JESUS RIVERO

"SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE"

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 1

"SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE"

POR

JESUS RIVERO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA
1975

Je remercie vivement Monsieur Vaillant de son aide essentielle pour la réalisation de ce travail, ainsi que pour toutes les attentions qu'il a eu à mon égard pendant mon séjour d'études en France.

Je remercie Monsieur Pouzet et Monsieur Rogalski d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Mademoiselle Carmen I. Ochoa Torres qui a dactylographié ce travail ainsi que tous ceux qui ont participé à sa réalisation.

INTRODUCTION

Dans ce travail nous étudierons des systèmes fortement hyperboliques à coéfficients constants avec des caractéristiques dont la multiplicité varie. Nous déterminerons les équations de propagation des coefficients des séries formelles oscillatoires à phase singulière correspondant à des systèmes fortement hyperboliques avec un point multiple sur le cône normal caractéristique.

Le cas d'un point double avait été traité par LUDWIG et GRANOFF [15] pour un système du premier ordre à quatre variables avec des hypothèses surabondantes. Dans [13] VAILLANT utilise seulement des hypothèses d'hyperbolicité et considère des systèmes d'un ordre quelconque. Nous généralisons ici au cas d'un point de multiplicité quelconque.

Les équations de propagation ne sont plus, comme dans le cas des systèmes fortement hyperboliques à multiplicité localement constante, des équations différentielles ordinaires mais des systèmes d'équations aux dérivées partielles de premier ordre qui sont aussi fortement hyperboliques.

Enfin nous donnons une généralisation du théorème de la localisation de ATIYAT, BOTT et GÅRDING [1] aux cas des systèmes. Cette généralisation est liée aux calculs des termes du développement asymptotique.

Cette thèse a été résumée sous forme d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [14].

HYPERBOLICITE FORTE

a) Généralités.-

Soit $P(\xi)$ un polynôme complexe de degré t à coefficients constants dans les variables $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Nous dénoterons par $P(D)$ l'opérateur différentiel associé. Le polynôme homogène formé par les termes de degré t de $P(\xi)$, c'est-à-dire, sa partie principale, sera dénoté par $P_t(\xi)$.

Soit $N \in R^{n+1}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

1) $P_t(\xi) \neq 0$ et il existe $\tau_o \in R$ tel que $P(\xi+i\tau N) \neq 0$ pour $\xi \in R^{n+1}$ et $|\tau| > \tau_o$.

2) Il existe une distribution à support dans un cône K ayant son sommet à l'origine avec $K - \{0\} \quad \{x : \langle x,N\rangle > 0\}$ et tel que

$$P(D)\, E = \delta$$

où δ est la mesure de Dirac.

3) Le problème de Cauchy à données sur $H = \{\langle x,N\rangle = 0\}$ est bien posé dans C^∞ pour $P(D)$.

Définition.- Un opérateur qui satisfait une de ces trois conditions est un opérateur hyperbolique par rapport à N.

Exemples.- Les polynômes hyperboliques de degré zéro sont les constantes non nulles.

Un polynôme $b_o \xi_o + \ldots + b_n \xi_n$ est hyperbolique par rapport à N si et seulement si $\langle b,N\rangle \neq 0$.

Le polynôme quadratique $P(\xi) = \xi_o^2 - b_1 \xi_1^2 - \ldots - b_n \xi_n^2$. est hyperbolique par rapport à $N = (1, 0,\ldots,0)$ si et seulement si $b_1,\ldots b_n \geq 0$.

Dans le cas des polynômes homogènes la condition d'hyperbolicité se simplifie: un polynôme homogène P est hyperbolique par rapport à N si et seulement si l'équation $P(\xi+\tau N) = 0$ n'a que des racines réelles, pour tout - réel $\xi \in R^{n+1}$.

La partie principale d'un polynôme hyperbolique est hyperbolique. La réciproque de cette proposition n'est pas vraie.

Les deux conditions suivantes sont suffisantes pour l'hyperbolicité:

1) (Hörmander). Pour que P soit hyperbolique, il suffit que P_m soit hyperbolique et que $P < P_t$ (P plus faible que P_t), c'est-à-dire,

$$|P(\xi)| < C |\tilde{P}_t(\xi)|, \forall \xi \in R^{n+1}$$

où
$$\tilde{P}(\xi)^2 = \sum_{|\alpha|\geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2$$

2) (Gärding). Pour que P soit hyperbolique, il suffit que P_m soit hyperbolique et que les zéros en σ de $P(\sigma(\tau N+i\xi))$ tendent vers zéro uniformément par rapport à ξ quand τ tend vers l'infini.

Svensson démontre dans [9] que la deuxième condition est nécessaire et qu'elle est équivalente a la première.

<u>Définition</u>.- Un cône normal caractéristique est défini par $P_t(\xi) = 0$. Si $\xi \neq 0$ est un élément de ce cône, ξ est un covecteur caractéristique. ξ est simplement caractéristique si $\sum_j \left|\frac{\partial P_t(\xi)}{\partial P_j}\right| \neq 0$.

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que tout polynôme P ayant pour partie principale P_t soit hyperbolique par rapport à N :

a) P_t est hyperbolique par rapport à N et les caractéristiques réelles sont simples.

b) $P_t(N) \neq 0$ et $P_t(\xi+\tau N)$ a ses racines réelles et simples pour tout ξ non proportionnel à N.

<u>Définition</u>.- Si une de ces conditions est satisfaite, P est dit strictement hyperbolique.

Soit maintenant $(h^A_B(\xi))$ une matrice $m \times m$ formée de polynômes de degré t dans les variables $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Nous dirions que l'opérateur $(h^A_B(D))$ est hyperbolique par rapport à N, si et seulement si il a une solution fondamentale à support dans un cône K, ayant son sommet à l'origine et tel que $K - \{0\} \subset \{\langle x,N\rangle > 0\}$, c'est-à-dire; s'il existe une matrice $E = (E^A_B)$ où les E^A_B sont des distributions à support dans K, telle que (1)

$$h^A_B(D) * E^B = \delta I^A_C .$$

Soit (H^A_B) la matrice formée par les parties principales de degré t de (h^A_B). C'est une matrice dont le déterminant est homogène. Dans le suite nous supposerons

---

(1) On emploie constamment le convention de sommation.

$$\det(H_B^A(\xi)) \neq 0 \qquad (*)$$

condition que nous noterons $(*)$. On appelle cette matrice la matrice caractéristique de $(h_B^A(\xi))$.

<u>Définition</u>.- Nous disons que $(h_B^A(\xi))$ est fortement hyperbolique si pour tout opérateur $R_B^A(D)$ formé d'éléments de degré inférieur à t; l'opérateur $(h_B^A + R_B^A)\ (D)$ est hyperbolique.

L'hyperbolicité forte de $(h_B^A(\xi))$ équivaut à l'hyperbolicité forte de $(H_B^A(\xi))$.

Dans la suite nous parlerons indifféremment d'opérateur $(h_B^A(D))$ fortement hyperbolique ou de matrice $(h_B^A(\xi))$ fortement hyperbolique.

On voit que la notion d'hyperbolicité forte pour les systèmes - correspond à celle d'hyperbolicité stricte dans le cas d'une seule équation.

Pour qu'une matrice $(h_B^A(\xi))$ soit hyperbolique, il faut et il suffit que $\det(h_B^A(\xi)) = h(\xi)$ soit hyperbolique. Par contre, il n'est pas nécessaire pour que $(h_B^A(\xi))$ soit fortement hyperbolique, que $\det(h_B^A(\xi))$ soit strictement hyperbolique. Il existe des systèmes fortement hyperboliques à caractéristiques multiples.

Des conditions nécessaires et suffisantes d'hyperbolicité forte ont d'abord été données par Kasahara et Yamaguti [5] pour des systèmes du type

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_i} u_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\substack{|\alpha|\leq n_j \\ \alpha_o<n_j}} a_{ij}^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_1} \cdots\cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u_j(x,t)$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \; ; \quad 1 \leq j \leq m, \; n_i > o, \; \forall\, i.$$

Svensson [9] a donné des conditions suffisantes et des conditions nécessaires d'hyperbolicité forte pour des systèmes avec les ordres de Volevic. Cependant, comme nous travaillerons avec des matrices qui vérifient la condition (*) p. 4, les conditions de Svensson deviennent des conditions nécessaires et suffisantes.

(Svensson). On considère la matrice caractéristique $(H_B^A(\xi))$ de la matrice $(h_B^A(\xi))$.

Pour que $(h_B^A(\xi))$ soit fortement hyperbolique par rapport à $N \in R^{n+1}$ il faut et il suffit que

$$(H_B^A)^{-1}\;(\xi+iN) = C_B^A(\xi)$$

existe pour $\xi \in R^{n+1}$ et qu'il existe C tel que

$$|C_B^A(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{1-t}$$

Dans [12] Vaillant utilise les conditions de Kasahara et Yamaguti et donne des conditions C_I, C_{II} suffisantes et des conditions C_I, C_{II}, nécessaires d'hyperbolicité forte pour les systèmes qui vérifient la condition (*) p. 4.

Les conditions (C) expriment que:

C_I : chaque forme réduite de la matrice caractéristique, considéré comme matrice d'éléments de l'anneau localisé de l'anneau de polynômes par rapport à chaque idéal premier défini par un facteur irréductible du déterminant caractéristique, ne contient comme facteur invariant, que l'anneau lui-même ou l'idéal maximal de l'anneau localisé.

C_{II}: le radical de l'idéal caractéristique est engendré par un - polynôme strictement hyperbolique.

$C_{II'}$: le radical de l'idéal caractéristique est engendrá par un - polynôme hyperbolique.

b) Localisation algébrique [11].-

Soit $R[\ell_\alpha]$ l'anneau de polynomes des variables $\ell_o, \ell_1, \ldots, \ell_n$ sur R. Cet anneau de polynômes est factoriel. Donc $\det(H_B^A) = H$ se décompose de façon unique, à un facteur constant différent de zéro près, en un poruit de facteurs irréductibles de $R[\ell_\alpha]$.

Nous supposerons que

$$H = (H')^{\nu} \, . \, H''$$

où ν est un entier appelé multiplicité de H.

On considère l'anneau localisé de $R[\ell_\alpha]$ par rapport a l'idéal premier défini par H', cet anneau sera noté Φ' : les éléments de Φ sont les fractions du corps de fractions de $R[\ell_\alpha]$ qui sont telles que leur dénominateur n'appartienne pas à l'idéal défini par H'. Si $\frac{Q_1}{Q_2}$ est un élément non nul de Φ on décompose son numérateur en produit d'éléments irréductibles; soit $\nu(\frac{Q_1}{Q_2})$ l'exposant de H' dans cette décomposition; on appellera la valuation de $\frac{Q_1}{Q_2}$; on a évidemment:

$$\nu\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \geq 0$$

L'anneau Φ est un anneau de valuation discrète, ses idéaux sont de la forme $\Phi(H')^\chi$ où χ est un entier positif: Φ est donc un anneau principal.

Comme Φ est principal la matrice (H_B^A), considérée comme matrice d'éléments de Φ est équivalente à une matrice diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} (H')^{q_1} & & & \\ & (H')^{q_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (H')^{q_m} \end{pmatrix}$$

avec $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m \geq 0$.

Les éléments de la diagonale définissent les facteurs invariants de la matrice.

Supposons que (H_B^A) vérifie la condition C_1 de [12]. Nous avons donc:

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} H' & & & & & & & \\ & H' & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & H' & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

dans l'anneau Φ. Donc H' a la multiplicité $\nu = k$.

Soit $\Psi_1 = \Phi/H'$, le quotient de l'anneau Φ par l'idéal (H'), - quotient qui est un corps. (H_B^A) définit canoniquement une matrice d'éléments de Ψ_1, qui est équivalente à la matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(H^A_B) définit ainsi un endomorphisme de $(\Psi_1)^m$; son noyau est de dimension k et l'on désignera par $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{d}_D, \ldots, \tilde{d}_k)$ une base de ce noyau. On choisira des représentants des vecteurs $\tilde{d}_D$ dans Φ^m. Ils forment la famille $d_1, d_2, \ldots, d_D, \ldots, d_k$ et seront tels que

$$H^A_B \ d^B_D = 0 \pmod{H'}$$

ou bien tels que

$$H^A_B \ d^B_D = H' \ \sigma^A_D$$

Les éléments σ_D appartiennent à Φ^m; la famille $(d_{D'})$ autrement dit est définie à la transformation suivante près:

$$d^B_{D'} \longrightarrow \lambda^D_{D'}\, d^B_D + \mu^B_{D'}\, H'$$

où la matrice $(\lambda^D_{D'})$ est inversible dans Φ et $\mu_{D'}$ appartient à Φ^m.

De même, on pourra considérer des familles (g^F) tels que

$$g^F_A \cdot H^A_B \equiv 0 \pmod{H'}$$

ou bien tels que:

$$g^F_A \; H^A_B = H' \,\mathcal{P}^F_B$$

Nous allons construire des familles (δ_D), (γ^F) de vecteurs particuliers (d_D), (g^F), respectivement, de sorte que leurs composantes soient des polynômes homogènes en ℓ_α obtenus à l'aide des nineurs de (H^A_B).

Pour cela nous utiliserons des résultats de [11]. On convient de noter A^{DEF}_{ABC} le cofacteur de $H^A_B\, H^B_E\, H^C_F$ dans le développement de (H^A_B); ce cofacteur correspond au mineur obtenu en rayant les $A^{\text{ième}}$, $B^{\text{ième}}$ et $C^{\text{ième}}$ lignes de (H^A_B), ainsi que les $D^{\text{ième}}$, $E^{\text{ième}}$ et $F^{\text{ième}}$ colonnes; on utilise des notations analogues pour les cofacteurs ayant un plus grand nombre d'indices.

Convenons qu'un indice surbarré varie de 1 à k: $1 \leq \bar{A} \leq k$ et que un indice chapeauté varie de $k + 1$ à m: $(k+1) \leq \hat{C} \leq m$. Posons alors:

$$\delta^{\bar{B}}_{\bar{D}} = 0 \text{ si } \bar{B} \neq \bar{D}, \quad \delta^{\bar{D}}_{\bar{D}} = A, \quad \delta^{\hat{C}}_{\bar{D}} = A^{12\ldots(\bar{D}-1)\;\hat{C}\;(\bar{D}+1)\;\ldots\;k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}$$

Calculons $H_B^{\bar{E}}\ \delta_{\bar{D}}^B$:

$$H_B^{\bar{E}}\ \delta_{\bar{D}}^B = H_{\bar{F}}^{\bar{E}}\ \delta_{\bar{D}}^{\bar{F}} + H_{\hat{F}}^{\bar{E}}\ \delta_{\bar{D}}^{\hat{F}} \quad \text{(voir formules de [10], [11])}$$

$$= 0 + H_{\hat{G}}^{\bar{E}}\ A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}^{12\ldots(\bar{D}-1)\ \hat{G}\ (\bar{D}+1)\ldots k}$$

$$= (-1)^{\bar{E}+\bar{D}}\ A_{12\ldots(\bar{E}-1)\ (E+1)\ \ldots\ k}^{12\ldots(\bar{D}-1)\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k} = \mathcal{A}_{\bar{D}}^{\bar{E}}\ H'$$

Nous avons aussi:

$$H_B^{\hat{C}}\ \delta_{\bar{D}}^B = H_{\bar{B}}^{\hat{C}}\ \delta_{\bar{D}}^B + H_{\hat{B}}^{\hat{C}}\ \delta_{\bar{D}}^{\hat{B}}$$

$$= 0 + H_{\hat{G}}^{\hat{C}}\ A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}^{12\ldots(\bar{D}-1)\ \hat{G}\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k} = 0$$

Le fait que $A_{12\ldots(\bar{E}-1)\ (\bar{E}+1)\ \ldots\ k}^{12\ldots(\bar{D}-1)\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k}$ soit divisible par H' résulte de la conditions C_1. $\mathcal{A}_{\bar{D}}^{\bar{E}}$ est défini par l'égalité précédente. On a donc:

$$H_B^A\ \delta_{\bar{D}}^B = 0 \quad (\text{mod}\ \ H')$$

On construit aussi une famille $(\gamma^{\bar{F}})_{1\leq\bar{F}\leq k}$ en posant

$$\gamma_{\bar{A}}^{\bar{F}} = 0 \ \text{ si } \ \bar{A} \neq \bar{F}, \quad \gamma_{\bar{F}}^{\bar{F}} = A, \quad \gamma_{\hat{G}}^{\bar{F}} = A_{12\ldots(\bar{F}-1)\ \hat{G}\ (\bar{F}+1)\ \ldots\ k}^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}$$

On vérifie de la même facon qu'avec les $(\delta_{\bar{D}})$ que

$$\gamma_A^{\bar{F}}\ \ H_B^A \equiv 0 \quad (\text{mod}\ \ H')$$

Donc les $(\gamma^{\bar{F}})$ jouent le même rôle que les $(\delta_{\bar{D}})$ relativement à la matrice transposée de la matrice caractéristique.

On aura besoin d'étudier la matrice d'éléments

$$\gamma^{\bar{F}} \quad H^A_B \quad \delta^B_{\bar{D}} = H' \mathcal{Q}^{\bar{E}}_{\bar{D}} \quad \gamma^{\bar{F}}_{\bar{E}} = H' \quad A\mathcal{Q}^{\bar{F}}_{\bar{D}} \ ,$$

ou plus précisément la divisibilité par H' du déterminant de la matrice $k \times k$ d'élément général

$$\frac{H^A_B \quad \delta^B_{\bar{D}} \quad \gamma^{\bar{F}}_A}{H'} = A\mathcal{Q}^{\bar{F}}_{\bar{D}}$$

On a
$$\det(A\mathcal{Q}^{\bar{F}}_{\bar{D}}) = A^k \quad \det(\mathcal{Q}^{\bar{F}}_{\bar{D}})$$

Or il résulte de l'identité suivante [16] p. 115 :

$$H\ A^{k-1} = \det(A^{12\ldots(\bar{D}-1)\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k}_{12\ldots(\bar{C}-1)\ (\bar{C}+1)\ \ldots\ k})$$

que
$$\det(\mathcal{Q}^{\bar{F}}_{\bar{D}}) = H''\ A^{k-1}$$

Le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{H^A_B \quad \delta^B_{\bar{D}} \quad \gamma^{\bar{F}}_A}{H'} \right)$$

n'est donc pas divisible par H'.

Avec des familles $(g^{\bar F})$ et $(d_{\bar D})$, on est conduit à étudier la matrice des

$$g^{\bar F}_{A}\ H^{A}_{B}\ d^{B}_{\bar D} = H' \quad \sigma^{A}_{\bar D}\ g^{\bar F}_{A} = H' \quad \rho^{\bar F}_{B}\ d^{B}_{\bar D}$$

ou plus précisément la valuation du déterminant de la matrice k x k d'élément général

$$\mathcal{H}^{\bar F}_{\bar D} = \sigma^{A}_{\bar D}\ g^{\bar F}_{A} = \rho^{\bar F}_{B}\ d^{B}_{\bar D} \ : \quad \det \mathcal{H}^{F}_{\bar D} = \mathcal{H}$$

Le fait que $\nu(\mathcal{H}) > 0$ ou $\nu(\mathcal{H}) = 0$ est indépendant du choix de la famille $(d_{\bar D})$ à une transformation près, de même que pour les $(g^{\bar F})$; cela - résulte de la définition de $\mathcal{H}^{\bar F}_{\bar D}$. Les résultats obtenus avec la famille $(\delta_{\bar D})$ et la famille $(\gamma^{\bar F})$ montrent donc que $\nu(\mathcal{H}) = 0$.

Supposons maintenant que (H^{A}_{B}) vérifie aussi la condition C_{II} de Vaillant.

Si $p = (p_o, p_i)$, est une racine simple de $H'(\ell_o, p_i)$ p_o n'est pas racine de $H''(\ell_o, p_i)$, p_o est donc racine multiple de multiplicité k de

$$H(\ell_o, p_i) = \det(H^{A}_{B}(\ell_o, p_i)) = 0$$

On a donc $$H = (\ell_o - p_o)^{k}(\ldots)$$

la deuxième parenthèse n'est pas divisible par $\ell_o - p_o$.

Dans le localisé de $R[\ell_o]$ par rapport à l'idéal défini par $(\ell_o - p_o)$

$$H_B^A(\ell_o, p_i) \sim \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} (\ell_o - p_o)^\chi & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right| k' \leq k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

et par suite, dans R

$$H_B^A(p) \sim \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right| k' \leq k \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Il existe donc au moins un mineur d'ordre m-k, soit $A^{12\ldots k}_{12\ldots k} = A$ tel que $A(p_o, p_i) \neq 0$. Compte tenu de C_1 on a en fait dans R:

$$
H_B^A(p) \sim \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

et les $(\delta_{\bar{D}})$ constituent une base de noyau de $H_B^A(p)$.

Les théorèmes suivants se trouvent dans [12] :

<u>Théorème</u> 1.- Les conditions C_I et C_{II} sont des conditions nécessaires et suffisantes d'hyperbolicité forte pour des systèmes à coefficients constants avec des caractéristiques à multiplicité localement constante.

<u>Théorème</u> 2.- Les conditions C_I et C_{II} sont des conditions suffisantes d'hyperbolicité au sens de Leray-Ohya [7] pour des systèmes à coefficients variables.

c) <u>Localisation au sens de Atiyah, Bott et Gårding et solutions fondamentales d'une équation</u> [1].-

<u>Définition</u>.- Soit $P(\xi)$ un polynôme de degré $m \geq 0$. Considérons le développement en puissances croissantes de t de $t^m P(t^{-1}\xi+\zeta).\zeta \in R^{n+1}$. On obtient:

$$t^m P(t^{-1}\xi+\zeta) = t^p P_\xi(\zeta) + 0(t^{p+1}) \qquad (1)$$

ou $P_\xi(\zeta)$ est le premier coefficient non identiquement nul en ζ. On appelle multiplicité de P relative à ξ le nombre $p = m_\xi(P)$ et localisé de P en ξ le polynôme $P_\xi(\zeta)$.

Si $P = P_o + P_1 + \ldots + P_m$ est une décomposition de P en parties homogènes, $P_k(\lambda\xi) = \lambda^k P_k(\xi)$, donc (1) s'écrit aussi:

$$\sum_{k\geq 0} t^{m-k} P_k(\xi+t\zeta) = t^p P_\xi(\zeta) + 0(t^{p+1})$$

En particulier, si P est homogène nous avons:

$$P(\xi+t\zeta) = t^p P_\xi(\zeta) + 0(t^{p+1})$$

Soient P et Q deux polynômes non nuls. Donc on vérifie facilement

$$m_\xi(P.Q) = m_\xi(P) + m_\xi(Q)$$

$$(PQ)_\xi(\zeta) = P_\xi(\zeta)\, Q_\xi(\zeta).$$

La notion de localisé s'étend aussi aux fonctions rationnelles $f = Q/P$, non nulles

$$t^m f(t^{-1}\xi+\zeta) = t^p f_\xi(\zeta) + 0(t^{p+1})$$

Ici le membre droit est une série formelle de puissances en t avec des coefficients qui sont des fonctions rationnelles de ζ. Le localisé f_ξ

est le premier coefficient non nul, $m = m(f) = m(Q) - m(P)$ c'est le degré de f et $p = m_\xi(f)$ est la multiplicité de f relative à ξ.

On a

$$f_\xi = \frac{Q_\xi}{P_\xi} \quad \text{et} \quad m_\xi(f) = m_\xi(Q) - m_\xi(P).$$

<u>Exemples</u>.- Soit P_m la partie principale de P. Si $\xi = 0$ donc :

$$t^m P(t^{-1}\xi+\zeta) = t^m P(\zeta) + 0(t^{m+1})$$

et le localisé de P en 0 est égal à $P(\xi)$. Soit maintenant $\xi \neq 0$ et $P_m(\xi) \neq 0$, donc :

$$t^m P(t^{-1}\xi+\zeta) = \Sigma t^{m-k} P_k\ (\xi+t\zeta)$$

$$= t^m P_m\ (\xi) + 0(t^{m+1})$$

et $P_\xi(\zeta) = P_m(\zeta)$.

Si $P_m(\xi) = 0$ mais grad $P_m(\xi) \neq 0$, donc :

$$P_\xi(\zeta) = \text{grad } P_m(\xi).\ \ \zeta + \text{const}$$

c'est-à-dire, un polynôme de degré 1.

Si P est homogène, donc $P_\xi(\zeta) = 0$ définit le cône tangent K_ξ de K : $P\ (\zeta) = 0$ en ξ.

La proposition suivante montre que la localisation préserve l'hyperbolicité.

<u>Proposition</u> [1].- Soit P hyperbolique par rapport à N et soit $\xi \in R^{n+1}$. Donc :

i) $m_\xi(P) = m_\xi(P_m)$

ii) P_{m_ξ} est la partie principale de P_ξ.

iii) P_ξ et P_{m_ξ} sont hyperboliques par rapport à N.

Nous allons énoncer des théorèmes qui lient les solutions fondamentales des opérateurs hyperboliques et de ses localisés.

Soit $P(D)$ un opérateur hyperbolique par rapport à $N = (1,0,\ldots,0)$ et P_m sa partie principale. On dénote par $\Gamma(P,N)$ l'ensemble des $\xi \in R^{n+1}$ tels que le polynôme $P_m(\xi+\tau N)$ a seulement des zéros négatifs τ.

On démontre que $\Gamma(P,N)$ est un cône convexe et que P est hyperbolique par rapport à tout $\theta \in \Gamma(P,N)$. De plus, la solution fondamentale E de P ayant son support dans le demi-espace H :

$$H = \{x \; ; \; \langle x,N\rangle \geq 0\}$$

a son support contenu dans

$$\Gamma^*(P,N) = \{x \; ; \; \langle x,\theta\rangle \geq 0, \; \theta \in \Gamma(P,N)\}$$

qui est le cône dual de $\Gamma(P,N)$.

Cette solution s'exprime de la forme suivante :

$$(E,\check{g}) = (2\pi)^{-n} \int P(\xi+i\eta)^{-1} \, Fg(\xi+i\eta)d\xi, \quad g \in C_o^\infty \qquad (2)$$

où $\eta \in - sN - \Gamma(P,N)$ avec s suffisamment grand.

Soit P_ξ le localisé de P au point ξ. On sait par la proposition que P_ξ est hyperbolique par rapport à N. Nous noterons par E_ξ la solution fondamentale correspondante.

Le théorème suivant montre que E_ξ, dans un certain sens, est la "localisée" de E.

<u>Théorème de la localisation</u> 1.- [1] Soit P hyperbolique par rapport à N, degré $P \leq t$. Soit $p = m_\xi(P)$ la multiplicité de ξ relative à P. Alors:

$$u^{m-p} e^{-iux.\xi} E \text{ converge vers } E_\xi, \quad u \in R, \qquad (3)$$

quand u tend vers l'infini, dans le sens des distributions.
Pour $\xi \neq 0$

$$\text{support } (E_\xi) \subset \text{support singulier } (E)$$

Nous donnerons la démonstration de ce théorème. Por cela nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme [1].- Soit P hyperbolique par rapport à N; $p = m_\xi(P)$ $\xi \in R^{n+1}$ et soit s_o tel que $P(\eta+sN) \neq 0$ pour $|Ims| > s_o$. Donc, il existe des nombres positifs C et M, que dépendent seulement de s et ξ tels que, si ζ est réel,

i) $0 \leq u \leq 1$, $|Ims| > s_o$ implique $|u^{m-p}P(u^{-1}\xi+\zeta+sN)| \geq C(1+|\zeta|)^{-M}$

ii) $u^{m-p}P(u^{-1}\xi+\zeta+sN)$ converge vers $P_\xi(\zeta+sN)$ quand u tend vers zéro.

Démostration du théorème.- Soit ζ une nouvelle variable d'intégration dans (2); nous avons :

$$(E_u,\check{g}) = (e^{-iux.\xi}, \check{g}) = (2\eta)^{-n} \int P(u\xi+\zeta+i\eta)^{-1} \quad Fg(\zeta+i\eta) \quad d\zeta$$

Donc
$$(u^{m-p} E_u,\check{g}) = (2\pi)^{-n} \int \left[u^{p-m}P(u\xi+\zeta+i\eta)\right]^{-1} \quad Fg(\zeta+i\eta) \quad d\zeta \qquad (4)$$

Si on prend $\eta = -sN$ avec s négatif et suffisamment grand, on voit en utilisant le lemme que le membre droit de (3) converge vers :

$$(2\eta)^{-n} \int P_\xi(\zeta+i\eta)^{-1} \quad Fg(\zeta+i\eta) \quad d\zeta = (E_\xi,\check{g})$$

Ceci démontre (3). Maintenant soit V le complémentaire du support singulier de E. Si $g \in C_o^\infty(V)$ et $\xi \neq 0$, l'intégrale

$$\int u^{m-p}.e^{-iux.\xi} \, E(x) \; g(x) \quad dx$$

converge vers zéro quand u tend vers l'infini. Donc support (E_ξ) est contenu dans le complémentaire de V.

<u>Remarque</u>.- On voit tout de suite que

$$\text{support singulier } (E) \,\partial_{\xi\neq 0}\; \text{support } (E_\xi)$$

Si on applique ce théorème de localisation aux dérivées de la solution fondamentale, on obtient :

<u>Théorème de la localisation</u> 1'.- |1| Soit E la solution fondamentale correspondante à P, hyperbolique par rapport à N, soit Q un polynôme. Posons

$$F = Q(D)\ E,\quad F_\xi = Q_\xi(D)\ E_\xi$$

ξ réel. Soit $m(f) = m(Q) - m(P)$ le degré de $f = P/Q$ et $m_\xi(f) = m_\xi(Q) - m_\xi(P)$ la multiplicité de f relative à ξ. Donc

$$u^{m_\xi(f) - m(f)}\ e^{-iux.\xi}\ F \text{ converge vers } F_\xi,\quad u \in R$$

quand u tend vers l'infini, dans le sens des distributions. Si $\xi \neq 0$ donc :

$$\text{support } (F_\xi) \qquad \text{support singulier } (F)$$

Soit maintenant $(h^A_B(D))$ un opérateur différentiel matriciel hyperbolique par rapport à N. Si E est une solution fondamentale correspondante à l'opérateur $(\det h^A_B)\ (D) = h(D)$, la matrice

$$(\ {}^{B}_{A}(D))\ E$$

où $(\ {}^{B}_{A}(\xi))$ est la matrice de cofacteurs de $(h^A_B(\xi))$, est une solution fondamentale correspondante a l'opérateur $(h^A_B(D))$.

SERIES FORMELLES OSCILLATOIRES ET LOCALISATION AU SENS ATIYAH, BOTT ET GARDING

Soit $Y(x)$ une distribution tempérée, par exemple. F la transformation de Fourier dans S :

$$F(\phi)\ (\zeta) = \int e^{-i<\zeta,x>}\ \phi(x)\ dx$$

Si nous appliquons la transformation de Fourier à l'expression :

$$e^{-i\omega<\xi,x>}\ h(D)\ (e^{i\omega<\xi,x>}\ Y(x)) \qquad \omega = \frac{1}{r}$$

On obtient $F\{e^{-i\omega<x,\xi>}\ h(D)\ \left[e^{i\omega<x,\xi>}\ Y(x)\right]\} = h(\zeta+\xi\omega)\ (FY)\ (\zeta)$

qui résume la transformation de Fourier entre la série formelle

$$\{e^{-i\omega<\xi,x>}\ h(D)\ \left[e^{i\omega<x\xi>}\ (Y_{\xi_o}(x) + \frac{1}{\omega} Y_{\xi_1}(x) + \dots)\right\}$$

et la série

$$h(\zeta+\frac{\xi}{r})\ \left[(FY_{\xi_o})\ (\zeta) + r(FY_{\xi_1})\ (\zeta) + \dots + \right]$$

Maintenant si nous développons le facteur de $FY_{\xi_t}\ (\zeta)$

$$r^t\ h(\zeta+\frac{\xi}{r})$$

en puissances croissantes de r :

$$r^t h(\zeta + \frac{\xi}{r}) = r^k\ h_\xi(\zeta) + 0(r^{k+1})$$

nous obtenons le localisé $h_\xi(\zeta)$ de h en ξ.

EQUATIONS DE PROPAGATION POUR DES CARACTERISTIQUES A MULTIPLICITE CONSTANTE

On considère un opérateur différentiel matriciel linéaire $(h^A_B(x,D))$ à coefficients C^∞ où chaque $h^A_B(x,D)$ est de degré $\leq t$. On étudie le système carré d'équations aux dérivées partielles homogènes correspondant :

$$h^A_B(x,D)\ y^B(x) = 0 \qquad (1)$$

La matrice caractéristique $(H^A_B(x,D))$ est formé par des polynômes homogènes de degré t. On suppose que le déterminant de (H^A_B), H, n'est jamais le polynôme nul dans l'ouvert Ω où l'on se placera.

En chaque point x, H se décompose en facteurs irréductibles:

$$H = (H_1)^{\nu_1} \dots (H_s)^{\nu_s} \dots (H_\sigma)^{\nu_\sigma}$$

On suppose que chaque H_s est fonction C^∞ de x et que chaque multiplicité ν_s est constante sur Ω.

En chaque point x, on considère l'anneau localisé Φ_s de l'anneau des polynômes à $(n+1)$ variables $(\ell_o,\ell_1, \dots ,\ell_n)$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s. Pour chaque s, on a dans Φ_s :

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} (H_s)^{q_1(s)} & & & \\ & (H_s)^{q_2(s)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (H_s)^{q_m(s)} \end{bmatrix}$$

avec $q_1(s) \geq q_2(s) \geq \ldots \geq q_m(s)$.

Donc $\nu_s = q_1(s) + q_2(s) + \ldots + q_m(s)$

On suppose $q_1(s), q_2(s), \ldots, q_m(s)$ pour chaque s, constants sur Ω.

Supposons en tout point x de Ω, (h_B^A) vérifie les conditions (C) :

C_1 - Pour tout s, $1 \leq s \leq \sigma$

$$(H_B^A) \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} H_s & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & H_s & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \nu_s \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m$$

dans Φ_s.

$C_{11} - H_1 H_2 \dots H_s \dots H_\sigma$ est strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$.

Définition.- On appellera onde oscillatoire formelle dans un voisinage de a, une série formelle "oscillatoire" de la forme :

$$Y^B(x) = e^{i\omega\phi(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^B_{t+j}(x)}{(i\omega)^j}$$

ω est réel, ϕ est à valeurs réelles, indéfiniment différentiable, telle que $(\text{grad } \phi)(x) \neq 0$ dans le voisinage, et vérifie l'équation caractéristique : $H_s(x, \text{grad } \phi(x)) = 0$ et Y^B_{t+j} est indéfiniment différentiable dans le voisinage et telle qu'en reportant dans le système (1) la série formelle obtenue

$$e^{i\omega\phi(x)} \quad (i\omega)^t \left[F^A_o(x) + \frac{F^A_1(x)}{\omega} + \dots \right]$$

soit nulle, c'est-à-dire que chacun des coefficients $F^A_j(x)$ soit nul dans le voisinage considéré.

Supposons donc que h^A_B satisfait aux conditions (C) et étudions une telle onde.

On trouve que $F^A_o(x) = 0$ s'écrit :

$$H^A_B(x, \text{grad } \phi(x)) \quad Y^B_t(x) = 0 \qquad (2)$$

ϕ étant solution de l'équation caractéristique, on a

$$H(a, \text{grad } \phi(a)) = 0$$

d'où pour un certain s,

$$H_s(a, \text{ grad } \phi(a)) = 0$$

pour $s \neq s'$, $H_s(a, \text{ grad } \phi(a)) \neq 0$, d'après les hypothèses. Dans un voisinage convenable, on vérifie donc

$$H_s(x, \text{ grad } \phi(x)) = 0 \text{ et } H_{s'}(x, \text{ grad } \phi(x)) \neq 0.$$

On en déduit que Y_t^B est de la forme

$$Y_t^B(x) = U_t^{\bar{D}}(x) \ \delta_{\bar{D}}^B(x,p)$$

où l'on a posé $p = \text{grad } \phi$, $U_t^{\bar{D}}$ est C^∞; $1 \leq \bar{D} \leq \nu_s$, $\delta_{\bar{D}}^B$ étant une base du noyau de $H_B^A(x,p)$.

$F_1^A(x) \equiv 0$ s'écrit :

$$H_B^A(x,p) \ Y_{t+1}^B(x) + \partial^\alpha H_B^A(x,p) \ \partial_\alpha \ Y_t^B(x) + H_B^{*A}(x,p) \ Y_t^B(x) = 0,$$

où $(H_B^{*A}(x,p))$ est la partie homogène de degré $t-1$ de $(h_B^A(x,p))$, et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \ell^\alpha} \qquad \text{et} \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Multiplions par des vecteurs, analogues aux $\delta_{\bar{D}}^B(x,p)$, notés $\gamma_A^{\bar{F}}(x,p)$ et formant une base du noyau de l'application transposée de l'application linéaire $H_B^A(x,p)$; on obtient, en tenant compte de (2),

$$\gamma_A^{\bar F}(x,p)\ \partial^\alpha\ H_B^A(x,p)\ \partial_\alpha\left[U_t^{\bar D}(x)\quad \delta_{\bar D}^B(x,p)\right] + \gamma_A^{\bar F}(x,p)\ H_B^{*A}(x,p)\ \delta_{\bar D}^B(x,p)\ U_t^{\bar D}(x) = 0 \quad (3)$$

$$\gamma_A^{\bar F}(x,p)\ \partial^\alpha\ H_B^A(x,p)\ \partial_\alpha\left[U_t^{\bar D}(x)\quad \delta_{\bar D}^B(x,p)\right] = \gamma_A^{\bar F}(x,p)\,\partial^\alpha\,\mathcal{H}_B^A(x,p)\ \partial_\alpha\ U_t^{\bar D}(x)\quad \delta_{\bar D}^B(x,p)$$

$$+\ \gamma_A^{\bar F}(x,p)\ \partial^\alpha\ H_B^A(x,p)\ \partial_\alpha\delta_{\bar D}^B(x,p)\quad U_t^{\bar D}(x)$$

$$= \partial^\alpha\left[(\gamma_A^{\bar F}\ H_B^A\ \ \delta_{\bar D}^B)\ \ (x,p)\right]\ \partial_\alpha U_t^{\bar D}(x)$$

$$-\ \left[(\partial^\alpha\ \gamma_A^{\bar F}\ H_B^A\ \delta_{\bar D}^B)\ \ (x,p)\right]\ \partial_\alpha\ U_t^{\bar D}(x)$$

$$-\ \left[(\gamma_A^{\bar F}\ H_B^A\ \partial^\alpha\ \delta_{\bar D}^B)\ \ (x,p)\right]\ \partial_\alpha\ U_t^{\bar D}(x)$$

Mais nous avons

$$\gamma_A^{\bar F}\ H_B^A\ \delta_{\bar D}^B = \mathcal{H}_{\bar D}^{\bar F}\ H_s\ ,\quad H_B^A\ \delta_{\bar D}^B = H_s\ \sigma_{\bar D}^A\ ,\quad \gamma_A^{\bar F}\ H_B^A = H_s\ \rho_{\bar B}^{\bar F}$$

D'où puisque $H_s(p) = 0$:

$$\gamma_A^{\bar F}\ \partial^\alpha\ \ H_B^A\ \partial_\alpha\ \ U_t^{\bar D}\ \ \gamma_{\bar D}^B = \mathcal{H}_{\bar D}^{\bar F}\ \partial^\alpha\ H_s\ \partial_\alpha\ \ U_t^{\bar D}$$

Posons $\qquad \gamma_A^{\bar F}\ \partial^\alpha\ \ H_B^A\ \ \delta_{\bar D}^B\ U_t^{\bar D} + \gamma_A^{\bar F}\ \ H_B^{*A}\ \delta_D^B = M_{\bar D}^{\bar F}\ U_t^{\bar D}\ .$

Donc (3) devient : $\mathcal{H}_{\bar D}^{\bar F}(x,p)\quad \vec p^{\,\alpha}(x,)\ \partial_\alpha\ U_t^{\bar D}(x) + M_{\bar D}^{\bar F}(x,p)\quad U_t^{\bar D}(x) = 0$,

où $\dfrac{\partial H_s}{\partial \ell_\alpha}(x,p) = \vec p^{\,\alpha}(x,p)$ (vecteur bicaractéristique).

On a donc encore

$$\vec{p}^{\alpha}(x,p)\partial_{\alpha} U_t^{\bar{D}}(x) + M'^{\bar{D}}_{\bar{F}}(x,p) \quad U_t^{\bar{F}}(x) = 0$$

$U_t^{\bar{D}}$ est donc la solution C^{∞} de cette équation aux dérivées partielles. $U_t^{\bar{D}}$ est déterminée si on connait sa restriction sur $x_o = 0$.

On détermine de même tous les $U_{t+j}^{\bar{D}}$ et les Y_{t+j}^{B} par récurrence pourvu qu'on connaisse les restrictions des $U_{t+j}^{\bar{D}}$ sur $x_o = 0$.

Remarque.- Nous rappellerons brièvement l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$H_s(x, \ \text{grad}\,\phi(x)) = 0$$

H_s étant supposé strictement hyperbolique en a par rapport à $N = (1, 0, ..., 0)$. Soit $\psi(x^i)$ une fonction C^{∞} à valeurs réelles définie dans l'intersection d'un voisinage de a en $x_o = 0$ telle que grad $\psi(a) \neq 0$. Posons $(\text{grad}\,\psi)_i(a) = P_i(a)$; l'équation en ℓ_o : $H_s(a,\ell_o,p_i(a)) = 0$ a toutes ses racines réelles et simples. Soit p_o^{ρ} l'une d'elles. Un résultat classique [4] indique qu'il existe un voisinage de a tel que dans ce voisinage, il existe une solution et une seule $\phi^{\rho} \in C^{\infty}$ pour l'équation proposée, satisfaisant aux conditions initiales

$$\phi^{\rho}(o,x^i) = \psi(x^i), \ (\text{grad}\,\phi^{\rho})_o \ (a) = p_o^{\rho}(a).$$

Il en est de même pour chaque racine de $H_s(a\ell_o,p_i(a)) = 0$ et plus généralement pour chaque racine de

$$(H_1 \dots H_s \dots H_\sigma)\ (a, \ell_o, p^i(a)) = 0$$

On obtient donc, localement τ fonctions ϕ^ρ indéfiniment différentiables, satisfaisant a l'équation

$$(H_1 \dots H_s \dots H_\sigma)\ (x,\ \mathrm{grad}\ \phi^\rho(x)) = 0,$$

talles que

$$\phi^\rho(o, x^i) = \psi(x^i), \quad (\mathrm{grad}\ \phi^\rho)_o\ (a) = p_o^\rho(a).$$

EQUATIONS DE PROPAGATIONS POUR DES CARACTERISTIQUES A MULTIPLICITE VARIABLE

Soit $(h_B^A(D))$ un opérateur différentiel matriciel à coefficients complexes où chaque $h_B^A(\xi)$ est un polynôme de degré $\leq t$ dans les variables $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Soit $H_B^A(\xi)$ la partie homogène de degré t de $h_B^A(\xi)$ et $H_B^{*A}(\xi)$ la partie homogène de degré $t-1$; on note $h(\xi) = \det(h_B^A(\xi))$ et $H(\xi) = \det(H_B^A(\xi))$; $\mathcal{a}_A^B$ est le cofacteur de $h_B^A(\xi)$ dans la matrice $h_B^A(\xi)$, $A_A^B(\xi)$ est le cofacteur de $H_B^A(\xi)$ dans la matrice $(H_B^A(\xi))$ et plus généralement $A_{A_1 \ldots A_p}^{B_1 \ldots B_p}(\xi)$ le cofacteur obtenu en rayant les lignes d'indices $A_1, \ldots, A_p$ et les colonnes d'indices $B_1, \ldots, B_p$.

On suppose que :

i) $H_B^A(\xi)$ est fortement hyperbolique par rapport à $N = (1,0,0,\ldots,0)$.

ii) $\eta \neq \{0\}$ est un point multiple d'ordre k de la variété $\{\xi \mid H(\xi) = 0\}$.

Comme H est homogène et hyperbolique on peut le prende à coefficients réels.

Dans ces conditions, il existe alors au moins un mineur d'ordre $m-k$ soit $A_{12\ldots k}^{12\ldots k}$ tel que $A_{12\ldots k}^{12\ldots k}(\eta) \neq 0$.

Nous considérons le système

$$h^A_B(D)\, y^B = 0 \qquad (1)$$

et nous étudierons la série formelle oscillatoire

$$y^B(x) = e^{i\omega<\eta,x>}\left[Y^B_{\eta_o}(x) + \frac{1}{\omega}\, Y^B_{\eta_1}(x) + \dots\right]$$

La substitution de y^B dans (1) donne :

$$e^{i\omega<\eta,x>}\left[F^s_{\eta_o}(x) + F^s_{\eta_1}(x) + \dots\right]$$

On trouve que $F^A_{\eta_o}(x) \equiv 0$ s'écrit :

$$H^A(\eta)\, Y^B_{\eta_o}(x) = 0.$$

Donc $H^A_{\hat{B}}\, Y^{\hat{B}}_{\eta_o} = - H^A_{\bar{D}}\, Y^{\bar{D}}_{\eta_o}$ où $1 \leq \bar{D} \leq k$, $(k+1) \leq \hat{B} \leq m$.

Multiplions par $A^{12\dots k\hat{C}}_{12\dots k\hat{A}}$ et utilisons les formules suivantes de [10]

$$A^{12\dots k}_{12\dots k}\, \delta^{\hat{C}}_{\hat{B}} = A^{12\dots k\hat{C}}_{12\dots k\hat{A}}\, H^{\hat{A}}_{\hat{B}}\,,$$

$$A^{12\dots(\bar{D}-1)\,\hat{C}\,(\bar{D}+1)\,\dots\,k}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots k} = - H^{\hat{B}}_{\bar{D}}\, A^{12\dots k\hat{C}}_{12\dots k\hat{B}}$$

On obtient en sommant :

$$A^{12\dots k}_{12\dots k}\, Y^{\hat{C}}_{\eta_o} = A^{12\dots(\bar{D}-1)\,\hat{C}\,(\bar{D}+1)\,\dots\,k}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots k}(\eta)\, Y^{\bar{D}}_{\eta_o}$$

On a donc :

$$Y^{\hat{C}}_{\eta_o} = \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\ \hat{C}\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ k}}{A^{12\ldots\ k}_{12\ldots\ k}}\ Y^{\bar{D}}_{\eta_o} \qquad (2)$$

$F^A_{\eta_1}(x) = 0$ s'écrit :

$$H^A_B(\eta)\quad Y^B_{\eta_1} + \partial^\alpha\ H^A_B(\eta)\ \partial_\alpha\ Y^B_{\eta_o} + H^{*A}_B(\eta)\quad Y^B_{\eta_o} = 0$$

Maintenant si nous remplaçons la valeur de $Y^{\hat{C}}_{\eta_o}$ donnée par (2) dans cette équation nous avons :

$$H^A_B(\eta)\quad Y^B_{\eta_1} + \left[\partial^\alpha\ H^A_{\hat{C}}.\ \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\ \hat{C}\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\right](\eta)\ \partial_\alpha\ Y^{\bar{D}}_{\eta_o}$$

$$+ \partial^\alpha\ H^A_{\bar{D}}(\eta)\ \partial_\alpha\ Y^{\bar{D}}_{\eta_o} + \left[H^{*A}_{D}.\ \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\right](\eta)\ Y^{\bar{D}}_{\eta_o} +$$

$$+ H^{*A}_B(\eta)\quad Y^{\bar{D}}_{\eta_o}\ .$$

Soit en réunissant les termes en $Y^{\bar{D}}_t$:

$$H^A_B(\eta)\quad Y^B_{\eta_1} + \left[\partial^\alpha\ H^A.\ \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\ B\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\right](\eta)\ \partial_\alpha\ Y^{\bar{D}}_t$$

$$+ \left[H^{*A}_{B}.\ \frac{A^{12(\bar{D}-1)\ B\ (\bar{D}+1)\ \ldots\ k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\right](\eta)\quad Y^{\bar{D}}_t = 0$$

Si nous multiplions maintenant par des vecteurs $(\gamma^{\bar{F}})$ définis de la facon suivante :

$$\gamma^{\bar{F}}_{\bar{C}} = A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{F}-1)\bar{C}(\bar{F}+1)\ldots k} \;, \gamma^{\bar{F}}_{\bar{F}} = A^{12\ldots k}_{12\ldots k} \;, \; \gamma^{\bar{F}}_{\hat{D}} = A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{F}-1)\hat{D}(\bar{F}+1)\ldots k}$$

nous obtiendrons :

$$\partial^{\alpha}\mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\; \partial_{\alpha} \; \gamma^{\bar{D}}_{\eta_o} + \mathcal{A}^{*\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta) \quad \gamma^{\bar{D}}_{\eta_o} = 0$$

où

$$\mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta) = (-1)^{\bar{C}+\bar{D}} \; \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\;(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)\;(\bar{C}+1)\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}$$

$$\mathcal{A}^{*C}_{\bar{D}}(\eta) = \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)B(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k} \;\; H^{*A}_{B}(\eta) \;\; A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)A(\bar{C}+1)\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}$$

Nous nous proposons de démontrer la forte hyperbolicité de ce système. Pour cela nous aurons besoin d'exprimer les cofacteurs $\mathcal{B}^{\bar{D}}_{\bar{C}}$ des $\mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}$ dans dans $(\mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}})$ en fonction des cofacteurs A^{B}_{A} des H^{A}_{B}.

On a, utilisant les formules de [10] :

$$\sum_{\bar{D}} (-1)^{\bar{C}+\bar{D}} \; A^{12\ldots(\bar{D}-1)\;(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)\;(\bar{C}+1)\ldots k} \; A^{\bar{D}}_{\bar{E}}$$

$$= \Sigma \;\; H^{F}_{\bar{D}} \;\; A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)F(\bar{C}+1)\ldots k} \;\; A^{\bar{D}}_{\bar{E}}$$

$$= \Sigma \;\; H\, I^{F}_{\bar{E}} \;\; A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)F(\bar{C}+1)\ldots k} \; - \sum_{F,\hat{C}} H^{F}_{\hat{C}} \;\; A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)F(\bar{C}+1)\ldots k} \;\; A^{\hat{C}}_{\bar{E}}$$

$$= \quad H\, A^{12\ldots k}_{12\ldots k} \;\; I^{\bar{C}}_{\bar{E}}$$

D'où $$\Sigma\, \mathcal{A}_{\bar{D}}^{\bar{C}}\, A_{\bar{E}}^{\bar{D}} = H\, \mathrm{I}_{\bar{E}}^{C} \qquad (3)$$

D'autre part, nous avons par [16], p. 115 :

$$\det(A_{\bar{E}}^{\bar{D}}) = H^{k-1}\, A_{12\ldots k}^{12\ldots k}$$

Donc, en prenant les déterminants des matrices dans (3) on a :

$$\det(\mathcal{A}_{\bar{D}}^{\bar{C}}) = \frac{H}{A_{12\ldots k}^{12\ldots k}}$$

et

$$\mathcal{B}_{\bar{C}}^{\bar{D}} = \frac{A_{\bar{C}}^{\bar{D}}}{A_{12\ldots k}^{12\ldots k}}$$

Si nous appliquons le critère de Svensson à la matrice $H_B^A(\xi)$ nous avons pour tout $\xi \in R^{n+1}$

$$\left| \frac{A_A^B(\xi+iN)}{H(\xi+iN)} \right| \leq C(1+|\xi|)^{1-t}, \quad \text{pour un certain } C \text{ (constant).}$$

Si nous substitunons $A_{\bar{A}}^{\bar{D}}$ à $\mathcal{B}_{\bar{C}}^{\bar{D}}$ et la variable ξ a $\frac{\eta}{r}+\xi$, $r \in R$, dans l'inégalité ci-dessus, nous avons :

$$\left[\frac{A_{12\ldots k}^{12\ldots k}\, \mathcal{B}_{\bar{C}}^{\bar{D}}(\frac{\eta}{r}+\xi+iN)}{H(\frac{\eta}{r}+\xi+iN)} \right] \leq C \quad (1+|\tfrac{\eta}{r}+\xi|)^{1-t}$$

ou $$|r|^t \left[\frac{A_{12\ldots k}^{12\ldots k}\, \mathcal{B}_{\bar{C}}^{\bar{D}}(\eta+r(\xi+iN))}{H(\eta+r(\xi+iN))} \right| \leq C \quad |r|^{t-1}(|r|+|\eta+r\xi|)^{1-t}$$

En développant par rapport à r et tenant compte que $\mathcal{B}_{\bar{C}}^{\bar{D}}$ s'annule (k-1) fois en η nous avons :

$$\left| \frac{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}\ \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} \mathcal{B}^{\bar C}_{\bar D}(\eta)\ (\xi_{\alpha_1}+iN_{\alpha_1})\ldots(\xi_{\alpha_{k-1}}+iN_{\alpha_{k-1}})+r\ Q_\eta(\xi,r)}{\left[\dfrac{\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\ H(\eta)\ (\xi_{\alpha_1}+iN_{\alpha_1})\ldots(\xi_{\alpha_k}+iN_{\alpha_k})}{k!}\right]+r\ R_\eta\ (\xi,\eta)} \right| \leq C(|r|+|\eta+r\xi|)^{1-t}$$

où Q_η et R_η sont des polynômes en ξ , r.

Si nous faisons tendre r vers zéro, nous aurons :

$$\left| \frac{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}(\eta)\ \ \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}\ \mathcal{B}^{\bar D}_{\bar C}(\eta)\ (\xi_{\alpha_1}+iN_{\alpha_1})\ \ldots\ (\xi_{\alpha_{k-1}}+iN_{\alpha_{k-1}})}{\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_k}\ H(\eta)\ (\xi_{\alpha_1}+iN_{\alpha_1})\ \ldots\ (\xi_{\alpha_k}+iN_{\alpha_k})} \right| \leq C'|\eta|^{1-t}$$

Or

$$\det(\partial^{\alpha}\mathcal{A}^{\bar C}_{\bar D}(\eta)\ \ \xi_\alpha)$$

$$= \frac{1}{k\,!}\left[\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\det \mathcal{A}^{\bar C}_{\bar D})\right]\ (\eta)\ \ \xi_{\alpha_1}\ \ldots\ \xi_{\alpha_k}$$

$$= \frac{1}{k\,!}\ \frac{\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_k}\ H(\eta)\ \xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}\ \ (\eta)}$$

et le cofacteur de $\partial^{\alpha}\mathcal{A}^{\bar C}_{\bar D}(\eta)\ \xi_\alpha$ dans la matrice $(\partial^{\alpha}\mathcal{A}^{\bar C}_{\bar D}(\eta)\ \ \xi_\alpha)$

$$= \frac{1}{(k-1)\,!}\ \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}\ \mathcal{B}^{\bar D}_{\bar C}(\eta)\ \ \xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_{k-1}}\ ,$$

puisque

$$(\partial^{\alpha_k} \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \xi_k) \quad (\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} \mathcal{B}^{\bar{D}}_{\bar{E}}(\eta)\ \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_{k-1}})$$

$$= \frac{1}{k!}\ \partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} (\mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}\ \mathcal{B}^{\bar{D}}_{\bar{E}})\ (\eta)\ \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k}$$

$$= \mathbf{det}\ (\partial^{\alpha} \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \ \xi_{\alpha})\ \ I^{\bar{C}}_{\bar{E}}$$

La matrice inverse de la matrice $(\partial^{\alpha} \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \xi_{\alpha})$ prise pour $(\xi + i N)$ est donc bornée et par le critère de Svensson, elle est fortement hyperbolique.

Dans cette démonstration nous avons utilisé constamment le fait que A^A_B s'annule $(k-1)$ fois en η et que les $A^{A_1 \ldots A_q}_{B_1 \ldots B_q}$ s'annulent $k-q$ fois en η, $1 < q < k$. Ces propriétés sont conséquences de la forte hyperbolicité de la matrice $(H^A_B(\xi))$.

En effet, nous avons

$$H(\xi_o, \eta_i) = (\xi_o - \eta_o)^k\ H'(\xi_o) \ \text{avec}\ \ H'(\eta_o) \neq 0$$

Donc, dans le localisé de $\mathbb{R}[\xi_o]$ par rapport à $(\xi_o - \eta_o)$:

$$H^A_B(\xi_o, \eta_i) \sim \left| \begin{array}{ccccc} (\xi_o - \eta_o)^{q_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (\xi_o - \eta_o)^{q_s} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{array} \right| \quad s$$

avec $s \leq k$. Supposons avoir $s < k$, c'est-à-dire que $(\xi_o - \eta_o)$ apparaît dans la matrice ci-dessus avec un exposant strictement supérieur à 1. Donc dans R nous aurons :

$$H_B^A(\eta) \sim \begin{bmatrix} 0 &&&&&& \\ & 0 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 0 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} s < k \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

et la dimension du noyau de $(H_B^A(\eta))$ serait plus petite que k, ce qui contredit la forte hyperbolicité de $H_B^A(\xi))$.

Donc nous avons

$$H_B^A(\xi_o, \eta_i) \sim \begin{bmatrix} \xi_o - \eta_o &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \xi_o - \eta_o &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

dans le localisé de $\mathcal{R}[\xi_o]$ par rapport à $(\xi_o-\eta_o)$, ce qui implique que les mineurs $A^A_B(\xi_o,\eta_i)$ sont divisibles par $(\xi_o-\eta_o)^{k-1}$ et les $A^{A_1\ldots A_q}_{B_1\ldots B_q}$ sont divisibles par $(\xi_o-\eta_o)^{k-q}$, $1 < q < k$.

SYSTEME LOCALISE DU SYSTEME

$$h^A_B(D)\quad y^B = 0$$

Notons $(E_{\eta_o}{}^B_E)(x)$ et $(E_{\eta_1}{}^B_E)(x)$ des matrices distributions $m \times m$ ayant leurs supports dans un cône fermé K de sommet $\{0\}$ et tel que $K - \{0\} \subset \{x \mid x^o > 0\}$.

On considere le système en $(E_{\eta_o}{}^B_E)$ et $(E_{\eta_1}{}^B_E)$.

$$H^A_B(\eta)\quad E_{\eta_o}{}^B_E = 0$$

$$H^A_B(\eta)\quad E_{\eta_1}{}^B_E + (\partial^\alpha\quad H^A_B(\eta)\ \partial_\alpha + H^{*A}_B(\eta))\ E_{\eta_o}{}^B_E = \delta\ I^A_E ,$$

où δ est la distribution de Dirac et I^A_E la matrice unité.

Dans ces conditions nous allons démontrer la proposition suivante :

<u>Proposition</u>.- Il existe une distribution $E_{\eta_o}{}^B_E$ et une seule telle que ce système ait une solution. On a :

i) $E_{\eta_o}{}^{\bar{B}}_{\bar{E}}$ est la solution élémentaire de l'opérateur :

$$(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \partial_\alpha + \mathcal{A}^{*\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)) \qquad (1)$$

à support dans le localisé de H en η.

$E_{\eta_o E}^{\hat{B}}$ et $E_{o\hat{E}}^{\bar{B}}$ s'expriment à l'aide de $E_{\bar{E}}^{\bar{B}}$ par les formules :

$$\left.\begin{aligned} E_{\eta_o E}^{\hat{B}} &= \frac{A_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}^{12\ldots(\bar{D}-1)B(\bar{D}+1)\ldots k}}{A_{12\ldots k}^{12\ldots k}}(\eta)\; E_{\eta_o E}^{\bar{D}} \\ E_{\hat{E}}^{B} &= \frac{A_{12\ldots(\bar{L}-1)\hat{E}(\bar{L}+1)\ldots k}^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A_{12\ldots k}^{12\ldots k}}(\eta)\; E_{\eta_o \bar{L}}^{B} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ii) $E_{\eta_o E}^{B} = (\mathcal{Q}_{\eta E}^{B}(D)\; E(h_\eta))$

où $\mathcal{Q}_{\eta E}^{B}{}'$ est le coefficient de r^{k-1} dans le développement de $r^{mt-t}\mathcal{Q}_{E}^{B}(\xi + \frac{\eta}{r})$, h_η le localisé de h en η et $E(h_\eta)$ sa solution élémentaire "hyperbolique".

<u>Démonstration</u>.- Définissons $(E_{\eta_o E}^{\bar{B}})$ telle que :

$$(\partial^{\alpha} \mathcal{A}_{\bar{D}}^{C}(\eta)\; \partial_{\alpha} + \mathcal{A}_{\bar{D}}^{C}(\eta))\quad E_{\eta_o \bar{E}}^{\bar{D}} = \delta\; I_{\bar{E}}^{\bar{C}} \qquad (3)$$

avec support de $E_{\eta_o \bar{E}}^{\bar{B}}$ contenu dans le support du localisé de H en η : et

$E_{\eta_o E}^{B}$, $E_{\eta_o E}^{\hat{B}}$ définis par les formules (2).

Ces deux formules sont compatibles. En effet :

Pour la première formule nous avons :

$$E_{\eta_o \hat{E}}^{\hat{C}} = \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}(\eta) \quad E_{\eta_o \hat{E}}^{\bar{D}}$$

$$= \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}} \cdot \frac{A^{12\ldots\ldots\hat{}\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{L}-1)\hat{E}(\bar{L}+1)\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}} \; E_{\eta_o \bar{L}}^{\bar{D}}$$

$$= \frac{A^{12\ldots\ldots\hat{}\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{L}-1)\hat{E}(\bar{L}+1)\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}} \; E_{\eta_o \bar{L}}^{\hat{C}}$$

$= E_{\eta_o \hat{E}}^{\hat{C}}$ de la deuxième formule.

On a ainsi défini $(E_{\eta_o E}^{B})$.

Soit d'autre part le système :

$$\begin{cases} H^A_B(\eta)\ E'^B_{oE} \\ \\ H^A_B(\eta)\ E'^B_{1E} + \partial^\alpha\ H^A_B(\eta)\partial_\alpha\ E'^B_E + H^{*A}_{\ B}(\eta)\ E'^B_E = \delta\ I^A_E \ . \end{cases}$$

E'_o et E'_1 avec leurs supports contenus dans un cône K tel que $K - \{0\} \subset \{x \mid x^o > 0\}$. On obtient comme dans [10] que ce système équivaut au suivant :

$$\left\{\begin{aligned}
&E'^{\hat{C}}_{o_E} = \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)\hat{C}(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}(\eta)\ E'^{\bar{D}}_{oE} \\
&H^A_B(\eta)\ E'^B_{1E} + \left[\partial^\alpha\left(\frac{H^A\ A^{12\ldots(\bar{D}-1)B(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\right)(\eta)\right. \\
&\qquad \left. - H^A_B(\eta)\ \partial^\alpha\left(\frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)B(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\right)(\eta)\right]\partial_\alpha\ E'^{\bar{D}}_{oE} \\
&\qquad + H^{*A}_B(\eta)\ \frac{A^{12\ldots(\bar{D}-1)B(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}(\eta)\ E'^{\bar{D}}_{oE} = \delta\ I^A_E
\end{aligned}\right.$$

On a les conditions de compatibilité de la deuxième équation en multipliant par

$$\frac{A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)A(\bar{C}+1)\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\ (\eta)$$

et sommant.

On obtient

$$(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \partial_\alpha + \mathcal{A}^{*\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta))\quad E'^{\bar{D}}_{oE} = \delta\ \frac{A^{12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)\bar{E}(\bar{C}+1)\ldots k}}{A^{12\ldots k}_{12\ldots k}}\ (\eta)$$

SI $E = \bar{E}$ $(1 \leq \bar{E} \leq k)$ on a donc :

$$(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \partial_\alpha + \mathcal{A}^{*\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta))\quad E'^{\bar{D}}_{\bar{E}} = \delta\ I^{\bar{C}}_{\bar{E}} \qquad (4)$$

Donc la distribution $E'^{\bar{D}}_{o\bar{E}} - E_{\eta_o}{}^{\bar{D}}_{\bar{E}}$ est une solution de (3) avec son support dans le demi-espace $\{x^o > 0\}$ qui a son bord non caractéristique. Donc par le corollaire 5.3.1. de [4], elle est la solution nulle et

$$E'^{\bar{D}}_{o\bar{E}} = E_{\eta_o}{}^{\bar{D}}_{\bar{E}} \tag{5}$$

Si $E = \hat{E}$ $(k<\hat{E}\leq m)$ on a

$$(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta)\ \partial_\alpha + \mathcal{A}^{*\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta))E'^{\bar{D}}_{o\hat{E}} = \delta\ \frac{A^{12.........\hat{}.........k}_{12...(\bar{C}-1)E(\bar{C}+1)...k}}{A^{12...k}_{12...k}}(\eta)$$

Mais d'autre part

$$\frac{A^{12.........\hat{}.........k}_{12...(\bar{L}-1)E(\bar{L}+1)...k}}{A^{12...k}_{12...k}}(\eta)\ E_{\eta_o}{}^{\bar{D}}_{\bar{L}} = E_{\eta_o}{}^{\bar{D}}_{\hat{E}}$$

vérifie, compte tenu de (4) et (5), la même équation. Par différence et compte tenu des supports, on a donc :

$$E'^{\bar{D}}_{o\hat{E}} = E_{\eta_o}{}^{\bar{D}}_{\hat{E}}$$

Finalement, $\quad E'^{B}_{oE} = E_{\eta_o}{}^{B}_{E}$

ii) De l'identité

$$r^{mt}\ h(\xi + \frac{\eta}{r})\ I^A_E = \sum_t r^t\ h^A_B(\xi + \frac{\eta}{r})\ r^{mt-t}\ \mathcal{Q}^B_E(\xi + \frac{\eta}{r})$$

On déduit

$$r^k(I^A_E\, h\,(\xi) + 0(r)) = \left[H^A_B(\eta) + r(\partial^\alpha H^A_B(\eta)\ \xi_\alpha + H^{*A}_B(\eta)) + 0(r^2)\right]$$

$$\left[\mathcal{Q}^{\ B}_{\eta E}(\xi)\ r^{k-1} + \mathcal{Q}'^{\,B}_{\eta E}(\xi)\ r^k + 0(r^{k+1})\right]$$

d'où:
$$\begin{cases} H^A_B(\eta)\,\mathcal{Q}^{\ B}_{\eta E}(\xi) = 0 \\ H^A_B(\eta)\,\mathcal{Q}'^{\,B}_{\eta E}(\xi) + \partial^\alpha H^A_B(\eta)\ \xi_\alpha + H^{*A}_B(\eta)\ \mathcal{Q}^{\ B}_{\eta E}(\xi) = h_\eta(\xi)\ I^A_E \end{cases}$$

Donc:
$$\begin{cases} H^A_B(\eta)\ \mathcal{Q}^{\ B}_{\eta E}(D)\ E(h_\eta) = 0 \\ H^A_B(\eta)\ \mathcal{Q}'^{\,B}_{\eta E}(D)\ E(h_\eta) + \left[\partial^\alpha H^A_B(\eta)\ \partial_\alpha + H^{*A}_B(\eta)\right]\mathcal{Q}^{\ B}_{\eta E}(D)\ E(h_\eta) = \delta\ I^A_E \end{cases}$$

et on a bien $$E_{\eta_o E}^{\ \ B} = \mathcal{Q}^{\ B}_{\eta E}(D)\ E(h_\eta).$$

On déduit comme dans le théorème de la localisation 1' p. 21.

$$\text{support de } (E_{\eta_o E}^{\ \ B}) \subset \text{ support singulier de } E(h^A_B)$$

où $E(h^A_B)$ est la solution élémentaire de $(h^A_B(D))$.

Il convient donc de considérer l'opérateur (1) comme un opérateur localisé en η; réduit de l'opérateur initial $(h^A_B(D))$.

CAS PARTICULIER $k = 2$ [13].

Dans ce paragraphe nous appliquerons les résultats de dans le cas où η est un point double de la variété $\{H\}$, c'est-à-dire,

$$H(\eta) = 0, \quad \frac{\partial^{\alpha} H}{\partial \xi_{\alpha}}(\eta) = 0, \quad \text{pour tout } \alpha$$

et $\partial^{\alpha\beta} H(\eta)\xi_{\alpha}\xi_{\beta} = K_{\eta}(\xi)$ n'est pas identiquement nul.

Dans ces conditions les coefficients de la série formelle oscillatoire

$$y^{B}(x) = e^{i\omega<\eta,x>} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^{B}_{t+j}(x)}{(i\omega)^{j}}$$

sont déterminés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles de premier ordre à deux inconnues dont la matrice caractéristique est

$$\begin{pmatrix} \partial^{\alpha} A_2^2(\eta)\,\xi_{\alpha} & -\partial^{\beta} A_2^1(\eta)\xi_{\alpha} \\ -\partial^{\alpha} A_1^2(\eta)\,\xi_{\alpha} & \partial^{\alpha} A_1^1(\eta)\xi_{\alpha} \end{pmatrix} = H(\xi)$$

qui, comme nous l'avons démontré, est fortement hyperbolique.

Nous analyserons dans ce qui suit la façon dont se réalise la propagation.

Pour commencer on voit que les vecteurs

$\partial^\alpha \ A^2_2(\eta)$, $-\ \partial^\alpha \ A^1_2(\eta)$, $-\ \partial^\alpha \ A^2_1(\eta)$ et $\partial^\alpha \ A^1_1(\eta)$ ne sont pas linéairement indépendants, car cela entraînerait l'ultra-hyperbolicité du déterminant de la matrice $H(\xi)$.

On sait que

$$\det \ H(\xi) = \frac{1}{2} K_\eta(\xi) \ A^{12}_{12}(\eta)$$

avec $K_\eta(\xi) = \partial^{\alpha\beta} \ H(\eta) \ \xi_\alpha \ \xi_\beta$

On a toujours à cause de la hyperbolicité de K_n par rapport à $N = (1, 0, \ldots, 0)$

$$\partial^{oo} \ H(\eta) \neq 0$$

et $K_\eta(\xi)$ se décompose en carrés sous la forme

$$K_\eta(\xi) = \partial^{oo} \ H(\eta) \left[\left(\xi_o + \sum_i \frac{\partial^{oi} H(\eta) \ \xi_i}{\partial^{oo} \ H(\eta)} \right)^2 - \frac{\Delta \ (\xi_i)}{\partial^{oo} \ H(\eta)} \right]$$

La forme quadratique $\Delta(\xi_i) = (\sum_i \partial^{oi} \ H(\eta) \ \xi_i)^2 - \partial^{oo} H(\eta) (\sum_{i,j} \partial^{ij} H(\eta) \xi_i \xi_j)$ est donc positive de signature ++ ou + ou est identiquement nulle.

<u>1^{er} cas</u>: Δ a pour signature ++, c'est-à-dire k a pour signature +, -, - . Il y a trois directions de dérivations linéairement indépendantes parmi $\partial^\alpha \ A^2_2(\eta)$, $-\ \partial^\alpha \ A^1_2(\eta)$, $-\ \partial^\alpha \ A^2_1(\eta)$ et $\partial^\alpha \ A^1_1(\eta)$, puisque la dimension du noyau de K_η est $(n-2)$ et égale d'après l'hyperbolicité forte à la dimension du sous-espace orthogonal aux 4 vecteurs ci-dessus.

La dimension "réduite" de $\{K_\eta(\xi) = 0\}$ est donc 3 et la propagation a liey comme pour l'équation d'onde à deux dimensions d'espace

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u>: Δ a pour signature $+$, c'est-à-dire K_η a pour signature $+\,-$. On voit de même qu'il y a deux directions de dérivation linéairement - indépendantes. La dimension "réduite" de $\{K_\eta(\xi) = 0\}$ est 2 et la propagation a lieu comme pour l'équation d'onde à une dimension d'espace.

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u>: $\Delta \equiv 0$; K_η est un carré; les 4 vecteurs ont la même direction. Il y a propagation le long d'une droite "bicaractéristique". Ce cas contient le cas où la multiplicité est localement constante au voisinage de η.

Donc les coefficients de la série formelle oscillatoire son déterminés par des systèmes fortement hyperboliques à des fonctions inconnues dans un espace de dimension au plus 3.

B I B L I O G R A P H I E

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

[1] ATIYAH, BOTT et GÅRDING - Acta Mathematica t. 124, 1970 p. 109-189.

[2] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT - J. Math. Pures et Appl. t. 48, 1969, p. 117-158.

[3] HADAMARD - Lecons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique 1903, Hermann, Paris.

[4] HÖRMANDER - Linear partial differential operators Springer-Verlag.

[5] KASAHARA et YAMAGUTI - Memoirs of the College of Science Université de Kyoto, séries A, vol. XXX III, Mathematica, n° 1, 1960.

[6] LERAY - Accad. Nazionale dei Lincei, Roma, 1972.

[7] LERAY et OHYA - Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[8] LUDWIG - Conical refraction in crystal optics and hydromagnetrics. Comm. Pure and Appl. Math. 14 (1961), 115-124.

[9] SVENSSON - Arkiv Math. 8, 17, 1970, p. 145-162.

[10] VAILLANT - Annales de Inst. Fourier, Grenoble, 15, 2, 1961, p. **225-311**.

[11] VAILLANT - J. Math. Pures et Appl. t. 47, 1968, p. 1-40.

[12] VAILLANT - J. Math. Pures et Appl. t. 50, 1971, p. 25-51.

[13] VAILLANT - Solutions asymptotiques d'un système à caractéristiques de multiplicité variables.
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, série A, 1973, p. 192-194. A paraître au J. Math. Pures et Appl.

[14] RIVERO - VAILLANT - C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, p. 951-953.

[15] LUDWIG et GRANOFF - J. of Mathematical Analysis and Applications, 21, 1968, p. 556-574.

[16] BOURBAKI - Algèbre multilinéaire, Hermann, Paris, 1958.