_o, $\alpha_n(z,y) = \delta_n(\| y \|) \, \phi_n(z) u + p_o$, y razonando como en 5.11 y 4.6 podemos probar la existencia de $\mu_o \in \mathbb{C}$ con $|\mu_o| \leq 2$ $(\mu_o = \mu_o(\gamma_o, u))$ tal que

$$\| \int_o^1 (f) \, (p_o + t \, \mu_o \, u) \mu_o \, u \, dt - \mu_o \, \lambda \, u \| \geq m \| u \| \qquad (2)$$

Sean $u \in \tilde{E}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tales que $\| u \| = 1$ y $\varepsilon \neq 0$, entonces existe $\mu_o = \mu_o(p_o, u, \varepsilon) \in \mathbb{C}$ con $|\mu_o| \leq 2$ tal que

$$\| \int_o^1 (\tilde{f})'(p_o + \varepsilon t \, \mu_o \, u) \mu_o \, u - \mu_o \, \lambda \, u \| \geq m \qquad (3)$$

Sea $\varepsilon_n \neq 0$ con $\varepsilon_n \to 0$ tal que $\mu_o(p_o, u, \varepsilon_n)$ es convergente a un elemento $\mu_o \in ₵$, entonces (3) da

$$\| (\tilde{f})'(p_o)\mu_o \ddot{u} - \mu_o \lambda u\| \geq m \qquad (3)$$

Si $p_o = (x_o, x_o) \in \Delta(E)$ entonces $(\tilde{f})'(p_o) = \tilde{f}'(x_o)$ es ₵-lineal; de aquí $(\tilde{f})'(p_o)\mu_o u = \mu_o(\tilde{f})'(p_o)u$ y en consecuencia

$$\| (f)'(p_o)\mu_o u - \mu_o \lambda u\| \leq 2\sqrt{2} \| (\tilde{f}'(x_o) - \lambda\tilde{I})u\|$$

el resultado se sigue entonces tomando $k = \frac{m}{2\sqrt{2}}$.

6.4. <u>COROLARIO</u>. Sea $f \in H_1(E)$ de clase c^1 entonces $\cup\{\sigma(L) : L \in \overline{f'(E)}\}$ está contenido en $₵- S^1$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $L(\tilde{E})$ el espacio de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales continuas de $\tilde{E}$ en si mismo y sea $\phi: E \times S^1 \to L(\tilde{E})$ definida por $\phi(x,\lambda) = \widetilde{f'}(x) - \lambda\tilde{I}$. Por 6.2 sabemos que existe $k > 0$ tal que $\| \phi(p)u\| \geq m\| u\|$ $(p \in E \times S^1, \quad u \in E)$. Sea $A = \{p \in E \times S^1: \phi(p) \text{ es invertible}\}$, ya que ϕ es continua se tiene que A es un abierto de $E \times S^1$ el cual, por 5.9 es no vacío. (De hecho $A \supset E \times \{1\}$) . Si $\{p_n\}$ es una sucesión en A tal que $p_n \to p \in E \times S^1$, se sigue de 3.6 que $p \in A$, luego A es cerrado en $E \times S^1$, en consecuencia $A = E \times S^1$. Si $f'(x_n) \to L$

entonces $\phi(x_n,\lambda) \to \tilde{L} - \lambda \tilde{I}$ y de 3.6 se sigue que $\tilde{L} - \lambda \tilde{I}$ es invertible lo cual da fin a la demostración.

B I B L I O G R A F I A

[1] Bachman G.Y. Narici L. "Functional Analysis". Academic Press International Edition. New York 1966.

[2] Coddington E.and Levinson N. "Theory of Ordinary Differential Equations". N.Y. Mac Graw-Hill 1955.

[3] Dieudonné J. "Fundamentos de Análisis Moderno". Editorial Reverté S.A. España 1966.

[4] Hadamard. "Sur les transformations Ponctuelles" Soc. Math. France 34 (1906) Pags 71-84.

[5] Nitecki J. "Differentiable Dynamics". The Mit Press--Cambridge, Massachusetts and London England 1971.

[6] Nusbaum R. "Degree Theory for Local Condensing Maps". Journal of Math Anal and App. 37, 741-766 (1972)

[7] Quijada O. "Teorema de la Aplicación Fija y Aplicaciones". Tesis de grado, Depto. Mat. U.L.A. 1976 .

[8] Rheimboldt W. "Local Mapping Relations and Global Implicit Function Theorems". Trans. Aner. Math. Soc. Vol 138; pags 183-198 (1969)

[9] Riesz and Nagy.