LA ATRACTIVA GRAVEDAD

Héctor Rago A.
rago@ula.ve

INTRODUCCIÓN

Imaginemos a alguien en el siglo XV, pudiera ser Galileo, intentando descifrar las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra. Obedece a la curiosidad de conocer. Diseña y hace experimentos, con péndulos y planos inclinados, deja caer cuerpos. Observa, manipula a la realidad, o al menos a una parte de ella, imagina situaciones ideales, simplifica, trata de desechar lo que luce accesorio. Mide longitudes, distancias, intervalos de tiempo. Saca conclusiones en base a los datos. Usa el poderoso lenguaje de las matemáticas para construir modelos del movimiento de los cuerpos. Sospecha que de un modo lejano está hurgando en las intimidades de la fábrica del universo.

Imaginemos ahora a modernos tecnocientíficos del siglo XXI hurgando en las intimidades de la fábrica del universo. Miden la tasa a la que se alejan las galaxias y la densidad de materia, hablan de la curvatura del espaciotiempo y de singularidades, diseñan experimentos para medir la temperatura y la anisotropía de la radiación cósmica de fondo o para detectar ondas gravitacionales. Imaginan situaciones ideales, miden, observan, toman datos que analizan poderosas computadoras. Intentan conocer cómo se formaron las galaxias y cuál es la física de los agujeros negros. Usan el poderoso lenguaje de las matemáticas para construir modelos (universos de papel) que simulen el comportamiento del universo real, o de alguna de sus partes. Saben de un modo preciso que están obteniendo un conocimiento cabal del mundo físico.

¿Cuál es el secreto vínculo entre ambas imaginaciones, qué sutil hilo las conecta? La respuesta es definitiva: la gravitación. La noción de gravedad y los intentos exitosos por describirla, impregnan buena parte de la historia de la física e ilustran la estrategia de los físicos para abordar y resolver problemas. La permanente indagación sobre su naturaleza nos ha permitido conocer su vinculación con el espacio y el tiempo y nos ha revelado la manera profunda como está relacionada con nuestra propia existencia.

Vale la pena dejarse atraer por un campo tan atractivo como el campo gravitacional, sentir su fuerza, conocer su potencial y entrever lo mucho que tiene que ver con nosotros, manteniéndonos a una conveniente distancia del sol, procurándonos una atmósfera, originando las galaxias donde se forman las estrellas donde se fraguan los elementos químicos de los que estamos hechos. En demasiados aspectos la gravitación nos es profundamente relevante.

El presente trabajo fue concebido para cubrir las horas de clases de la III Escuela Venezolana de enseñanza de la Física. Es una introducción elemental a algunos de estos atractivos campos desde las perspectivas galileana, newtoniana y einsteniana. No hemos desdeñado el uso de algunas herramientas matemáticas sencillas, tan sólo así podrá el lector advertir las capacidades de las diferentes descripciones de la gravedad. Hemos querido incluir algunos ejercicios resueltos y otros propuestos e instamos al lector a resolverlos como una manera de fijar mejor lo aprendido y lo aprehendido.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 trataremos la descripción de la gravedad muy cerca de la superficie terrestre, históricamente la primera jamás realizada. En el capítulo siguiente detallaremos el paso monumental dado por Newton al explicar con su ley de gravitación, el funcionamiento del sistema solar, y veremos entonces por qué cerca de la superficie de la Tierra las leyes del movimiento son las que revisamos en el capítulo anterior. El capítulo 3 se ocupa de presentar los aspectos más universales de la gravitación newtoniana. En el siguiente capítulo, aun inconcluso, nos adentraremos en las razones que tuvo Einstein para proponer una nueva teoría de la gravitación y cuál es en lo esencial, el contenido de la relatividad general, cuáles son sus éxitos y cuáles sus limitaciones. Incluimos también un apéndice con algunos valores numéricos de constantes y parámetros.

CAPÍTULO 1
GRAVITACIÓN EN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

La física enfoca a la realidad a muy diversas escalas (diversas escalas de longitud, diversas escalas de tiempo, de masa…) A escala del sistema solar la Tierra puede modelarse sin problemas por un punto. Si estamos interesados en su campo magnético o en las mareas, esa no es la escala conveniente, sino la escala de varios miles de kilómetros. Como sabemos, a esa escala la Tierra puede modelarse apropiadamente como una esfera. Hay una escala de distancias en la cual la Tierra *es* plana, como pensaban los antiguos (ciertamente no los griegos). En esa escala, la noción de lo que es la dirección vertical, es absoluta: mi dirección coincide con la de algún otro observador alejado de mí, y por eso a esa escala las líneas verticales son paralelas.

Es ésa la escala de distancias que nos interesa en este capítulo, de modo que las distancias consideradas siempre serán pequeñas comparadas con el radio de la Tierra (unos 6400 Km). Comencemos con un experimento imaginario o real si el lector está dispuesto a hacerlo.
Imaginemos que dejamos caer libremente diversos objetos. Pudiéramos lanzarlos con una velocidad arbitraria, pero para simplificar, supongamos que sólo los dejamos caer. Nos interesa averiguar las leyes, si es que las hay, que gobiernan su trayectoria a medida que cae. Un buen experimentador comenzaría despreciando la fricción con el aire, para lo que nos interesa, el aire y sus efectos no son lo fundamental, sino un aspecto episódico y que puede esconder lo esencial del fenómeno gravitacional. Ya se podrá tomar en cuenta en su debido momento. Este procedimiento es típico de la física: imaginar situaciones ideales (esferas perfectas, cuerdas inextensibles y sin masa, planos sin rozamiento, partículas puntuales…), desechar lo periférico para quedarse con lo fundamental. Naturalmente que distinguir entre lo fundamental y lo accesorio no siempre es evidente. Muchas veces la huella de un buen físico es precisamente lograr identificar y aislar lo relevante.

Lo que queremos que el experimento nos revele es la posición del cuerpo en cada instante, de modo que disponemos una regla que mida distancias verticales y un reloj cuyo cero es ajustado al momento de dejar caer el cuerpo. Galileo (1564 – 1642) realizó este tipo de medidas usando planos inclinados que “enlentecieran” el movimiento. Los resultados para un cuerpo que cae libremente los podemos presentar en forma de tabla:

t (seg.)	y(t) mts.
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
…	…

Este conjunto de datos experimentales, dice bastante acerca de la caída de un objeto, pero tiene algunas limitaciones. Por ejemplo, si quisiéramos conocer la distancia que cae el cuerpo digamos a los 2,5 seg. tendríamos que conformarnos con saber que está entre los 20 y los 45 metros, o realizar mediciones cada medio segundo. Una manera de subsanar esa limitación es construir la curva que enlaza continuamente a los puntos experimentales:

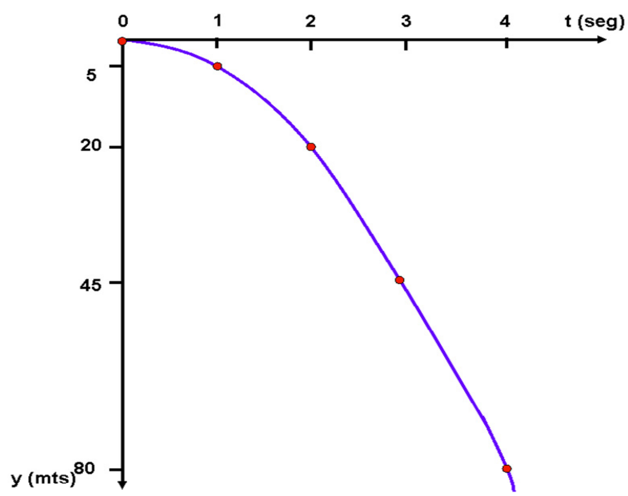

Figura 1. Distancia en función del tiempo

Es importante observar que esta curva no representa la trayectoria espacial que sigue el cuerpo en su caída (que es una línea recta a lo largo del eje seleccionado como el eje *y*), es más bien la trayectoria en un gráfico espaciotemporal cuyos ejes son el eje vertical Y que representa distancias espaciales y el eje horizontal que representa instantes de tiempo. El gráfico muestra los diversos *eventos* que simbolizan la presencia del cuerpo en un punto dado y en un instante dado. Los puntos (*eventos*) rojos son los detectados observacionalmente, el resto de la curva la construimos por continuidad y simplicidad. Es claro que la figura brinda más información que la tabla, pero el físico no se conforma con esto sino que trata de obtener una función matemática que represente a la curva experimental. No es difícil convencerse de que la expresión

$$y(t) = 5t^2 \qquad (1)$$

Es la fórmula buscada, ella condensa toda la información experimental y nos revela que la distancia recorrida por el cuerpo en caída libre aumenta proporcional al cuadrado del lapso transcurrido.

Supongamos que nos interesa conocer la velocidad. Como es obvio que la velocidad va aumentando, lo que nos interesa es conocer qué velocidad tiene el cuerpo en cada instante. Galileo pudo medir la velocidad y concluir que ella aumenta linealmente con el tiempo. Con más precisión, como demostraremos en breve, la velocidad del cuerpo cayendo libremente depende del tiempo de acuerdo con la relación

$$v(t) = 10t \qquad (2)$$

Así, la velocidad transcurrido el primer segundo es de 10 *mt/seg*, al tercer seg es de 30, y así sucesivamente. Observemos que si el tiempo está medido en segundos y la distancia en metros, el factor 10 tiene unidades de *mt/seg*^{2}.

Supongamos ahora que queremos conocer cuánto vale el cambio de velocidad como una función del tiempo, es decir, la tasa o el ritmo al cual está cambiando la velocidad. Esto es exactamente lo que los físicos llaman la aceleración. Es sencillo demostrar que la aceleración cumple con

$$a(t) = 10 \frac{mt}{seg^2} \qquad (3)$$

y es por tanto constante y este resultado es muy importante para lo que sigue, pero hagamos una breve digresión sobre la manera de obtener las fórmulas (2) y (3) a partir de la (1).

SECCIÓN AVANZADA 1

DISTANCIA, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CERCA DE LA TIERRA

Escribamos la ecuación (1) de la forma

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

Es obvio de la comparación con (1) que g vale 10 mt/seg^2.
Como la velocidad del cuerpo va cambiando, si deseamos saber cuál es la velocidad en el instante t debemos conocer la pequeña distancia (que llamaremos Δy*) que recorre el cuerpo entre los instantes t y* $t + \Delta t$*, donde* Δt *es un brevísimo lapso de tiempo y luego dividir* Δy *entre el lapso* Δt*. El resultado, después de hacer que el infinitesimal* Δt *tienda a cero, será la velocidad en el instante t.*

Note que $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ *y usando la fórmula (1), obtenemos,*

$$\Delta y = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2$$
$$\Delta y = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2)$$

Simplificando, dividiendo entre Δt *y luego haciendo* Δt *tender a cero, obtenemos*

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v(t) = gt$$

Que es el resultado (2).

El cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ *cuando* Δt *se hace despreciablemente pequeño es lo que conoce como derivada de la función y respecto de la variable t. No es más que la pendiente de la curva y(t) en el punto t. El método inventado originalmente por Newton (y simultáneamente por Leibnitz) es la base del cálculo diferencial. La notación usual es* $\dfrac{dy}{dt}$ *aunque usaremos aquí cualquiera de las dos*

Para calcular la aceleración debemos hallar similarmente el cambio de velocidad $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$ *en dos instantes sucesivos, y lo dividimos entre el lapso transcurrido*

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a = \frac{g(t+\Delta t) - gt}{\Delta t} = g$$

que es el resultado reseñado en la ecuación (3).

En conclusión, los más importante de los resultados es que cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración es una constante independiente de a posición y de la masa del cuerpo, la velocidad vertical cambia linealmente con el tiempo y la posición cambia cuadráticamente con el tiempo.

Para efectos descriptivos de la caída libre de un cuerpo, las relaciones anteriores son más que suficientes. Sin embargo, queremos profundizar en la naturaleza del fenómeno y hallar explicaciones acerca del porqué de la caída de los cuerpos.

Desde el punto de vista de la construcción de la física, la más importante de estas fórmulas es la última, ecuación (6). A partir de Newton (1642 – 1727), la aceleración de un cuerpo es el dato fundamental y necesario para lograr conocer cuál será su trayectoria. Y la aceleración está vinculada con la fuerza que actúa sobre el cuerpo: movimientos uniformes no requieren fuerzas, sólo la desviación del movimiento uniforme exige invocar a fuerzas responsables de esta desviación. Además, la experiencia indica que para una misma fuerza actuando sobre diversos cuerpos, las aceleraciones que resultan son mayores en los cuerpos de menor masa y menores en los más masivos. Newton codificó esa información en su célebre ecuación de movimiento:

$$ma = F$$

que podemos reescribir recordando que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, como

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = F \qquad (4)$$

Como en la caída libre cerca de la superficie de la Tierra conseguimos que $a = g$, concluimos que la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo y que lo obliga a caer es constante y además es proporcional a su propia masa m, de hecho, es $F = mg$. Esta fuerza es naturalmente el peso del cuerpo.

Movimiento en 2D

No todos los cuerpos caen cerca de la superficie de la Tierra de manera vertical, también pueden avanzar horizontalmente a medida que caen verticalmente y naturalmente eso depende de la velocidad horizontal (relativa al observador) que tenga el cuerpo inicialmente. Uno de los grandes aportes de Newton fue entender que el movimiento en un plano es la composición (vectorial diríamos ahora) de dos movimientos independientes a lo largo de dos direcciones independientes que pueden ser elegidas como la dirección vertical (eje Y) y una dirección horizontal eje X). En otras palabras, que existe una ecuación de movimiento para ambas direcciones:

$$m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = F_y$$

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = F_x$$

donde (v_x, v_y) son las componentes del vector velocidad y (F_x y F_y) son las componentes de la fuerza, de modo que estas ecuaciones pueden escribirse como

$$m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F} \qquad (5)$$

SECCIÓN AVANZADA 2

SOLUCIÓN GENERAL DEL MOVIMIENTO CERCA DE LA TIERRA

Próximo a la superficie terrestre hemos visto que la fuerza gravitacional que siente un cuerpo, es constante y lo podemos escribir como $\vec{F} = m\vec{g}$*, de modo que la ecuación de movimiento resulta ser*

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{g}$$

El lector puede comprobar que la función $\vec{v}(t)$ *tal que su derivada sea* $\vec{g}$*, es:*

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Donde el primer término a mano derecha corresponde con el vector velocidad inicial, como puede verse simplemente haciendo t = 0. Esta ecuación nos dice cuánto valen las componentes de la velocidad en cualquier instante. Si consideramos un vector posición que denotaremos por $\vec{r}$ *y recordamos que el cambio (la derivada) de la posición respecto del tiempo es la velocidad, esto es,* $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$*, el lector puede comprobar usando la ecuación (9) que la función* $\vec{r}$ *(t) tal que su derivada sea la velocidad es*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

donde el primer término a mano derecha es el vector posición inicial como puede verificarse haciendo t igual a cero. Esta ecuación provee la información de la *posición del cuerpo en cada instante siempre y cuando conozcamos los datos iniciales, $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$. Note que el sistema de coordenadas (XY) no ha sido usado en lo más mínimo. La ecuación de movimiento (8) y la solución para fuerza constante, (9) y (10) son válidas en cualquier sistema de coordenadas. Es a posteriori que fijamos un par de ejes XY a conveniencia. Es usual usar un sistema adaptado a la simetría del problema. En el cual el eje Y, por ejemplo, apunte en la dirección del vector $\vec{g}$, es decir, e la dirección vertical porque de ese modo dicho vector no tiene componentes horizontales, pero es sólo una convención útil.*

Ejercicio 1.- Halle la derivada de la solución (10) usando el procedimiento desarrollado en la digresión 1 y consiga la ecuación (9). Similarmente halle la derivada de (9) para corroborar que la aceleración es constante como debe ser cerca de la superficie de la Tierra. El procedimiento inverso al que usted trabajará en este ejercicio, es decir, obtener la velocidad a partir de la aceleración y luego la posición a partir de la velocidad, se conoce como integración.

Ejercicio 2.- La solución a las ecuaciones de movimiento de un cuerpo que se mueve cerca de la superficie de la Tierra sometido únicamente a la fuerza de gravedad, muestran que en la dirección vertical la dependencia de la posición con el tiempo es cuadrática, mientras que en la horizontal es lineal. Estas ecuaciones se conocen como forma paramétrica de la trayectoria, y el parámetro es el tiempo *t.* Elimine el parámetro de estas ecuaciones para obtener la curva *y = y(x)* que dibuja el cuerpo en el espacio y demuestre que esta curva es una parábola. (*Nota:* en el plano XY una parábola es la curva descrita por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, donde *a, b* y *c* son constantes.

Ejercicio 3.- Demuestre que un cuerpo sin velocidad inicial en la dirección vertical cae una altura *h* en un lapso $\sqrt{2h/g}$ y por tanto la velocidad horizontal es irrelevante para el tiempo de caída. Puesto de manera más pictórica, si disparamos una bala horizontalmente y a la vez dejamos caer una moneda, ambas, bala y moneda chocarán simultáneamente el suelo.

Parábola de Galileo

La leyenda que sitúa a Galileo en la Torre inclinada de Pisa dejando caer objetos de diferente masa, sugiere que el gran hombre sólo se burlaba de sus escolásticos colegas, porque Galileo ciertamente estaba convencido de que eliminada la fricción del aire, la manera como caen diferentes objetos era la misma. Considere el siguiente argumento, de reducción al absurdo, sutil e inteligente que elaboró Galileo.

Consideremos dos cuerpos que denotaremos como 1 y 2, cuyas masas respectivas son m_1 y m_2. El segundo tiene una masa mayor que el primero. Al caer una cierta distancia el primero lo hace en un lapso t_1 mientras que el segundo demora un lapso t_2. Es usual que se diga que el de mayor masa cae más rápido, es decir que $t_2 < t_1$, pero supongamos que un cabello (sin masa) unimos ambos cuerpos, y lo dejamos caer. Por una parte el cuerpo compuesto tiene una masa mayor que el de sus partes y por tanto su tiempo de caída debe ser menor aun que el más rápido de los integrantes, $t < t_2$, pero por otra parte el cuerpo 1 retrasa en su caída al 2 y por tanto el lapso t debe cumplir que $t_2 < t$, llegando a una contradicción (t es a la vez menos y mayor que t_2. Suponiendo que el cabello no juegue ningún papel relevante, hay que concluir que los dos cuerpo caen en el mismo tiempo.

Imaginarse una situación experimental y usar la lógica para extraer conclusiones es una práctica habitual de la física que se conoce como un experimento imaginario (gedankenexperiment en alemán). Sin embargo a los físicos les gusta la constatación experimental de sus propuestas. El propio Newton se ocupó del problema y diseñó y realizó experimentos con péndulos de masas diferentes y construidos con diversos materiales, para demostrar que el período era el mismo en todos ellos, lo cual permite inferir que la aceleración gravitacional no depende de la masa de la partícula acelerada (el período de un péndulo a pequeñas oscilaciones es $2\pi(L/g)^{1/2}$ donde L es la longitud de la cuerda del péndulo. Como vemos, no aparece la masa. Newton concluyó de sus experimentos que las masas caen con la misma aceleración al menos en una parte en 10.000, lo cual es una precisión asombrosa. La tecnología actual ha elevado esa precisión a una parte en 10^{14}.

Matemáticamente el hecho de que la aceleración no dependa de la masa, se evidencia en la ecuación de movimiento de Newton $m\vec{a} = m\vec{g}$ al simplificar la *m* a ambos lados, y esta simplificación quiere decir que cuesta más acelerar partículas más pesadas, pero la fuera de gravedad sobre ellas es mayor, cuerpos livianos son fáciles de acelerar pero la fuerza de gravedad sobre ellos es menor, los dos efectos se compensan exactamente. Analizada con sutileza, la *m* a ambos lados de la ecuación de Newton juega roles diferentes: a la izquierda es la masa inercial, que cuantifica la resistencia del cuerpo a cambiar su estado de movimiento. A la derecha, representa la intensidad con que ella responde a la fuerza de gravedad. El porqué ellas son iguales (o al menos proporcionales y la constante de proporcionalidad está metida en la *g*) es una pregunta que no tiene respuesta en el marco newtoniano y debe verse como una coincidencia. Einstein supo vislumbrar en esta propiedad un hecho muy profundo que se constituiría, como veremos más adelante, en una de las bases de la relatividad general.

Queremos resaltar en todo momento en este texto, el papel importantísimo que tienen los datos experimentales u observacionales y lograr formular las preguntas pertinentes en trance de establecer leyes cada vez más fundamentales. En el capítulo anterior los datos intentaban describir la posición de la partícula en cada instante. La ley más general vincula el cambio de velocidad con la fuerza, a través de la ecuación de movimiento de Newton, $m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$. Si la fuerza es constante y vale $m\vec{g}$, (la dirección de $\vec{g}$ es la vertical), obtenemos una descripción exitosa del movimiento cerca de la superficie terrestre. Pero hay una serie de preguntas sin contestar, como por ejemplo:

¿Por qué la aceleración de un cuerpo es constante? ¿será por la escala de distancias que hemos considerado?

¿Por qué tiene el valor aproximado de $g \approx 10\, mt/seg^2$? ¿será este valor una constante universal o dependerá de circunstancias particulares y tal vez sea diferente en otros planetas, por ejemplo?

Las respuestas a estas preguntas debieron esperar a que de la mano de Newton, la humanidad realizara el prodigio de dar el segundo paso en la comprensión de la naturaleza de la gravitación al descifrar el funcionamiento del sistema solar basado en leyes simples y de muy largo alcance. Ese será el tema de nuestro segundo capítulo.

Lo dijo Galileo

"En cuestiones de ciencia la autoridad de mil no es tan valiosa como el humilde razonamiento de un solo individuo"

"Mide lo que sea medible y haz medible lo que no lo sea"

"Todas las verdades son fáciles de entender una vez que han sido descubiertas. El punto es descubrirlas"

"El universo no puede ser leído hasta que hayamos aprendido y nos familiaricemos con los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es humanamente imposible comprender una sola palabra"

CAPÍTULO 2

GRAVITACIÓN EN EL SISTEMA SOLAR

El capítulo anterior tuvo como protagonista al movimiento de objetos cerca de la superficie de nuestro planeta. En este capítulo nos ocuparemos del movimiento de los planetas en nuestro sistema solar.

Siglos de observación de los cielos permitían saber hacia el siglo XVII que las estrellas estaban muy lejanas y eran prácticamente inmóviles, y los planetas Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, que erraban alrededor del sol. La palabra planeta viene del griego y significa errante, y no tiene que ver con *plano* como pudiera pensarse.

Los datos observacionales querían dar cuenta de las diversas posiciones ocupadas por los planetas en diversos instantes y de lo que se trataba era de desentrañar las leyes que regían el movimiento de los astros del sistema solar. Para imaginarnos la dificultad de tal empresa notemos que se pretendía conocer qué curva describen los planetas, haciendo observaciones desde un planeta que describe también la curva que queremos averiguar. Que ese círculo pudo ser roto, es atestiguado por la historia y será considerado como un homenaje al ingenio de la humanidad.

Fue el astrónomo (y astrólogo) alemán Johannes Kepler (1571–1630) quien dio el segundo paso en la comprensión de la gravitación al descubrir una serie de regularidades en el movimiento planetario que podían ser formuladas en términos matemáticos y condensadas en tres leyes empíricas que son las siguientes.

KEPLER 1.- Los planetas giran en órbitas elípticas con el sol en uno de los focos de la elipse.

KEPLER 2.- La línea que va del sol a cualquiera de los planetas barre áreas iguales en tiempos iguales.

KEPLER 3.- El cuadrado del período de cualquiera de los planetas es proporcional a su distancia (promedio) al sol elevada al cubo.

Expliquemos brevemente el significado de estas leyes.

La elipse, al igual que sus primas la parábola, la hipérbola y el círculo, son una familia de curvas conocidas como cónicas que resultan de intersectar la superficie de un cono con un plano. Imaginemos al cono con su base horizontal. Obviamente cualquier plano horizontal cortará al cono creando un círculo, pero si el plano está inclinado, el corte dejará una elipse. Cuando el plano es vertical, la intersección es una hipérbola y la parábola resulta de intersectar al cono con un plano con la misma inclinación que el cono (ver figura 2)

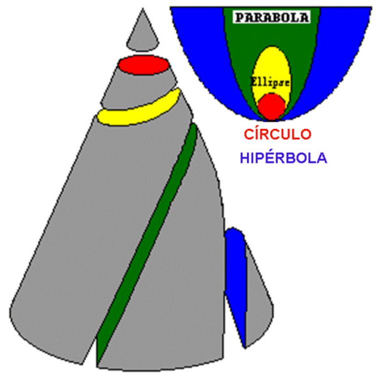

Figura 2. Cortes de un cono con un plano

Esta familia de curvas había sido estudiada por los griegos, en particular por Apolonius, por razones puramente estéticas y sin pensar que pudieran tener una aplicación en el mundo físico. Más adelante conseguiremos más ejemplos de la singular relación entre las matemáticas y la física (véase por ejemplo Rago 1995, Barrow 1998).

Una elipse puede construirse también fijando dos puntos y dibujando la línea tal que la suma de las distancias a los dos puntos sea constante. Los dos puntos se conocen como los focos de la elipse. Kepler, con una enorme paciencia se dedicó a estudiar el caudal de datos observacionales acerca de las posiciones de los planetas que había recabado el danés Tycho Brahe (1546–1601) y descubrió para su sorpresa que los datos se ajustaban a una órbita elíptica (otros objetos como meteoritos pueden describir otras cónicas), y no circular como por prejuicios estéticos se creía hasta ese momento y se lamentaría amargamente de haber poblado la astronomía del "*estiércol de las elipses*". En realidad sus descubrimientos apuntaban sin él saberlo a un desplazamiento del sentido estético que iba de la trayectoria (solución de la ecuación de movimiento) a la ley (ecuación de movimiento) que iba a ser la depositaria de la belleza de la teoría por venir.

La segunda ley de Kepler habla del movimiento del planeta. Cuando su distancia al sol es pequeña, se mueve rápido, cuando se aleja disminuye su velocidad de tal forma que el área que el radiovector que va del sol al planeta barre un área en un lapso dado, independientemente de dónde se encuentre el planeta. Si A denota el área (ver figura) lo que establece la segunda ley de Kepler es que $\frac{\Delta A}{\Delta t} = const.$

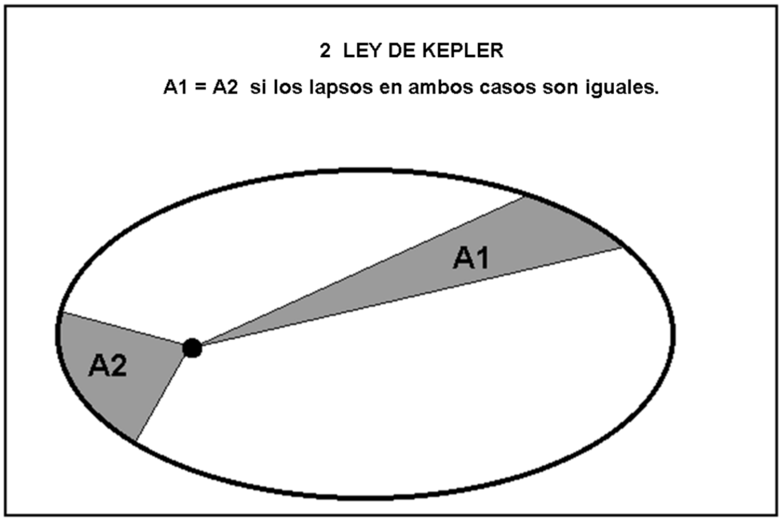

Figura 3. Ley de Kepler acerca de las áreas

La tercera ley de Kepler muestra una relación que cumplen los planetas en su movimiento. Si *T* designa el tiempo empleado en dar una vuelta entera alrededor del sol, es decir, el período y *R* denota su distancia promedio al sol, entonces $T^2 = C R^3$ donde *C* es una constante que es la misma para todos los planetas. De tal suerte, los planetas que estén más alejados tardan más en completar un ciclo. Es fácil ver que una manera ligeramente equivalente y más moderna de esta ley es afirmar que la energía cinética (que es proporcional a R^2 / T^2), varía como *1/R.*

De nuevo nos gustaría enfatizar la importancia de las observaciones en la formulación de leyes de la naturaleza. Tycho Brahe (y muchos otros) observaron. Kepler codificó esas observaciones en unas leyes empíricas y representaron un avance importante en la compresión de los fenómenos celestiales, pero ¿cuál era el carácter de estas leyes? ¿eran independientes unas de otras? ¿podrían ser la expresión particular de una ley más fundamental? ¿porqué eran esas y no otras?

Lo dijo Johannes Kepler

"La diversidad de los fenómenos de la naturaleza es tan grande y los tesoros escondidos en los cielos es tan rico precisamente para que la mente humana nunca carezca de alimento fresco"

La contribución de Newton

Las respuestas a estas preguntas debieron esperar a que de la mano de Newton la humanidad diera el tercer paso en la historia de la comprensión de la gravedad al establecer que las leyes descubiertas por Galileo y que gobernaban el movimiento de los cuerpos cerca de la Tierra y las leyes de Kepler que describían el movimiento de los planetas alrededor del sol, eran expresión de una misma ley básica: la ley de gravitación universal. El sistema propuesto por Newton contribuyó decididamente a la desacralización de los cielos al unificar la física terrestre con la celeste y plasmar la primera gran unificación en la historia de la física, era simple, era tremendamente exitoso a la hora de hacer predicciones y forjó una concepción de nuestra comprensión de la naturaleza cuyas huellas aun prevalecen.

El argumento del inglés es apabullante por lo simple (naturalmente, después que él lo hizo). Supongamos que desde una altura *h* en la Tierra lanzamos horizontalmente un objeto. La partícula lanzada describe una parábola y cae a tierra. Si la lanzamos con velocidades horizontales cada vez mayores, caerá cada vez más lejos pero en el mismo tiempo de caída.

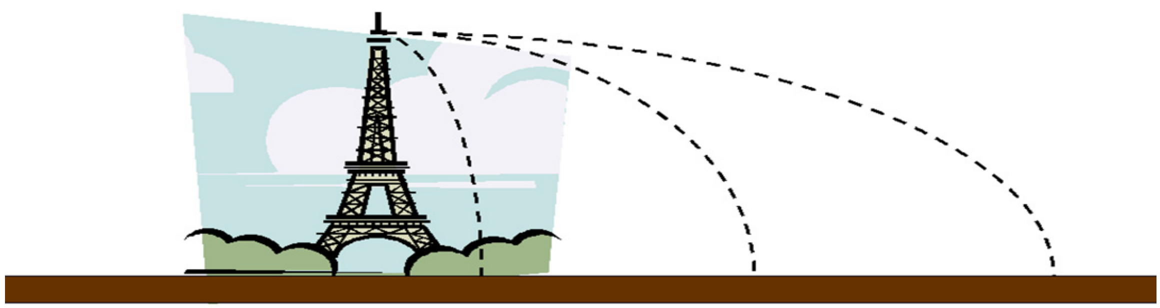

Figura 4. En una Tierra plana, los objetos siempre caen sobre ella

Si la Tierra fuese plana podemos extender el argumento a velocidades arbitrariamente grandes y la bala siempre caerá al suelo, pero en realidad la curvatura de la Tierra va compensando la caída de la piedra cada vez más y si lo que cae la bala es igual a lo que "desciende" la Tierra para alguna velocidad particular, entonces no chocará contra el suelo y dará una vuelta completa. Simplemente se pondrá "en órbita" transformándose en un satélite artificial.

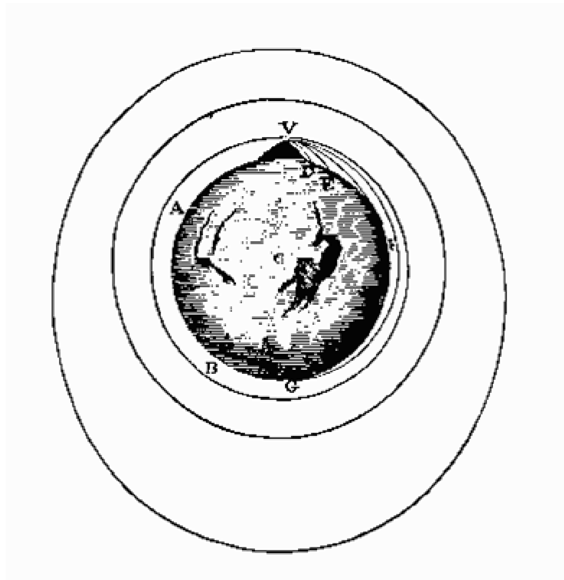

Figura 5. Cómo un proyectil se transforma en satélite

Los físicos tienen poca imaginación y siempre quieren explicar muchas cosas usando pocas. Newton propuso que la misma fuerza que hace que una manzana caiga, es la responsable de mantener a la luna girando alrededor de la Tierra. Recalquemos porque es muy importante que usando la estrategia de Galileo, podemos pensar que el movimiento (prácticamente circular) de la Luna alrededor de la Tierra, es la composición de dos movimientos independientes: uno tangencial que tiende a alejar a la Luna de la Tierra y otro radial, que tiende a hacer que la Luna caiga sobre la Tierra. El movimiento tangencial no requiere explicación, es simplemente inercia. El segundo movimiento es el que produce la aceleración. Como veremos inmediatamente, la aceleración apunta hacia al centro de la órbita que es donde está la Tierra y por tanto la Tierra debe ser la responsable de la aceleración de la Luna y por consiguiente, de la fuerza que la mantiene orbitando.

¿Cómo cambiaría esta fuerza con la distancia a medida que nos alejamos de la Tierra? ¿Se mantendría constante produciendo una aceleración $g \approx 10\, mt/seg^2$ como en la superficie de la Tierra? No lucía demasiado prometedora esta idea. Más bien estaba en el ambiente la idea de una fuerza gravitacional que disminuyese con el cuadrado de la distancia, un comportamiento tal vez sugerido por la manera como cambia la energía luminosa de una fuente.

El plan de Newton puede concebirse así:

- Demostrar usando las leyes de Kepler que al menos para una órbita circular la fuerza debe caer como el inverso del cuadrado de la distancia.
- Comparar el valor la fuerza gravitacional en la Tierra con la que existe a la distancia donde está la Luna. Como la aceleración es independiente de la masa, se trata de comparar la aceleración de una piedra en la superficie de la Tierra que sabemos que es $g \approx 10\, mt/seg^2$ con la aceleración de la Luna, que tendremos calcularla.

- Si en se corrobora que $F \propto 1/r^2$ (el símbolo $\propto$ denota proporcionalidad), ver si en casos más generales esta fuerza conduce a las órbitas elípticas descritas por Kepler.
- Extender a otros casos y hallar otras aplicaciones.

El primer paso del plan es sencillo, consiste en demostrar primero un resultado (ya conocido por Leibnitz): que la aceleración en un movimiento circular uniforme vale $a = v^2/r$.

SECCIÓN AVANZADA 3
ACELERACIÓN EN ÓRBITA CIRCULAR

Consideremos una partícula que se mueve con una rapidez v, uniforme siguiendo una trayectoria circular de radio r. Notemos que el vector velocidad va cambiando de dirección pero su tamaño es constante. Consideremos dos instantes sucesivos muy próximos que etiquetaremos como t y $t + \Delta t$ *y dibujemos el vector velocidad en cada uno de esos instantes, representados por el vector rojo y el azul respectivamente (ver figura 6).*

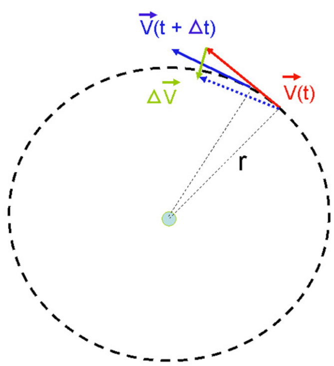

Figura 6. La aceleración en un movimiento circular uniforme

La diferencia de ambos vectores tiene un tamaño Δv *(vector verde) que dividido entre el intervalo* Δt *será el valor de la aceleración.*

Es fácil ver que en el límite cuando los dos instantes sean muy próximos $(\Delta t \to 0)$, *el vector aceleración apuntará hacia el centro, de allí su nombre, aceleración centrípeta. Calculemos la magnitud de la aceleración. Observemos que el triángulo cuyos vértices son el centro y las dos posiciones señaladas, es semejante al triángulo formado por los vectores rojo, verde y azul punteado. De esta semejanza resulta*

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\,\Delta t}{r}$$

De donde tras despejar el cociente $\Delta v/\Delta t$ *, es decir, la aceleración, obtenemos* $a=\frac{v^2}{r}$

A partir de este resultado y de una de las leyes de Kepler, Newton pudo vislumbrar la forma de la fuerza gravitacional: como el cubo del radio es proporcional al cuadrado del período, $R^3 \propto T^2$, resulta que $v^2 \propto 1/r$ (porque el radio es proporcional a la distancia recorrida y el período es el tiempo empleado en recorrerla, de modo que *R/T* es proporcional a la velocidad). Sustituyendo esta dependencia en la relación para la aceleración centrípeta, y recordando que aceleración y fuerza son también proporcionales, obtenemos que $F \propto 1/r^2$. Dándole la vuelta al argumento, Newton percibió que una fuerza que disminuya como el cuadrado de la distancia, debía conducir a las leyes empíricas de Kepler.

Una primera prueba de fuego que debía pasar su propuesta es que la aceleración de la luna debía ser mucho menor que la de una manzana en la superficie de la Tierra, ¿cuántas veces menor? La respuesta es simple: como la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la aceleración también, es decir

$$\frac{a_L}{a_T}=\frac{A/{r_L}^2}{A/{R_T}^2}$$

Donde *A* es la constante de proporcionalidad por ahora desconocida pero irrelevante para este cálculo porque se simplifica. a_T es la aceleración de la manzana en la Tierra y es por supuesto $g = 10 m/seg^2$, mientras que r_L es la distancia Luna – Tierra, unas *60* veces el radio de la Tierra R_T. Un cálculo simple muestra que

$$a_L=\frac{1}{3600}g=0{,}027\frac{m}{seg^2}$$

Dicho en palabras, la aceleración de la Luna en su órbita debería de ser la 1/3600 parte de la de la manzana, porque se encuentra 60 veces más alejada del centro de la Tierra, que la manzana. Como la luna se encuentra a una distancia de 38.400*Km* y da una vuelta completa en 28 días, podemos calcular su velocidad alrededor de la Tierra y usar la relación para la aceleración centrípeta y obtener tras un breve cálculo un valor de $a = 0{,}026 m/seg^2$, un resultado muy cercano al esperado suponiendo una fuerza que cambie como el inverso del cuadrado de la distancia. La propuesta de Newton se corroboraba.

De modo que Newton propone que a fuerza que la Tierra le ejerce a la Luna cumple con $F \propto 1/r^2$ pero además la fuerza debe ser proporcional a la masa de la Luna de modo que la aceleración no dependa de la masa. Por acción y reacción la fuerza sobre la Tierra debe ser también proporcional a la masa de la Tierra y por tanto,

$$F \propto \frac{M_T\, m_L}{r^2}$$

Finalmente, hace falta una constante de proporcionalidad que además acomode las unidades (note que las unidades del lado izquierdo son $gr.m/seg^2$ mientras que las del derecho son $gr^2 . m^{-2}$) Esta constante denotada por la letra G se conoce como constante gravitacional de Newton y como veremos más adelante, es de una importancia fundamental. Naturalmente que la corroboración de la ley del inverso del cuadrado de la distancia fue hecha con la Tierra y la Luna, pero la propuesta de Newton era que cualquier par de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r, se atraen entre sí con una fuerza cuya dirección es a lo largo de la línea que conecta a las dos masas y que vale

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (6)$$

Ejercicio.- Demuestre que la fuerza gravitacional que nos ejerce una enfermera de 70*Kg* separada una distancia de un metro en el momento de nuestro nacimiento, es unas 2000 veces mayor que la que nos ejerce Plutón. Busque datos numéricos en el apéndice.

Algunos comentarios

Observemos que en la forma establecida, la ley de gravitación es ligeramente ambigua: ¿a qué distancia se refiere la letra r en la expresión para la ley? Si idealizamos a los cuerpos como dos partículas puntuales (despreciamos el tamaño de los cuerpos comparados con r), la fórmula es clara. Si los cuerpos son esféricos y con una distribución simétrica de materia, entonces r es la distancia entre sus centros. La obtención de este resultado requiere del cálculo integral y preocupó y ocupó mucho tiempo a Newton. Más de ésto en el siguiente capítulo). Finalmente si los cuerpos tienen una forma arbitraria, hay que considerarlos como formados por partículas puntuales, aplicamos la fórmula para cada par de ellas y sumamos (integramos) por todos los pares.

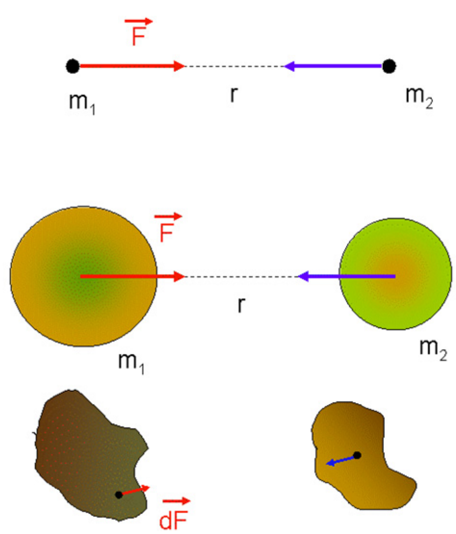

Figura 6. Atracción de diversas formas de materia

El Campo Gravitacional

Los físicos han introducido la noción de *campo gravitacional* en un determinado punto del espacio, como la fuerza que sentiría una partícula de masa *m*, dividida entre la masa, es decir, la aceleración (de cualquier partícula) en ese punto. Dicho en fórmula:

$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}}{m} \qquad (7)$$

Recalcamos, note que el campo gravitacional coincide con la aceleración en cada punto. Notemos también que ahora hemos usado la letra *g* para etiquetar la aceleración (o el campo) en cualquier situación y no solamente en la superficie de la Tierra. Para un cuerpo esférico de masa total *M* y a una distancia *r* de su centro, la magnitud del campo gravitacional vale

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \qquad (8)$$

Y apunta hacia el centro del cuerpo. Aplicado al caso de la Tierra y evaluado en la superficie, obtenemos

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \cong 10\, m/seg^2$$

La Constante gravitacional de Newton

Podemos afirmar ahora que dos elementos determinan el valor de la aceleración con que los cuerpos caen en la superficie de nuestro planeta; uno es circunstancial, la masa y el radio de la Tierra (otros planetas tienen otras masas y otros tamaños), y el otro es fundamental, el valor de la constante gravitacional de Newton, *G*. Es interesante que este valor jamás fue conocido por el propio Newton, lo cual no impidió que se pudieran hacer muchas predicciones. La razón es que si despejamos *G* de la ecuación anterior para calcularla, obtenemos

$$G = \frac{{R_T}^2}{M_T} g \qquad (9)$$

En la época de Newton el radio de la Tierra era conocido (unos 6400 *Km*, el valor de *g* se medía (10 m/seg^2) pero la masa de la Tierra no era conocida de modo que se disponía de una ecuación con dos incógnitas. Si intentaran obtener *G* usando la aceleración que el sol le imprime a la Tierra, hubieran tenido el mismo problema, no conocían la masa del sol. Se requería una medición de la atracción gravitacional entre dos masas conocidas, y la tecnología de la época de Newton no lo permitía. Hubo que esperar a que el físico inglés Henry Cavendish (1731 – 1810) *midiera* en el laboratorio con una precisa balanza de torsión, la fuerza entre objetos de masa conocida para poder determinar experimentalmente el valor de *G*. Su valor es

$$G = 6{,}67 \times 10^{-14} \frac{m^3}{gr.seg^2}$$

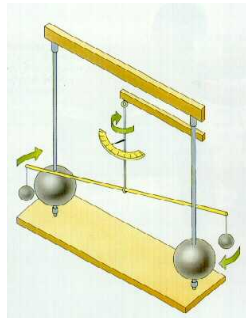

Figura 7. La balanza de torsión de Cavendish

Cavendish, hombre ingenioso, percibió que con el valor numérico de G podía dar vuelta a la ecuación para determinar la masa de la Tierra. Con gran sentido publicitario el título de su trabajo fue "*Pesando la Tierra*"

Ejercicio.- Obtenga como Cavendish, el valor de la masa de la Tierra. Haga una estimación de su densidad promedio.

Ejercicio Resuelto
Un astronauta y una astronauta tienen cada uno una masa m y están inicialmente en reposo y separados una distancia *d* en el espacio intergaláctico. Estime el tiempo que demoran en juntarse debido a la atracción gravitacional.

R.- Resolvamos este problema por un método muy usado por los físicos a la hora de estimar órdenes de magnitud. El método se conoce como análisis dimensional y supone hallar una respuesta aproximada exigiendo solamente concordancia entre las unidades de las magnitudes físicas. Esto quiere decir lo siguiente. Los parámetros relevantes en este problema son: *m*, *d*, y *G*, de tal forma que el tiempo solicitado, que denotaremos por *T* depende de ellos de alguna manera por ahora desconocida. Supondremos que la dependencia es a través de alguna potencia:

$$T = m^x d^y G^z$$

Donde las potencias *(x, y, z)* deben ser determinadas para que el lado derecho tenga unidades de tiempo, como debe ser, puesto que el lado izquierdo representa un tiempo. Para ello, recordemos que las unidades de *G* son $(longitud)^3 \times (masa)^{-1} \times (tiempo)^{-2}$, así, la igualdad resulta

$$T = m^{x-z}\, d^{y+3z}\, T^{-2z}$$

La consistencia de las unidades a ambos lados permite concluir que

$$x - z = 0$$
$$y + 3z = 0$$
$$-2z = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $x = -1/2$, $y = 3/2$, $z = -1/2$

Y por consiguiente la expresión para el tiempo tiene la forma

$$T = \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm}} \qquad (10)$$

Esta expresión correcta desde el punto de vista de las dimensiones físicas no toma en cuenta factores numéricos usualmente del orden de la unidad (como 1/2, o como π), pero sirve para una estimación. El lector con dominio del cálculo está invitado a demostrar que el resultado preciso es $\pi/4\sqrt{2}$ veces el obtenido con el puro análisis dimensional. Note que el resultado es esencialmente la tercera ley de Kepler. Suponiendo astronautas de 67*Kg* de peso, separados 10*m*, y recordando el valor numérico de *G* obtenemos un lapso de más de cinco días para que la atracción gravitacional los una. Hay atracciones más poderosas.

SECCIÓN AVANZADA 4

DE NEWTON A GALILEO

Observemos que de acuerdo con la ley de gravitación universal podemos entender ahora desde una perspectiva más general el porqué del movimiento en la superficie de la Tierra tiene las características que vimos en el primer capítulo. Para ello haremos uso de una relación (también descubierta por Newton) para aproximar el valor de una función cualquiera alrededor de un determinado punto. La fórmula es la siguiente: si *f*(*x*) es una función cualquiera, y *ε* es un valor mucho menor que *x*, entonces

$$f(x_0 + \varepsilon) \cong f(x_0) + \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)_{x_0} \varepsilon + \ldots$$

donde los puntos significan términos tan pequeños que pueden ser despreciados. Usemos esta relación para aproximar el valor de la fuerza gravitacional sobre una masa *m* a una altura *h* respecto del radio de la Tierra, R_T

$$g(R_T + h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \cong \frac{GM_T}{R_T^2} - \left(\frac{2GM_T}{R_T^3}\right)h$$

El primer término de la derecha es la aceleración de gravedad evaluada sobre la superficie de la Tierra, el segundo representa la corrección aproximada a una altura *h,* de modo que podemos escribir que la aceleración de un cuerpo a una altura *h* está dada por

$$g(h) \cong g_0 + \Delta g$$

donde g_0 es la aceleración en la superficie (10 *m/seg*^{2}) y $\Delta g = -2g\left(\frac{h}{R_T}\right)$

Es decir, que la aceleración de objetos en las cercanías de la superficie terrestre a diferentes alturas *h* es constante sólo en la medida en que despreciemos el segundo término en la ecuación anterior. Esta corrección es negativa si *h* es positivo (indicando que la gravedad más arriba en menor que más abajo), y en circunstancias ordinarias es ignorable por pequeña. Por ejemplo, la diferencia del valor de la aceleración entre el suelo y la azotea de un edificio de 100 pisos es de 0,0075 m/seg^2, es decir una diferencia de apenas un 0,07%.

Éxitos de la teoría newtoniana de la gravedad

La teoría newtoniana de la gravitación no sólo explicaba por qué cerca de superficie de la Tierra los objetos se mueven como Galileo había descrito, y permitía deducir y ampliar las leyes de Kepler del movimiento de los planetas unificando la física terrestre con la física celeste. ¿Qué más se le podía exigir? Lo que muy pronto mostró, el signo de las grandes teorías de la física: capacidad predictiva, poder adelantarse a las observaciones y prever sus resultados usando las herramientas de las matemáticas.

Veamos unos cuantos de sus éxitos.

La esfericidad de los astros.

La primera explicación cualitativa es la esfericidad de los astros. Los cuerpos de gran masa son aproximadamente esféricos porque la mutua atracción de sus partes deja a la esfera como la única posibilidad, todas las partes tienden a estar lo más cerca posible del centro. En ocasiones, la existencia de rotación puede deformar la esfericidad. En objetos más pequeños como asteroides o rocas, la gravitación no logra imponer la forma esférica por ser mucho más débil.

Las Mareas.

El fenómeno de las mareas de los océanos es atribuible a la diferencia de la fuerza gravitacional con que la luna atrae a la masa de agua que está más cerca de ella, a la parte sólida de la Tierra y a la masa de agua más alejada (puntos A, B y C respectivamente en

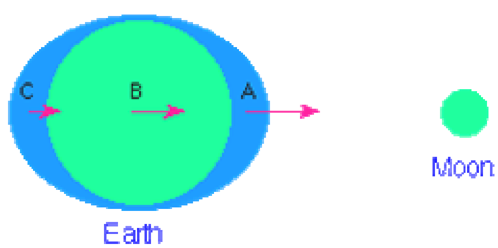

Figura 8. Explicación de las mareas

la figura 8). Esta diferencia se debe a que a que dichos puntos están a diferentes distancias de la luna. Podemos hacer un modelo muy simple en el que la Tierra está uniformemente cubierta por una capa de agua que no tiene fricción con la superficie. En presencia de la luna, la capa se deforma como muestra la figura. A medida que la Tierra rota sobre su eje, cada punto pasa dos veces al día por zonas donde el agua es más profunda. Este modelo sencillo debe hacerse más realista incluyendo los efectos del sol, que son de un 46% más débiles que los de la luna (su masa es mayor pero está mucho mas alejado) y además tomando en cuenta que entre el agua y la superficie de la Tierra sí hay fricción. Las mareas más intensas se dan naturalmente cuando la luna y el sol están alineados con la Tierra.

El Caso Neptuno

En efecto, los datos observacionales que en las primeras décadas de 1800 se tenían de la órbita del planeta Urano, no coincidían exactamente con lo que prescribía la ley newtoniana. ¿Qué hacer, desechar la teoría por no coincidir con los tercos hechos? No, aferrarse a ella y suponer que algo estaba perturbando gravitacionalmente el movimiento del planeta. El astrónomo francés Jean Urbain Leverrier completó sus cálculos en 1846 y afirmó que un planeta aun no descubierto era el responsable de las anomalías de la órbita de Urano y que las matemáticas le indicaban cuál era la posición del presunto planeta. Instó al astrónomo alemán J. G. Galle a que observara en la posición indicada y apenas cinco días después el planeta que pronto se llamaría Neptuno apareció muy cerca de la posición predicha por Leverrier. El descubrimiento del planeta Plutón en 1930 también fue posible gracias a la teoría newtoniana y a la observación de ligeras perturbaciones en la órbita de Urano. Además, la teoría permitió la predicción precisa de eclipses y aparición de cometas. El sistema solar fue comprendido, explicado.

La Masa del Sol

Recordemos que Cavendish pudo calcular la masa de la Tierra (una vez conocido el valor de la constante de gravitación *G*) midiendo la aceleración que la Tierra le provee a un cuerpo cualquiera en su superficie. La idea intuitiva es que el "jalón gravitacional" que siente un cuerpo es una medida cuantitativa de su masa. Exactamente con este razonamiento es fácil determinar la masa del sol. Para ello sólo es necesario saber que la distancia entre la Tierra y el sol, es decir, el radio de la órbita que la aproximaremos a un círculo y no una elipse (el error al hacer esta suposición es muy pequeño) es $r \cong 150.000.000\,Km = 15 \times 10^{10}\,m$ y que da una vuelta en un año y por tanto podemos calcular su velocidad:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \cong \frac{9 \times 10^{11}\,m}{3 \times 10^{7}\,seg} = 3 \times 10^{4}\ m/seg$$

Como la órbita es circular, podemos escribir recordando la expresión para la aceleración centrípeta,

$$\frac{GM_*}{r^2} = \frac{v^2}{r} \qquad (11)$$

donde hemos denotado como M_* a la masa del sol. Observe que en esta expresión no aparece la masa de la Tierra: la aceleración gravitacional es independiente de la masa. De esta fórmula podemos despejar la masa del sol y obtener

$$M_* = \frac{v^2\,r}{G}$$

Y sustituyendo los valores numéricos obtenemos

$$M_* \approx 2 \times 10^{33}\,gr$$

es decir, alrededor de un millón de veces más masivo que la Tierra. Es afortunado que el sol tenga una masa mucho mayor que la de los planetas del sistema solar. Gracias a ello hemos podido suponer exitosamente que el sol no se mueve como reacción a la fuerza gravitacional que le ejercen los planetas y la dinámica del sistema solar resulta ser mucho más sencilla. En realidad la órbita de dos objetos atados gravitacionalmente, es alrededor del centro de masas común al sistema.

La Velocidad de la Luz

La fe en el modelo newtoniano permitió aprender otros aspectos de la naturaleza sin conexión aparente con la gravedad. Por ejemplo, a finales de los 1600's el astrónomo danés Ole Roemer estudiaba el comportamiento de una de las lunas de Júpiter y observó que los instantes en que la luna aparecía luego de estar oculta por Júpiter, se iban desviando cada vez más de lo que era de esperarse de acuerdo con los cálculos, hasta llegar a unos 20 minutos, para luego volver a coincidir con ellos, de una manera periódica, como si el período fuese cambiando. La sugerencia de Roemer es que el período era naturalmente el mismo, pero que en distintas épocas del año la distancia que nos separa de Júpiter cambia, y por tanto la imagen de la luna saliendo del eclipse, tarda lapsos distintos en llegarnos. Roemer fue capaz de estimar por primera vez en la historia el valor de la velocidad de la luz, conociendo la órbita de Júpiter y la de la Tierra alrededor del sol, y por tanto, conociendo la distancia que nos separa de Júpiter. El valor obtenido por Roemer se acercaba razonablemente al que hoy con una sofisticada tecnología somos capaces de medir.

Es necesario recalcar que para la física, comprender un fenómeno es poder deducir su comportamiento en base a ciertos principios o leyes. No quiere decir esto que conocemos hasta el menor de los detalles. Recordemos que Newton no conoció el valor de la constante de gravitación y no sabía de qué esta hecho el sol. Pero sustituía esa ignorancia por el parámetro "masa del sol" que es lo que a efectos de la gravedad lo que interesa para la dinámica del sistema solar. Como hemos resaltado, ese es un procedimiento usual en el proceso de construir modelos de la realidad. Seguirá siendo un asombro para la historia, que el funcionamiento del sistema solar que nos permitió conocer la ley de gravitación universal en el siglo XVIII, sea el mismo que hoy, trescientos años después hacemos y con el que mandamos sondas a diversos planetas. Hoy lo conocemos con más y mejor tecnología, pero su descripción es en lo fundamental, la misma que hiciera Newton.

Las Leyes de Kepler

El sistema de Newton, ley de gravitación más ecuación de movimiento es capaz de reproducir y generalizar los resultados empíricos de Kepler. La ley de las áreas de Kepler es una consecuencia inmediata de la conservación del momento angular de la partícula que representa al planeta, válida porque la fuerza está dirigida hacia el sol, o en términos más generales, porque la fuerza es radial y por tanto el sistema tiene simetría esférica.

La solución de las ecuaciones para la órbita de un objeto moviéndose sujeto a la fuerza de gravedad es una curva cónica: una elipse si la energía del objeto es negativa, una parábola si es nula o una hipérbola en caso de que la energía del objeto sea positiva. Estos resultados permiten deducir como casos particulares las leyes enunciadas por Kepler.

Finalmente, la solución matemática de la evolución del movimiento en el transcurso del tiempo, corrobora la tercera ley de Kepler con la ventaja de expresar la constante de proporcionalidad en términos de la masa del sol, la constante gravitacional y factores numéricos bien determinados.

SECCIÓN AVANZADA 5

DEMOSTRACIÓN DE LAS LEYES DE KEPLER A PARTIR DE LA LEY DE GRAVEDAD

A manera de ejemplo ilustremos cómo puede demostrarse la segunda ley de Kepler a partir de la ley newtoniana.

Supongamos que la posición de un planeta en el instante t está etiquetada por el vector $\vec{r}$ y su velocidad es $\vec{v}$. Durante el pequeño lapso Δt recorre el vector $\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t$. El área que barrió el radiovector es la mitad del paralelogramo generado por los vectores:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\,\Delta t\right|$$

Es decir, la mitad del módulo del producto vectorial entre ambos vectores. De modo que el ritmo al que el radiovector va barriendo áreas, es decir, el área barrida por unidad de tiempo es

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$$

pero el lado derecho es esencialmente la magnitud del momento angular del planeta, definido como $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, si éste es constante en el tiempo, el área barrida también. Demostremos ahora que si la fuerza a la que está sujeta el planeta apunta hacia un centro (el sol) es decir, es radial, entonces el momento angular es constante. Para demostrarlo hallemos la tasa de cambio (la derivada) respecto del tiempo, del momento angular:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

El primer término a la derecha es nulo porque es el producto vectorial del vector velocidad con el momento lineal $m\vec{v}$ y son paralelos. El segundo término también es cero porque $m\,\Delta\vec{v}/\Delta t$ (masa por aceleración) es la fuerza gravitacional que apunta en la dirección radial y por tanto el producto vectorial con $\vec{r}$ se anula. Conclusión, $\Delta\vec{L}/\Delta t = 0$ y demostramos la ley de las áreas de Kepler.

La demostración de las otras leyes de Kepler quedan como un ejercicio para el lector.

El Caso Mercurio

El planeta Mercurio es, como se sabe, el que está más cerca del sol. Los astrónomos del siglo XIX (en particular Leverrier) sabían que su órbita tiene un movimiento residual no previsto por la teoría newtoniana. La pequeñísima anomalía consiste en que la elipse que describe alrededor del sol gira, el perihelio del planeta no está fijo sino que se desplaza un pequeño ángulo con cada vuelta. Ciertamente, Los diversos planetas se perturban unos a otros y en particular se inducen giros en su órbita. Después de tomar en cuenta los efectos de los demás planetas, subsiste un desplazamiento del perihelio de Mercurio de 43 segundos de arco cada siglo (un segundo de arco es la sesenta ava parte de un minuto que a su vez es la sesenta ava parte de un grado). Explicar este efecto se convirtió en dolores de cabeza para muchos astrónomos quienes idearon toda suerte de posibles explicaciones (existencia de un anillo de asteroides, existencia de un nuevo planeta…) pero ninguna explicación fue convincente o gozaba de los favores de las observaciones. Lo que antes había funcionado para Neptuno o Plutón no servía para explicar detalles de la órbita de Mercurio. Los caminos de la ciencia suelen ser curiosos. El efecto Mercurio estaba señalando la necesidad de una teoría más precisa de la gravitación, pero eso no se podía saber antes de 1916.

CAPÍTULO 3
LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La teoría de Newton era un triunfo fastuoso y la confianza en ella y en las habilidades humanas para entender el mundo físico también. No sólo se evidenciaba la existencia de leyes en el sistema solar que podíamos comprender, sino que esas leyes eran las mismas que regían en la Tierra: la teoría de Newton fue la primera teoría unificada: unificaba la descripción del movimiento de los cuerpos cerca de la Tierra provisto por Galileo, con la descripción del movimiento de los planetas alrededor del sol. Pero mucho más que eso. El sistema de Newton habla de cómo se atraen dos masas cualesquiera en cualquier lugar del universo y en cualquier instante o época, y por eso es tan descomunal su capacidad de explicar tanto en base a tan poco.

La teoría parte de unas cuantas suposiciones *naturales* e *intuitivas*, acerca del espacio y el tiempo que establecen el escenario en el que se desarrollará la acción protagonizada por partículas materiales provistas de una propiedad llamada *masa* que de algún modo cuantifica la cantidad de materia que hay en ella. Finalmente la acción está gobernada por fuerzas. Si la gravitación domina la situación física, entonces la ley de gravitación del inverso del cuadrado de la distancia es la ley relevante. Desarrollemos todo esto con algún detalle.

El Espacio

Lo natural y obvio es suponer de acuerdo con la evidencia, que el espacio está descrito por la vieja y noble geometría euclidiana, que tiene tres dimensiones (largo, ancho y alto) y que en cualquier punto podemos erigir un sistema de tres ejes mutuamente perpendiculares, (X,Y,Z) de tal forma que la posición de un punto P_1 se especifica mediante tres números reales (x_1, y_1, z_1) y los de otro punto P_2 mediante otros tres números, (x_2, y_2, z_2) de tal manera que la distancia entre los dos puntos está dada por

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (12)$$

Esta es la esencia de la geometría euclidiana. ¿Por qué tres números y no dos o siete o nueve? La geometría no puede ni debe responder a esa pregunta y hay que asumirla como un hecho de la experiencia, una fatalidad de la vida: el espacio tiene (al menos a escala experimental) tres dimensiones.

Los tres números (x_1, y_1, z_1) se llaman coordenadas cartesianas del punto P_1 y forman las componentes cartesianas del vector de posición $\vec{r}_1$ y similarmente para P_2. El vector que va del punto P_1 al punto P_2 es el vector $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y su magnitud (o su tamaño o su módulo) es precisamente s dada por la expresión de arriba. Las coordenadas de los puntos son artificios para designarlos, una etiqueta que permite nombrarlos, el sistema de coordenadas es igualmente arbitrario, podemos elegir su origen y su orientación como mejor nos parezca, pero la distancia s entre los dos puntos tendrá siempre el mismo valor. Técnica y pedantemente diríamos que s es un invariante bajo traslaciones y rotaciones del espacio euclídeo. También diferentes observadores en movimiento uniforme le atribuirán el mismo número a la distancia entre los dos puntos dados. Es en este sentido que el espacio de la física de Newton es absoluto: la distancia entre dos puntos es la misma para cualquier observador.

Esto es geometría. Vamos ahora a la física. Una partícula material se idealiza con un punto y por eso podemos identificar su posición mediante un vector $\vec{r}$. Pero además a la partícula le atribuimos una propiedad física que es la masa, un número real positivo. Y por si fuera poco la partícula se mueve a medida que pasa el tiempo. El movimiento es la constatación de que en diversos instantes el vector $\vec{r}$ que define la posición de la partícula, va cambiando. Requerimos primero un modelo para el tiempo y ciertamente la humanidad invirtió mucho tiempo en dotarse así misma de una noción científicamente útil del tiempo (ver Rago, Del Tiempo del Mito al Tiempo matemático). Newton identificó el tiempo con la recta real $\Re$ y a cada instante con un número $t \in \Re$, de modo que el lapso o intervalo temporal entre dos instantes es $\Delta t = t_2 - t_1$. Este lapso puede concebirse tan diminuto como se quiera y es lo que permite hacer un análisis diferencial del movimiento en introducir el cálculo como una herramienta que permite tratar con tasas o ritmos de cambio de las coordenadas para definir velocidades, o de las velocidades para definir aceleraciones. A escala de nuestra percepción y de sofisticados experimentos, el tiempo es en efecto una variable continua como nos sugiere la intuición, pero a escalas mucho más pequeñas esto podría no ser así como exploraremos en el último capítulo. El lapso entre dos eventos cualesquiera, o la “distancia temporal” Δt que mide un observador es igual al que mide otro cualquiera, así ellos se estén moviendo entre sí. Esta afirmación es intuitiva y es la expresión del tiempo absoluto de la física newtoniana.

Teniendo el escenario (el espacio euclídeo 3-D y el tiempo absoluto), teniendo los protagonistas (partículas puntuales provistas de masas), sólo falta el guión que les ordene a las partículas moverse en el escenario a medida que transcurre el tiempo, según indica la acción. Y el guión lo provee la interacción que las partículas se ejercen unas a otras, es decir, cada partícula ejecuta el movimiento que le ordenan las fuerzas que las demás le ejercen:

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}_{\substack{otras \\ partículas}} \qquad (13)$$

Si la fuerza relevante al problema considerado es la fuerza gravitacional que la partícula 2 le imprime a la partícula 1, entonces el movimiento de ésta está regido por la ecuación de movimiento

$$m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = G \frac{m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} \hat{r}_{21} \qquad (14)$$

donde $\hat{r}_{21}$ es un vector de magnitud uno, que apunta de la partícula 1 a la 2.

Uno de los grandes méritos de Newton fue establecer en términos precisos que la fuerza que actúa sobre un cuerpo, lo que hace es cambiarle la velocidad, (vea la ecuación anterior) de modo que el valor de ella es para efectos dinámicos, irrelevante y una cuestión de punto de vista de distintos observadores que se muevan entre sí con movimiento uniforme. Esto naturalmente es expresión del hecho ya conocido por Galileo de que el movimiento uniforme es indetectable y que todo observador tiene el derecho de afirmar que él está en reposo y que son los demás los que se mueven respecto a él. Esta afirmación constituye el llamado Principio de relatividad de Galileo y establece la democracia total, es decir, la equivalencia física de todos los observadores que se muevan entre sí con movimiento uniforme: lo importante es entonces la desviación de la uniformidad de la velocidad y por tanto la fuerza debía de vincularse con este cambio de la velocidad. En esto Newton fue enormemente exitoso.

Pero además el sistema newtoniano estableció por primera vez la descripción madura de una interacción básica de la naturaleza: la interacción gravitacional al dar la ecuación de movimiento de una partícula sometida a ella (2^{da} ley) y a la vez "la ecuación de campo" que determina la intensidad del campo gravitacional alrededor de cualquier distribución de materia (ley de gravitación universal). En notación contemporánea estos dos pilares de la descripción de la gravitación se escriben como sigue:

$$
\begin{aligned}
& m\frac{\Delta^2 \vec{r}}{\Delta t^2} = m\vec{g} \\
& \vec{\nabla} \bullet \vec{g} = -4\pi\, G\, \rho
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

En la primera ecuación note que la masa se simplifica, de modo que la aceleración es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su masa, como debe ser de acuerdo con la experiencia. La otra ecuación, la ecuación de campo determina el valor del campo gravitacional $\vec{g}$ en cualquier punto del espacio, en términos de la densidad de masa de la materia (masa por unidad de volumen), que hemos designado por la letra griega ρ. Esta forma es más general que la ley del inverso del cuadrado. El lado izquierdo se conoce como "divergencia del campo" y el hecho de que el lado derecho sea siempre negativo, está diciendo que el campo gravitacional converge alrededor de la materia y es por tanto una fuerza atractiva. Newtonianamente no puede haber repulsión gravitacional.

De nuevo la constante G

Observemos que la constante gravitacional G sirve de enlace entre la fuente del campo gravitacional (representada por la densidad de masa) y el propio campo g, o diciéndolo en términos contemporáneos, es la constante de acoplamiento entre la materia y la gravedad. Ella mide la intensidad intrínseca de la gravitación, más allá de que elijamos masas más grandes o más pequeñas y que las coloquemos más cerca o más distantes una de la otra. Su valor determina cuán fuerte es la gravitación y este valor es el mismo en todas partes del universo y en todo instante. La comprensión que el modelo newtoniano provee, acerca de la interacción gravitacional permitió conocer la primera constante verdaderamente fundamental asociada con las fuerzas de la naturaleza. Después vendrían otras. Podríamos formular algunas preguntas: ¿Por qué G tiene el valor que tiene? ¿No podemos *deducir* su valor de otras teorías? ¿Este valor, es grande o es pequeño?

Estas preguntas son fundamentales. No sabemos por qué G tiene el valor que midió Cavendish, es un dato que debe ser obtenido a través de la observación o el experimento para que el rompecabezas cuadre, es decir, para que la teoría se ajuste a las observaciones. Tras los intentos de construir teorías unificadas de las interacciones, se esconde la pretensión de obtener el valor de G a partir de principios básicos, pero hasta ahora ha sido imposible y hay que asumir el su valor, como una propiedad de nuestro universo. De hecho, manteniendo las mismas leyes fundamentales, si imaginamos que la constante gravitacional tuviese otro valor numérico, obtendríamos una realidad física absolutamente distinta de la que observamos. Por ejemplo, si G fuese mayor, los centros de las estrellas estarían a una mayor presión y por tanto a una mayor temperatura y hubiesen consumido su combustible y estarían apagadas. Las órbitas de los planetas serían altamente inestables, la expansión misma del universo hubiese sido muy diferente.

La constante gravitacional tiene un valor pequeño, es decir, la fuerza gravitacional es muy débil comparada con otras fuerzas fundamentales. Por ejemplo, imaginemos dos protones a una distancia d uno del otro. Como tienen masa (que está determinada experimentalmente) se atraen con una fuerza newtoniana dada por la ecuación (6). Pero como tienen carga eléctrica (que también está determinada experimentalmente) se repelen con una fuerza coulombiana. ¿Cuál es la relación entre ambas fuerzas? Recordemos que la ley de Coulomb establece que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales de valor e, tiene una magnitud que es

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^2}$$

Donde ε_0 es una constante asociada con las fuerzas eléctricas. Con esto a mano, un cálculo simple da la respuesta: $F_e \approx 10^{36} F_g$

Ejercicio.- Obtenga en detalle y con más precisión la relación entre las fuerzas sugerida en el párrafo anterior. Observe que el resultado es independiente de la separación entre las partículas. Busque al final del texto los valores de las constantes relevantes.

Como puede verse, la fuerza gravitacional es colosalmente débil comparada con la eléctrica, por eso a escala molecular, atómica o subatómica, podemos ignorar totalmente a la gravedad, ella simplemente no es importante a esa escala. Entonces, si es tan débil, ¿cómo puede hacer que caigan manzanas, que se formen las mareas? ¿Cómo puede controlar la órbita de la luna alrededor de la Tierra, y la de la Tierra y los demás planetas alrededor del sol? ¿Cómo puede crear galaxias de miles de millones de estrellas, y cúmulos de galaxias y en fin gobernar la expansión de todo el universo? La respuesta es asombrosamente simple. Sucede que las otras fuerzas fundamentales o son de corto rango como las fuerzas nucleares que decaen exponencialmente con la distancia y a longitudes mayores a un núcleo no tienen ningún efecto, o son como la fuerza eléctrica tanto de repulsión como de atracción y por tanto se cancela por pares cuando la materia es eléctricamente neutra. La gravedad en cambio actúa acumulativamente, toda minúscula fracción de materia atrae a otra y la suma de estas pequeñísimas atracciones tiene efectos macroscópicos a gran escala. Lo verdaderamente importante es que no hay atributo alguno en la materia que la haga inmune a la gravedad: toda partícula siente el efecto de la gravedad y además lo siente de la misma manera, es decir, sufre la misma aceleración que otra colocada en el mismo sitio, independientemente de su masa. Además toda partícula crea un campo gravitacional a su alrededor. Como veremos más adelante, incluso la luz o en general la radiación electromagnética siente los efectos de la gravedad. Es en ese sentido que la ley de gravitación es universal.

DE LA ECUACIÓN DE CAMPO A LA LEY DEL INVERSO DEL CUADRADO
(Para los que manejen cálculo vectorial)

Veamos cómo puede deducirse la ley de gravitación en su forma usual a partir de la ecuación de campo. Una expresión equivalente a la ecuación de campo y que es por tanto otra forma de expresar la ley de gravitación universal, es

$$\oint \vec{g} \bullet d\vec{S} = -4\pi GM \qquad (16)$$

El lado izquierdo se llama el flujo del campo sobre una superficie (imaginaria). El vector $d\vec{S}$ es el elemento de superficie, y M es la masa encerrada por la superficie. Supongamos que la el cuerpo gravitante tiene forma esférica con una densidad de masa uniforme. Entonces el campo gravitacional $\vec{g}$ es radial y apunta hacia el centro, por simetría, de modo que eligiendo una superficie de integración esférica de radio r alrededor del cuerpo, los vectores $d\vec{S}$ y $\vec{g}$ son antiparalelos y podemos hacer el producto y g sale de la integral, es decir,

$$-g(r)\oint dS = -4\pi GM$$

La integral es el área de la esfera, de modo que simplificando, obtenemos finalmente,

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \qquad (17)$$

Que es la magnitud del campo que corresponde a la fuerza del inverso del cuadrado de la distancia.

Ejercicio.- Argumente usando la ecuación de campo en su forma (16) que el campo gravitacional que crea un casquete esférico de masa total M en el interior del casquete, es cero.

Ejercicio Resuelto.- Obtenga el campo gravitacional como una función de la distancia al centro, en el interior de una esfera de densidad uniforme, de masa M y radio R .

Para obtener el campo, considere la figura siguiente,

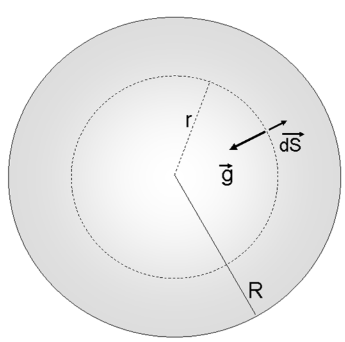

Figura 9.-

Usemos la ley de gravitación en la forma de la ecuación (16) y elijamos una superficie imaginaria esférica situada a una distancia r del centro. Por simetría, el campo gravitacional es radial y apunta al centro mientras que el elemento de superficie apunta hacia fuera, de modo que la integral del lado derecho es fácilmente resoluble y el resultado es $-g(r)4\pi r^2$. Por su parte, el lado izquierdo es proporcional a la masa encerrada por la superficie de integración. Puesto que densidad es igual a la masa entre el volumen, la masa encerrada vale la densidad ρ multiplicada por el volumen $4/3\ \pi r^3$, de modo que

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Como la densidad es constante la podemos expresar en términos de la masa y el volumen de la toda la esfera. Luego de sustituir y simplificar, obtenemos finalmente,

$$g(r) = \frac{GM}{R^3}r$$

Note que la intensidad del campo gravitacional aumenta linealmente con la distancia al centro. En el centro, el campo vale cero, resultado intuitivo, por simetría, y asume un valor máximo en la superficie, cuando $r = R$. A partir de allí decrece según la ley del inverso del cuadrado de la distancia, ecuación (17).

Observe que si desde la superficie de la Tierra dejamos caer una partícula en un túnel muy delgado que pase por el centro de la Tierra y siga hasta el otro borde de la Tierra, la partícula oscilaría pasando por el centro con velocidad máxima y llegando a la superficie con velocidad nula.

Ejercicio.- Calcule la frecuencia y el período con que una partícula oscila en el túnel citado en el párrafo anterior. Estime numéricamente estas magnitudes. Resuelva el problema usando análisis dimensional y luego usando las leyes de Newton.

Respuesta parcial: $\omega = \left(GM/R^3\right)^{\frac{1}{2}}$

Campo Gravitacional y Energía

Los físicos han descubierto que hay sistemas físicos que tienen algunas cantidades asociadas, que a pesar de que el sistema evolucione a medida que pasa el tiempo, estas cantidades no cambian. A estas cantidades se les llama (en un alarde de imaginación) cantidades conservadas y son naturalmente muy importantes porque permiten conocer algo del sistema así no se conozcan los detalles. La existencia de estas cantidades además está asociada a la existencia de simetrías que posea el sistema físico. Observemos que si un sistema posee una simetría, eso significa que le podemos hacer alguna transformación y el sistema permanece invariante. No es descabellado que a cada transformación de simetría de un sistema físico, le corresponda una cantidad conservada. Este resultado está amparado por rigurosos teoremas matemáticos.

Unas secciones atrás nos topamos con una de estas cantidades, el momento angular de un sistema formado por dos masas interactuando gravitacionalmente. Como la interacción gravitacional newtoniana es radial, tiene simetría esférica, de modo que una transformación que rote el sistema como un todo, es una transformación de simetría que deja al sistema invariante. Como consecuencia, se conserva el momento angular (con sus consecuencias: el sistema orbita sobre un plano fijo, la ley de áreas…)

En esta sección hablaremos de la conservación de la energía para un sistema de dos partículas que se atraen mutuamente. La energía total (cinética más potencial convenientemente definida) de ese sistema no se modificará en el transcurso del tiempo. Demostremos este resultado para lo cual es necesario usar herramientas del cálculo diferencial. Naturalmente que partiremos de las ecuaciones de movimiento de las masas. Denotaremos a las masas por m_1 y m_2, los vectores que indican sus posiciones respectivas, serán $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ y el módulo de este vector, es decir la distancia que las separa es r. Sus vectores velocidad son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, de modo que las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}\right) \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r}\right) \end{aligned} \qquad (18)$$

Hemos escrito los vectores unitarios la diferencia de los vectores de posición dividido entre su módulo. Note que para cada partícula apuntan en direcciones opuestas, como debe ser por acción y reacción. Multipliquemos la primera de estas ecuaciones por $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$ y la segunda por $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$, y sumemos los resultados,

$$m_1\vec{v}_1 . \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\vec{v}_2 . \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{1}{r}\left[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \frac{d\vec{r}_1}{dt} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \frac{d\vec{r}_2}{dt}\right] \qquad (19)$$

Como por definición $\vec{v}_1 . \vec{v}_1 = {v_1}^2, \;\; \vec{v}_2 . \vec{v}_2 = {v_2}^2, \;\; y \;\; (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = r^2$, podemos obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 . \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \frac{1}{2}({v_1}^2), \\ \vec{v}_2 . \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \frac{1}{2}({v_2}^2), \\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dt}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Sustituyendo en la ecuación (19), y rearreglando, obtenemos,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}\right) = 0$$

Esta ecuación evidencia que el término adentro del paréntesis no cambia con el tiempo, es pues una constante de movimiento. Es a este término que llamamos energía del sistema formado por las dos masas interactuando gravitacionalmente. Si la designamos por E, entonces,

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\ 2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\ 2} - \frac{G m_1 m_2}{r}, \qquad (21)$$

Observemos que los dos primeros términos a la derecha corresponden a las energías cinéticas de cada cuerpo (siempre positivas), mientras que el tercer término es la energía potencial de interacción (siempre negativa indicando que se trata de una fuerza atractiva), de modo que las energías cinéticas pueden aumentar o disminuir a expensas de la energía potencia. Supongamos por simplificar un tanto el análisis que la masa de uno de los cuerpos, llamémosla M, es muchísimo más grande que la masa del otro, entonces su velocidad (y por tanto la energía cinética será nula), su centro suponiéndolo esférico coincidirá con el centro de masas de modo que la cantidad r es la distancia del otro cuerpo a su centro. En ese caso la energía del sistema es

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}, \qquad (22)$$

Si la energía del sistema es negativa (y esto no tiene ninguna implicación esotérica), puesto que la energía cinética siempre es positiva, entonces r no puede ser arbitrariamente grande y por consiguiente la órbita está acotada. En términos precisos, note que

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[\frac{GmM}{r} + E\right] \qquad (23)$$

La distancia máxima que se puede alejar m ocurre cuando v se anula y corresponde al valor

$$r_{\max} = \frac{GmM}{-E}$$

Recuerde que E es negativa de modo que la distancia es positiva como debe ser.
La conservación de la energía permite deducir también otra relación importante. Supongamos que un cuerpo se lanza radialmente desde la superficie de otro con una velocidad v tal que logre apenas escapar de la atracción y llegue a infinito con velocidad nula. Queremos calcular cuál es esa velocidad de escape. La ecuación de conservación nos permite escribir:

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} \qquad (24)$$

El lado izquierdo es la energía total en el momento del despegue (R es el radio correspondiente a la superficie de M) mientras que el lado derecho es la energía en cualquier punto genérico. Queremos evaluar el lado derecho cuando el punto está a infinita distancia y que m llegue allí con la menor velocidad posible (cero), de modo que el lado derecho es nulo y la velocidad de escape resulta ser

$$v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R} \qquad (25)$$

Por ejemplo, si sustituimos la masa y el radio por los valores correspondientes a la Tierra, obtendremos que la velocidad de escape es alrededor de 11*Km/seg*, y por tanto un cuerpo (¡no importa su masa!) lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra (despreciando la fricción del aire) con una velocidad menor, caerá de nuevo al suelo, pero si su velocidad es mayor que la velocidad de escape, logrará vencer a la atractiva gravedad y escapará.

Ejercicio
Obtenga el valor numérico de la velocidad de escape en la Tierra y en el sol.

Por simetría, es fácil convencerse de que este mismo valor representa la velocidad que tuviera un cuerpo (independientemente de su masa) si lo dejamos caer desde infinito sin velocidad inicial, cuando esté a una distancia *R* del cuerpo que lo atrae.

Huecos Negros Newtonianos
¿Qué pasa si la masa del astro y su radio son tales que la velocidad de escape es mayor que la velocidad de la luz? En 1783, el reverendo inglés John Mitchel argumentó que la luz no podría escapar y que a partir de alguna distancia, sería invisible. El radio que tendría ese astro de masa M para que la luz no pudiera escapar de él, sería

$$R = \frac{2GM}{c^2} \qquad (26)$$

Por ejemplo, para el sol, la fórmula anterior da un valor de apenas $3Km$. A finales del siglo XVIII, el matemático y físico francés Pierre Simón Laplace redescubrió este resultado y lo incluyó en las dos primeras ediciones de su obra Exposición del Sistema del Mundo, afirmando que *"la fuerza de un cuerpo gravitante pudiera ser tan grande que ni la luz escaparía de él"*. Luego los experimentos de difracción de Thomas Young impusieron la teoría ondulatoria de la luz y las leyes de Newton no establecen cómo una onda responde a un campo gravitatorio, de modo que Laplace excluyó el cálculo de las ediciones posteriores.
En 1916, a meses de haber sido publicada la relatividad general, Karl Schwarzschild obtuvo la solución a las ecuaciones de la gravedad correspondientes a un cuerpo esférico no rotante y donde aparece exactamente la superficie de radio $R_S = 2GM/c^2$ como una superficie de corrimiento al rojo infinito, que es la manera técnica de afirmar que la luz no puede salir de la región interior, dándole vigencia a la imaginación newtoniana de Mitchell y Laplace. Los trabajos posteriores han permitido clarificar muchos aspectos de estos *agujeros negros,* término acuñado por John Wheeler en 1968. Como veremos más adelante la física de los agujeros negros es un área de gran actividad y las evidencias observacionales de su existencia son cada vez más convincentes.

5.- BIBLIOGRAFÍA

Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law,* The MIT Press, 1965.

Richard P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics,* Addisson Wesley, 1964.

Héctor Rago, *Del Tiempo del Mito al Tiempo Matemático,* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VI, N° 1, 1999. También en http://www.emis.de/journals/BAMV/vol6.html

Héctor Rago, *La Ruptura Imposible,* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. II, N° 2, 1995. http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol2/vol2n2p41-71.pdf

Héctor Rago, Capítulo "*Newton y el Universo Físico*" con Luis Herrera, en *Newton,* ed. Talleres Gráficos, ULA, 1992.

Héctor Rago, *Hablando de Relatividad,* Ediciones Celciec, 2002.

Algunas Constantes y Parámetros

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2{,}99 \times 10^{10}\ \frac{cm}{seg}$
Constante Gravitacional de Newton	$G = 6{,}67 \times 10^{-8}\ \frac{cm^3}{gr\ seg^2}$
Masa del electrón	$m_e = 9{,}1 \times 10^{-28}\ gr$
Masa del protón	$M_p = 1{,}67 \times 10^{-24}\ gr$
Carga del protón	$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ Coul$
Constante eléctrica	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ newt.m^2\ coul^{-2}$
Radio de Bohr (tamaño de un átomo)	$a_0 = 0{,}53 \times 10^{-8}\ cm$
Masa del Sol	$M_{sol} = 2 \times 10^{33}\ gr$
Masa de Plutón	$M_{Plut} \cong 1{,}3 \times 10^{22}\ Kg$
Distancia Tierra-Plutón	$D \approx 6 \times 10^9\ Km$
Constante de Hubble	$H_0 = 68 \frac{Km}{seg\ \ MPc}$
Edad del Universo	$t_U \approx 14 \times 10^9\ años$