PP Waves and Distributional Curvature
Ondas PP y Curvatura Distribucional

Nelson Pantoja and Freddy Ramírez
Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de los Andes, Mérida 5101, Venezuela
(Dated: November 23, 2003)

We carry out the distributional analysis of the geometry of a spacetime associated to gravitational waves propagating in a magnetic universe, obtaining their distributional curvature tensor following two different approaches. This curvature turns out to have singular parts proportional to Dirac's δ distribution.

Realizamos el análisis distribucional de la geometría de un espaciotiempo asociado a ondas gravitacionales que se propagan en un universo magnético, obteniendo su distribución tensorial de curvatura siguiendo dos procedimientos diferentes. Esta curvatura resulta tener partes singulares proporcionales a la distribución δ de Dirac.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad se cuenta con modelos de gravitación cuántica en (2+1) dimensiones [1], en los cuales persisten las singularidades clásicas del espaciotiempo, lo que nos lleva a pensar que es posible también que persistan en mayor dimensionalidad. En Relatividad General el manejo de estas singularidades es problemático y eludido frecuentemente, lo que hace deseable disponer de una estructura matemática que permita su tratamiento coherente. La Teoría de Distribuciones es un fuerte candidato, pero no basta simplemente con identificar el tensor métrico con una distribución, pues podríamos terminar con un tensor de curvatura mal definido y ecuaciones de campo sin sentido, dada la no linealidad de las ecuaciones.

Considerando las singularidades del espaciotiempo como aquellas singularidades del tensor métrico que no pueden ser removidas a través de una transformación de coordenadas, la cual puede incluso no estar definida en la región singular; nos gustaría ver estas singularidades reflejadas en la falta de suavidad del tensor de curvatura. Geroch y Traschen [2] introducen una clase muy restringida de métricas para las cuales el tensor de curvatura tiene sentido como distribución, la de las métricas regulares, que incluye a las métricas de espaciotiempos con capas delgadas citeIsrael. Gran parte de los espaciotiempos físicamente interesantes no son regulares, por lo que Garfinkle [4] disminuye las restricciones sobre las métricas para que tengan curvatura con sentido distribucional y las llama semiregulares, siendo las regulares una subclase de éstas. En un acercamiento diferente al problema, Balasin [5, 6] propone un tratamiento distribucional de la curvatura, explotando la geometría de Kerr-Schild de algunos espacio-tiempos.

En las teorías de cuerdas en espaciotiempos curvos existe un gran interés en el estudio de las denominadas ondas pp, pues estos espaciotiempos son soluciones exactas en estas teorías y su espectro puede ser determinado explícitamente. También, las teorías de cuerdas en fondos de ondas pp se han estudiado en la búsqueda de una conección entre la gravedad cuántica y teorías de calibre [7]. Por otro lado, los fondos de ondas pp impulsivas han sido considerados en el estudio de la correspondencia ADS/CFT [8, 9]. Se han estudiado soluciones clásicas de branas en fondos de ondas pp con la idea de que nuestro universo se encuentra embebido en un mundo de alta dimensionalidad [10, 11, 12]. Incluso se ha introducido un modelo de mundo-brana en el cual la solución del bulk consiste en una onda plana [13].

En lo que sigue estudiaremos la curvatura distribucional de una onda pp de acuerdo a la propuesta de Garfinkle [4] y al tratamiento que permite su geometría de Kerr-Schild siguiendo [5, 6].

2. MÉTRICAS SEMIREGULARES. GEOMETRÍA DE KERR-SCHILD

Un campo tensorial g_{ab} definido sobre una variedad $\mathcal{M}$ es llamado métrica *semiregular* [4] siempre que

1. g_{ab} y $(g^{-1})^{ab}$ existan en casi todas partes y sean localmente integrables.
2. La primera derivada débil $\widetilde{\nabla}_c g_{ab}$ de g_{ab} en alguna métrica suave $\tilde{g}_{ab}$ exista y los tensores

$$C^c{}_{ab} \equiv \frac{1}{2}\left(g^{-1}\right)^{cd}\left(\widetilde{\nabla}_a g_{bd} + \widetilde{\nabla}_b g_{ad} - \widetilde{\nabla}_d g_{ab}\right), \tag{1}$$

y $C^d{}_{m[b}C^m{}_{a]c}$ sean localmente integrables.

Éstas son las condiciones mínimas para que sea definible como distribución el tensor de curvatura dado por

$$R^d{}_{abc} = \widetilde{R}^d{}_{abc} + 2\widetilde{\nabla}_{[b}C^d{}_{a]c} + 2C^d{}_{m[b}C^m{}_{a]c}, \tag{2}$$

donde $\widetilde{\nabla}_c$ es el operador derivada compatible con $\tilde{g}_{ab}$ y $\widetilde{R}^d{}_{abc}$ su tensor de curvatura. Contrayendo los indices se tiene para el tensor de Ricci

$$R^a{}_b = (g^{-1})^{ac}\widetilde{R}_{cb} + 2\widetilde{\nabla}_{[c}\left(C^c{}_{d]b}(g^{-1})^{ad}\right)$$
$$+2C^c{}_{b[c}\widetilde{\nabla}_{d]}(g^{-1})^{ad} + 2(g^{-1})^{ad}C^c{}_{m[c}C^m{}_{d]b}. \tag{3}$$

Por otro lado, si la geometría permite una descomposición en la forma de Kerr-Schild [5, 6]

$$g_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \widehat{f} k_a k_b \ , \quad k_a = g_{ab} k^b \ , \quad k^a k^b g_{ab} = 0 \tag{4}$$

donde $k^a = \widetilde{g}^{ab} k_b$ es un campo vectorial nulo con respecto a $\widetilde{g}^{ab}$, lo que implica a su vez nulidad respecto de g_{ab} , entonces podemos identificar la región singular con las singularidades de $\widehat{f}$. La expresión para el tensor de Ricci es

$$\begin{aligned} R^a{}_b = \widetilde{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\Big(& \widetilde{R}^a{}_c \widehat{f} k^c k_b - \widetilde{R}_{bc} \widehat{f} k^c k^a - 2\widetilde{R}^a{}_{cdb} \widehat{f} k^c k^d \\ & + \Big(\widetilde{\nabla}^a \widetilde{\nabla}_c (\widehat{f} k^c k_b) + \widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_c (\widehat{f} k^c k^a) - \widetilde{\nabla}_c \widetilde{\nabla}^b (\widehat{f} k^a k_b) \Big)\Big) \end{aligned} \tag{5}$$

que es válida siempre que el lado derecho de (5) tenga sentido como distribución. Como veremos mas adelante, las ondas pp son una subclase del tipo Kerr-Schild.

3. ONDAS SOBRE UN UNIVERSO MAGNÉTICO

Consideremos el siguiente tensor métrico, solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell y representa ondas viajeras cuyo fondo es el denominado universo magnético cilíndrico [14]

$$\begin{aligned} g_{ab} = {} & \eta_{ab} + (H-1) d\rho_a d\rho_b + (H^{-1}-1)\rho^2 d\theta_a d\theta_b \\ & + H^{-1} f(u) \ln \frac{B^2\rho^2}{4} du_a du_b + 2(H-1) du_{(a} dv_{b)} \ , \end{aligned} \tag{6}$$

donde $H = (1 + \frac{1}{4}B^2\rho^2)^2$, B es un campo magnético constante y $f(u)$ es una función suave de u. La inversa $(g^{-1})^{ab}$ viene dada por

$$\begin{aligned} (g^{-1})^{ab} \ = \ & (\eta^{-1})^{ab} + (H^{-1}-1)\partial^a_\rho \partial^b_\rho + (H-1)\rho^{-2}\partial^a_\theta \partial^b_\theta \\ & + H^{-3} f(u) \ln \frac{B^2\rho^2}{4} \partial^a_v \partial^b_v + 2(H^{-1}-1)\partial^{(a}_u \partial^{b)}_v \end{aligned} \tag{7}$$

Probaremos que (6) es una métrica semiregular, que se puede descomponer a la forma de Kerr-Schild y calcularemos su tensor de Ricci.

Sea S^{ab} un campo tensorial de prueba en $\mathbb{R}^4$, entonces

$$\begin{aligned} g_{ab}[S^{ab}] = & \int_{\mathbb{R}^4} \eta_{ab} S^{ab} \omega_\eta + \int_{\mathbb{R}^4} 2\,(H-1)\, S^{(uv)} \omega_\eta \\ & + \int_{\mathbb{R}^4} (H-1)\big(\cos^2\theta S^{xx} + \sin\theta\cos\theta(S^{xy}+S^{yx}) + \sin^2\theta S^{yy}\big)\omega_\eta \\ & + \int_{\mathbb{R}^4} (H^{-1} 1)\big(\cos^2\theta S^{yy} - \sin\theta\cos\theta(S^{xy}+S^{yx}) + \sin^2\theta S^{xx}\big)\omega_\eta \\ & + \int_{\mathbb{R}^4} H^{-1} f(u) \ln\frac{B^2\rho^2}{4} S^{uu}\omega_\eta \ , \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\omega_\eta = \rho\, du\, dv\, d\rho\, d\theta$, es el elemento de volumen asociado a η_{ab} y se verifica que (6) es localmente integrable. En forma análoga se prueba que (7) es también localmente integrable.

Calculemos la derivada débil en η_{ab} de g_{ab}

$$\begin{aligned} W_{cab} \ = \ & H\rho^3 B^2 \xi(\rho)\,(d\theta_a d\rho_b d\theta_c + d\rho_a d\theta_b d\theta_c) \\ & - H^{-\frac{3}{2}} f(u) \left(\ln\frac{B^2\rho^2}{4} B^2\rho - H^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\rho} \right) du_a du_b d\rho_c \\ & + H^{\frac{1}{2}} \rho B^2\,(dv_a du_b d\rho_c + du_a dv_b d\rho_c) \\ & - H^{\frac{3}{2}} \rho^3 B^2 d\theta_a d\theta_b d\rho_c \\ & + f'(u) \ln\frac{B^2\rho^2}{4} H^{-1} du_a du_b du_c , \end{aligned} \tag{9}$$

donde $\xi(\rho)$ es una función de potencias positivas de ρ por lo que W_{cab} es localmente integrable. A continuación, se calcula el tensor de Christoffel C^a_{bc} y a partir de éste se construye $2C^d{}_{m[b} C^m{}_{a]c}$, encontrandose que ambos tensores son localmente integrables.

Partiendo de (3) podemos calcular el tensor de Ricci con los índices mixtos, tomando en cuenta que $\widetilde{R}_{cb} = 0$ y $2C^c{}_{b[c} \widetilde{\nabla}_{d]} (g^{-1})^{ad} = 0$. Sea $S_a{}^b$ un campo tensorial de prueba sobre $\mathbb{R}^4$. Se tiene que

$$\begin{aligned} R^a_b[S_a{}^b] \ = \ & \lim_{\epsilon\to 0} \Big[\int_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon} \Big(\widetilde{\nabla}_d (C^c{}_{cb} (g^{-1})^{ad} S_a{}^b) \\ & - \widetilde{\nabla}_c (C^c{}_{db} (g^{-1})^{ad} S_a{}^b) \Big)\, \omega_\eta \\ & + \int_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon} \Big(\widetilde{\nabla}_c (C^c{}_{db} (g^{-1})^{ad}) \\ & - \widetilde{\nabla}_d (C^c{}_{cb} (g^{-1})^{ad}) \Big)\, S_a{}^b \omega_\eta \Big] \\ & + \int_{\mathbb{R}^4} 2 (g^{-1})^{ad} C^c{}_{m[c} C^m{}_{d]b} S_a{}^b \omega_\eta \ , \end{aligned} \tag{10}$$

donde B_ϵ es la bola de radio ϵ alrededor del origen y el primer término provee la contribución tipo delta. Los otros términos proporcionan el tensor de Ricci "tradicional" $\widehat{R}^a{}_b$, esto es, el obtenido empleando geometría diferencial estándar. Ahora, para $\epsilon \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon} \Big(\widetilde{\nabla}_c (C^c{}_{db} (g^{-1})^{ad} S_a{}^b) - \widetilde{\nabla}_d (C^c{}_{cb} (g^{-1})^{ad} S_a{}^b) \Big)\, \omega_\eta \\ & = \int_{S_\epsilon} \big(C^c{}_{db} (g^{-1})^{ad} d\rho_c - C^c{}_{cb} (g^{-1})^{ad} d\rho_d \big)\, S_a{}^b \sigma \\ & = \int_{S_\epsilon} du dv d\theta \frac{4096 f(u)\epsilon \left(-4 - B^2\epsilon^2 + ln\frac{B^2\epsilon^2}{4} B^2\epsilon^2 \right)}{(4 + B^2\epsilon^2)^7 \epsilon} S_v{}^u \\ & = -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(u) \partial^a_v du_b S_a{}^b(u,v,0,0). \end{aligned} \tag{11}$$

donde S_ϵ es la superficie de B_ϵ, $\sigma = \rho\, du\, dv\, d\theta$ es el elemento de superficie y $-d\rho_c$ es la normal externa. De (10) y (11) se sigue que

$$R^a{}_b = -2\pi f(u) \delta(x) \delta(y) \partial^a_v du_b + \widehat{R}^a{}_b. \tag{12}$$

Así, si $f(u)$ tiene soporte compacto, el espaciotiempo es una onda viajera con una singularidad tipo δ que se propaga con la onda.

Por otro lado, la métrica (6) puede ser escrita en la forma generalizada de Kerr-Schild como

$$g_{ab} = H\left(du_{(a}dv_{b)} + d\rho_a d\rho_b\right) + H^{-1}\rho^2 d\theta_a d\theta_b + H^{-1} f(u) \ln\frac{B^2\rho^2}{4} du_a du_b, \tag{13}$$

donde los vectores nulos y la función $\widehat{f}$ que satisfacen las condiciones (4) vienen dados por

$$k_a = \frac{du_a}{1+\frac{1}{4}B^2\rho^2}\,, \qquad \widehat{f} = f(u)\ln\frac{B^2\rho^2}{4} \tag{14}$$

y se identifica la métrica de fondo con

$$\widetilde{g}_{ab} = H\left(du_{(a}dv_{b)} + d\rho_a d\rho_b\right) + H^{-1}\rho^2 d\theta_a d\theta_b. \tag{15}$$

Se puede verificar que los términos de (5) asociados a los tensores de Ricci y Riemann de la métrica de fondo son localmente integrables y por lo tanto tienen sentido como distribución. El término que da la contribución tipo delta del tensor de Ricci viene dado por

$$\begin{aligned} -\lim_{\epsilon\to 0} \quad & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon} \widehat{f}\, k^a k_b \widetilde{\nabla}^c \widetilde{\nabla}_c S_a{}^b \omega_\eta \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\left[-\int_{S_\epsilon} \widehat{f} k^a k_b dr_c \widetilde{\nabla}^c S_a{}^b \sigma \right. \\ &\quad + \int_{S_\epsilon} \widetilde{\nabla}^c(\widehat{f} k^a k_b) dr_c S_a{}^b \sigma \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon} \widetilde{\nabla}_c \widetilde{\nabla}^c (\widehat{f} k^a k_b) S_a{}^b \omega_\eta \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora, con $\epsilon \to 0$ se tiene

$$\begin{aligned} &-\int_{S_\epsilon} \widetilde{\nabla}^c(\widehat{f} k^a k_b) dr_c S_a{}^b \sigma = \\ &= 256 \int_{S_\epsilon} dudvd\theta\, \frac{du_b \partial_v^a \xi(u)(2\ln\frac{\epsilon^2 B^2}{4}\epsilon^2 B^2 - 4 - \epsilon^2 B^2)}{(4+\epsilon^2 B^2)^5} S_a{}^b \\ &= -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dudv\, \xi(u) \partial_v^a du_b S_a{}^b(u,v,0,0) \end{aligned} \tag{17}$$

y los otros términos proporcionan el Ricci usual $\widehat{R}^a{}_b$, obteniendose finalmente

$$R^a{}_b = -2\pi f(u)\delta(x)\delta(y)\partial_v^a du_b + \widehat{R}^a{}_b. \tag{18}$$

4. CONCLUSIONES

Para la onda pp que se propaga en el universo magnético cilíndrico [14], encontramos en la aproximación de Garfinkle un tensor de Ricci distribucional, con un término proporcional a una delta de Dirac 2-dimensional con soporte en el origen $x = y = 0$ más otro término correspondiente al tensor de Ricci usual, este último asociado a la presencia de una fuente de campo magnético. Se sigue que el Ricci distribucional es equivalente al usual, excepto en el origen donde el tensor métrico es singular. En el enfoque de Balasin, usando la forma generalizada de Kerr-Schild de este espaciotiempo, se obtuvo el mismo resultado. Es de hacer notar que el hecho de que ambos tratamientos del problema arrojen el mismo resultado está lejos de ser trivial, ya que a la fecha no se ha podido demostrar su equivalencia.

[1] Eric A. Minassian, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5877, [arXiv:gr-qc/0203026].

[2] R. Geroch and J. Traschen, Phys. Rev. **D36** (1987) 1017.

[3] W. Israel, Nuovo Cimento. **B44** (1966)1, Erratum: **B48**, (1967) 463.

[4] D. Garfinkle, Class. Quantum Grav. **16** (1999)579 [arXiv:gr-qc/9906053].

[5] H. Balasin and H. Nachbagauer, Class. Quantum Grav **11** (1994) 1453 [arXiv:gr-qc/9312028].

[6] H. Balasin, Class. Quantum Grav. **14** (1997) 3353 [arXiv:gr-qc/9702060].

[7] G. T. Horowitz and A. A. Tseytlin, Phys. Rev. **D51** (1995) 2896 [arXiv:hep-th/9409021].

[8] J. Maldacena, Adv. Theor. Math.Phys. **2** (1998) 231.

[9] D. Berenstein, J. Maldacena and H. Nastase, JHEP. **0204** (2002) 013 [arXiv:hep-th/0202021].

[10] V. Rubakov and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B125** (1983) 139.

[11] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B429** (1998) 263 [arXiv:hep-ph/9803315].

[12] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370, hep-ph/9905221; Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [arXiv:hep-th/9906064].

[13] G. T. Horowitz, I. Low and A. Zee, Phys. Rev. **D62** (2002) 086005 [arXiv:hep-th/0004206].

[14] D. Garfinkle and M. A. Melvin, Phys. Rev. **D45** (1992) 1188.