INTRODUCCIÓN A LA COSMOLOGÍA

Héctor Rago
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

July 27, 2004

1 Introducción

La cosmología es la ciencia del universo considerado como una sola entidad, con el auxilio y métodos de la física y de la astrofísica. No es exagerado afirmar que el cambio más trascendente que se ha producido en la compresión del universo desde Aristóteles, tuvo lugar en el siglo XX, al establecerse de manera incontrovertible que vivimos en un universo que ha evolucionado dramáticamente de acuerdo a leyes y principios que la física y la astronomía nos han permitido conocer.

En efecto, los espectaculares avances de la física atómica, nuclear y de altas energías, y la comprensión cada vez más profunda de la física de los campos gravitacionales, apoyados por un caudal cada vez mayor de datos cada vez más precisos provistos por una sofisticada tecnología observacional, han desembocado en un marco simple, coherente y empíricamente exitoso: el modelo cosmológico estándar, o el modelo del big bang caliente.

La cosmología estándar nos ofrece una imagen cuantitativa de la evolución del universo desde fracciones de segundo contadas a partir de un origen singular hace unos 13 millardos de años, en una fase ultradensa y caliente expandiéndose y enfriándose hasta el presente. Las características físicas del universo en cada época dependen fundamentalmente del régimen de temperaturas prevalente en esa época, lo que a su vez determina el contenido material del universo y los procesos físicos que en él tienen lugar.

El cúmulo de datos cosmológicos hoy disponibles que constriñen la libertad de los modelos que formulan los teóricos, apoya directa e indirectamente el modelo del big bang, sin que existan evidencias o datos inconsistentes con el modelo. Esto no significa que conozcamos todos los detalles, ni siquiera que podamos alguna vez conocerlos. Hay grandes problemas abiertos aún (afortunadamente) en cosmología, o que requieren descripciones más detalladas y confiables: la naturaleza de la materia oscura, los detalles de cómo se formaron las estructuras cósmicas a gran escala, el problema de la curvatura del universo asociado con su evolución futura, o hacer menos incierta la física de los primeros instantes o incluso lo que oncurrió *en* el big bang, son algunos problemas fundamentales no resueltos que hoy ocupan la atención de los cosmólogos. Sin embargo, las evidencias de que nuestro universo evolucionó de acuerdo con la prescripción general dada por el modelo estándar, son incontrovertibles. Algunos de los éxitos más notables del modelo del big bang son:

- La expansión isótropa y uniforme que detectamos con los grandes telescopios.
- La abundancia relativa de elementos ligeros sintetizados durante los 200 primeros segundos posteriores al big bang.
- Las características de la radiación cósmica de microondas, que nos brinda información de cuando el universo tenía el 0,2% de su edad actual.

Objetivos

El modelo del big bang está en el punto triple de la física cuántica, la física estadística y la relatividad general; sin embargo, es notable cómo la gravitación newtoniana puede proporcionar ecuaciones idénticas a las de la relatividad permitiendo así obtener una descripción del universo, sin tener que recurrir al formalismo y las sutilezas de la relatividad.

El objetivo de este capítulo es proveer un sabor cuantitativo de la evolución del universo según el modelo estándar, manteniendo los conceptos de la relatividad, reducidos al mínimo y procurando ser autocontenido, módulo el conocimiento elemental de física básica. Tan solo hacia el final abordaremos algunos problemas que requieren de los conceptos de la relatividad.

La constante gravitacional de Newton será denotada como es usual, por G. Un subíndice '$_0$' en las magnitudes, denotará la evaluación de la magnitud correspondiente en el instante actual t_0. Derivación respecto del tiempo será denotada con un punto.

2 La Expansión del universo

Una suposición fundamental para comenzar a construir modelos del universo es que a gran escala la distribución de materia es *homogénea* e *isótropa.* Este postulado, conocido con el nombre de Principio Cosmológico, resume de algún modo la situación observacional y significa lo siguiente: homogéneo se refiere a que las estructuras que atestiguamos, son irregularidades locales y que en promedio la materia-energía del universo está repartida uniformemente. Se cree que la escala de uniformidad es de unos 300 millones de años-luz, es decir, un cubo imaginario de 300 millones de años-luz de arista, contendrá una muestra representativa del universo independientemente de dónde lo coloquemos. Que nuestro universo es isótropo significa que las observaciones realizadas desde un punto cualquiera del universo, no dependen de la dirección en que sean hechas. Si homogeneidad significa que una traslación espacial arbitraria del sistema de coordenadas es inobservable, isotropía significa que una rotación arbitraria de los ejes coordenados, es inobservable.

Ejercicio 1.- Isotropía desde cualquier punto implica homogeneidad.

Suponga que la densidad de materia del universo en un instante, es isótropa, es decir $\rho(\vec{r},t) = \rho(\mid \vec{r} \mid, t)$, donde $\vec{r}$ se mide desde un punto arbitrario. Demuestre que ρ depende exclusivamente del tiempo y no de la posición. ¿Es la recíproca cierta, es decir, homogeneidad implica isotropía? Consiga un contraejemplo.

2.1 *El Factor de Escala R(t)*

El principio cosmológico impone fuertes restrcciones a la manera como puede expandirse el universo. Para ver esto imaginemos en un instante t_1 que tres partículas forman un triángulo equilátero de longitud l_1. Un tiempo posterior t, gracias a la expansión las partículas se han separado, pero el principio cosmológico determina que deben seguir formando un triángulo equilátero, por lo cual se debe cumplir que $l(t) \sim R(t)$, o más exactamente

$$l(t) = l_1 \frac{R(t)}{R(t_1)} \tag{1}$$

Donde $R(t_1)$ es un valor arbitrario (e inobservable). En palabras, el efecto de la expansión es re-escalar las distancias por un factor (de escala) que sólo depende del tiempo. Similarmente las áreas se escalan por $R^2(t)$ y los volúmenes por $R^3(t)$. La dependencia explícita de R como función de t depende esencialmente del contenido material que propongamos como constituyente del universo.

La Ley de Hubble

Calculemos cuál es la velocidad de separación debida a la expansión, entre dos partículas dadas. Derivando respecto del tiempo la ecuación (1), encontramos,

$$\dot{l}(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t_1)} l_1 = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} l(t)$$

definiendo el *parámetro de Hubble* como

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{2}$$

la ecuación anterior resulta

$$v(t) = H(t)\, l(t) \tag{3}$$

Esta relación representa (una de las formas de) la Ley de Hubble, de acuerdo con la cual la velocidad de separación entre dos galaxias es proporcional a su distancia. La velocidad con que hoy, en t_0, se separan las galaxias de nosotros depende del valor de la '*constante*' de Hubble evaluada hoy, H_0. Como veremos, es uno de los parámetros cosmológicos más relevantes.

2.2 *Corrimiento al rojo cosmológico*

Puesto que el factor de escala controla las dimensiones lineales, podemos pensar en la expansión de dos formas equivalentes: En la primera, la materia distribuida uniformemente sse expande en un espacio fijo. En la segunda opción, podemos imaginarnos a las partículas ancladas en un espacio que se estira de acuerdo con la ley de Hubble. Esta segunda interpretación está más acorde con la noción relativista. Es claro entonces que la longitud de onda λ de un fotón debe escalarse como R, es decir que si un fotón es emitido en una galaxia en el instante t_1 y recibido por nosotros en el instante t_0, debe cumplirse que

$$\frac{\lambda_0}{R(t_0)} = \frac{\lambda_1}{R(t_1)}$$

Podemos introducir el cambio fraccional de longitud o corrimiento al rojo $z = \Delta\lambda/\lambda$, con lo que obtenemos

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \tag{4}$$

Por ejemplo, cuando detectamos luz de un quasar con un corrimiento al rojo $z = 5$, sabemos que la luz fue emitida cuando el universo era 6 veces más pequeño que hoy, o que mientras la luz viajaba hasta nosotros, el universo se expandió en un 600%.

Ejercicio 2.- La expansión atenúa la velocidad peculiar.
Imagine una partícula que se mueve con velocidad v_1 respecto una galaxia típica que sigue la expansión de Hubble. Demuestre que un segundo observador situado a una distancia $v_1(t)\,dt$ del primero, le asigna a la partícula una velocidad dada por $v(t) = (R_1/R(t))\,v_1$.

3 Materia y Radiación

Un modelo de universo supone un contenido material particular, cuya mutua atracción gravitacional determina al factor de escala $R(t)$. El contenido material que supondremos es materia no relativista, radiación electromagnética y aún formas más sutiles como la energía del vacío (constante cosmológica). La dependencia del factor de escala con el tiempo dependerá de la proporción de estos elementos.

3.1 *Ecuación de estado*

Designaremos por $\rho(t)$ la densidad de masa, de tal forma que la densidad de energía es $\rho(t)\,c^2$. La presión de la materia y/o radiación se denotará por $p(t)$. Suponiendo que la transferencia de calor no es cosmológicamente importante, la primera ley de la termodinámica (conservación de la energía) establece que

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dW}{dt} = 0 \tag{5}$$

donde U es la energía interna dada por $U = \rho c^2\,V$ donde V es el volumen; y W es el trabajo realizado, $dW = F\,dr = p\,dV$. Entonces la ecuación (5) puede ser escrita como

$$\dot{\rho} c^2\,V + \rho c^2\,\dot{V} = -p\,\dot{V}$$

Notemos que el volumen $V \sim r^3 \sim R^3$ y por tanto

$$\dot{\rho} = -3(\rho + \frac{p}{c^2})\frac{\dot{R}}{R} \tag{6}$$

3.2 *Materia no relativista*

Es sencillo ver que la presión causada por materia no relativista es despreciable frente a la densidad de energía. En efecto la presión (momento por unidad de tiempo por unidad de área) es $p/c^2 \sim \frac{m}{Vol}\frac{v^i}{c}\frac{v^j}{c}$ mientras que la densidad de masa $\rho \sim \frac{m}{Vol}$. Puesto que $v^i \ll c$, podemos tomar $p_{mat} = 0$ como ecuación de estado para la materia. En este caso la ecuación (6) resulta $\rho_{mat} \sim R^{-3}$ o escrito de otra forma,

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 \tag{7}$$

3.3 *Radiación*

Podemos establecer la ecuación de estado correpondiente a la radiación recordando que en un volumen $V \sim L^{\frac{1}{3}}$ las frecuencias posibles de ondas electromagnéticas son

$$\nu = \frac{n}{2L}c \tag{8}$$

Usando la ley de Planck $U_{rad} = h\nu$, resulta

$$U_{rad} = \frac{n}{2}chV^{-1/3}$$

y puesto que $p_{rad} = -\frac{dU_{rad}}{dV}$, obtenemos

$$p_{rad} = \frac{1}{3}\rho_{rad}\, c^2 \tag{9}$$

que es la ecuación de estado buscada. Introduciendo este resultado en (6) luego de integrar, obtenemos $\rho_r \sim R^{-4}$, es decir,

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^4 \tag{10}$$

Ejercicio 3.- Integrando la ecuación de conservación.

Demuestre que la ecuación de conservación de la energía, (6) puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -\frac{p}{c^2}\frac{d\,(R^3)}{dt} \tag{11}$$

Integre esta ecuación suponiendo que la ecuación de estado es $p = \gamma\rho\, c^2$. Cuando $\gamma = 0$ (materia) y cuando $\gamma = 1/3$ (radiación) se deben reproducir los resultados de las ecuaciones (7) y (10) respectivamente. Cuando $\gamma = -1$ la ecuación de estado es $p_{vac} = -\rho_{vac}c^2$ que corresponde a la presión y densidad del vacío, como veremos más adelante. El resultado obtenido afirma que la densidad del vacío no cambia con R, es decir, se mantiene constante durante la expansión.

4 Dinámica del universo

En esta sección obtendremos las ecuaciones que rigen la evolución de un universo homogéneo e isótropo. La derivación la haremos en términos newtonianos, pero con algunas suposiciones razonables, los resultados son idénticos a los de la relatividad general. Recientemente se han descubierto evidencias de que la expansión sufre una fase de aceleración, lo que sugiere la existencia de una constante cosmológica no nula, por lo que debemos incluirla en la discusión.

4.1 *Ecuaciones de Friedmann*

Imaginemos una esfera de materia/radiación uniforme, de densidad $\rho(t)$. Respecto de un origen cualquiera, a una distancia r, una partícula de masa m sufrirá el efecto de la fuerza gravitacional debido a la masa contenida en la esfera de radio r, es decir,

$$F_g = -G\frac{mM}{r^2} \tag{12}$$

Incluiremos también una fuerza repulsiva de largo alcance y cuya forma es

$$F_{rep} = \frac{m\Lambda}{3}r \tag{13}$$

donde Λ es una constante denominada constante cosmológica con unidades de seg^{-2}, y el factor 1/3 es convencional. El potencial asociado a esta fuerza es obviamente $U_v = -\frac{1}{2}\ \frac{\Lambda}{3} r^2$, con lo que la ecuación de conservación de la energía para la partícula de masa m, es

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{Gm\, M}{r} - \frac{m}{2}\ \frac{\Lambda}{3} r^2 = E = \text{constante}$$

Usando que $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, y dividiendo la ecuación por $mr^2/2$,obtenemos

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2E}{mr^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{14}$$

Finalmente, como $r(t) = l_1 \frac{R(t)}{R(t_1)}$, se deduce que

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{R}}{R}$$

más aún, podemos elegir el valor arbitrario de $R(t_1)$ de tal manera que

$$\frac{2E\, R^2(t_1)}{ml_1^2} = -k\, c^2$$

donde el parámetro $k = 1, 0, -1$, cuando $E < 0, = 0, > 0$ respectivamente. con lo que la ecuación resulta

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k\, c^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{15}$$

Por la interpretación del parámetro k en relatividad, nos referiremos a universos con secciones espaciales esférica, plana o hiperbólica respectivamente.

Derivando respecto del tiempo la ecuación (15), y utilizando la ecuación de conservación (6), se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\, R + \frac{\Lambda}{3} R \tag{16}$$

Ejercicio 4.- Deducción de la segunda ecuación de Friedmann.

Complete los pasos para deducir la segunda ecuación de Friedmann.

Las ecuaciones anteriores, (15) y (16) son las ecuaciones básicas que controlan la dinámica del modelo de universo y se conocen con el nombre de ecuaciones de Friedmann. Juntas, garantizan la ley de conservación, ecuación (6). A pesar de que fueron obtenidas con un razonamiento newtoniano, son idénticas a las que provee la relatividad general, aunque la interpretación es en algunos aspectos, diferente de la que presentamos aquí.

Ejercicio 5.- La Ecuación de Estado del vacío

Escriba las dos ecuaciones de Friedmann en ausencia de materia y considerando una densidad del vacío definida como $\rho_{vac} \equiv \Lambda/8\pi G$, además de la presión del vacío, p_{vac}. De estas dos ecuaciones concluya que la ecuación de estado del vacío, es $p_{vac} = -\rho_{vac}\, c^2$

Comentarios

- Note que en la segunda ecuación de Friedmann, ecuación (16), el término $\rho + 3p\,/c^2$ es la densidad de masa gravitacional de la materia (este término controla la aceleración $\ddot{R}$)

- Puesto que la densidad de masa gravitacional es $(\rho + 3p/c^2)$, y en el caso del vacío $\rho_{vac} = -p_{vac}/c^2$, obtenemos una densidad de masa gravitacional negativa, por lo que el efecto de la constante cosmológica es producir repulsión gravitacional.

5 Universos de papel

Consideremos a continuación algunos modelos de universos y su posible relevancia a la hora de proveer una descripción relevante del universo real.

5.1 *El universo de de Sitter*

Supongamos que el universo no contiene materia/energía ordinaria, y que $k = 0$. En ese caso la ecuación de Friedmann, (15) resulta

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\Lambda}{3} \tag{17}$$

que se integra inmediatamente para dar

$$R(t) = R_0\, e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \tag{18}$$

En este modelo prevalece la repulsión causada por la constante cosmológica. Se cree que este comportamiento exponencial puede simular una fase (inflacionaria) en las primeras fracciones después del big bang.

5.2 *El universo de Einstein*

En el trabajo que inauguró la cosmología teórica, Einstein propuso un modelo de universo estático, de acuerdo con todos los prejuicios establecidos en la época. Para poder lograr un modelo estático, tuvo que introducir un término repulsivo, la constante cosmológica, que se encargaba de equilibrar precariamente la atracción gravitacional de la materia.

Haciendo $\ddot{R} = \dot{R} = p = 0$, las ecuaciones de Friedmann resultan,

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{k\,c^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} = 0 \tag{19}$$

y

$$\frac{4\pi G}{3}\rho_0 = \frac{\Lambda}{3} \tag{20}$$

Notemos que la densidad de la materia está determinada por la constante cosmológica (o *vice versa*). Además, puesto que ρ_0 es positivo, entonces Λ es positiva, y de la ecuación (19) $\Lambda = \frac{kc^2}{R_0^2}$, resulta $k = 1$, es decir, el 3-espacio es esférico con un radio dado por

$$R_0 = (\frac{4\pi G}{c^2}\,\rho_0)^{-\frac{1}{2}} \tag{21}$$

Como demostraron Friedmann y Eddington, el universo de Einstein es inestable y por tanto no califica para un modelo de la realidad.

Ejercicio 6.- Un error de Einstein; su 'universo' es inestable.

Demuestre que el universo de Einstein es inestable ante perturbaciones de R_0. (Ayuda: considere la perturbación $R = R_0 + \delta R$ en la ecuación de Friemann, donde R_0 es solución del modelo de Einstein, y demuestre que δR no decae sino que crece exponencialmente).

5.3 *El Universo de Einstein-de Sitter*

Este modelo no debe confundirse ni con el universo de Einstein ni con el universo de de Sitter. El primero tiene materia pero sin movimiento. El segundo tiene movimiento sin materia. El de Einstein-de Sitter tiene materia y movimiento. Fue construido luego de que Einstein desechó la constante cosmológica ante las evidencias mostradas por Hubble a favor de la expansión (y la demostración de que su modelo es inestable).

El universo de Einstein-de Sitter supone $k = 0$, no tiene constante cosmológica, y está dominado por materia ($p = 0$, $\rho \sim R^{-3}$). Con estas suposiciones la ecuación de Friedmann resulta

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{A}{R^3} \tag{22}$$

con $A =$ const. Esta ecuación puede integrarse (por ejemplo suponiendo que $R = B\,t^n$, sustituyendo se encuentra que $n = 2/3$, así, el universo plano, dominado por la materia y sin constante cosmológica, se expande como

$$R(t) = R(t_1)\,\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{23}$$

5.4 *Universo plano dominado por la radiación*

En las primeras fases del universo (unos trescientos mil años) la densidad de la radiación era mayor que la de la materia. Podemos suponer entonces un comportamiento $\rho \sim R^{-4}$. Si además $\Lambda = k = 0$, obtenemos de la ecuación de Friedmann, que

$$R(t) = R(t_1)\,\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

5.5 *Universo cerrado dominado por la materia*

Si la constante cosmológica es nula pero $k = 1$, obtenemos para el caso dominado por la materia, la ecuación

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{A}{R^3} - \frac{c^2}{R^2}$$

es decir,

$$\dot{R}^2 = \frac{A}{R} - 1 \tag{25}$$

Note que R no puede ser arbitrariamente grande en este caso. La solución de esta ecuación es en forma paramétrica,

$$R(\theta) = C\sin 2\theta \qquad\qquad t(\theta) = C(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta) \tag{26}$$

Ejercicio 7.- Universos con $k = +1$ y $k = -1$.

Complete los pasos necesarios para llegar a la ecuación (26). Proceda similarmente para cuando $k = -1$ (universo abierto).

6 Los parámetros cosmológicos

Con el fin de establecer un nexo más próximo entre las funciones que aparecen en los modelos cosmológicos y las observaciones, conviene introducir los siguientes parámetros:

- H, el parámetro de Hubble al cual ya nos referimos, y en particular al valor que hoy asume, usualmente llamado la constante de Hubble.

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \qquad \text{y} \qquad H_0 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{t_0} \tag{27}$$

- $q(t)$, el parámetro de desaceleración y su valor actual

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \qquad \text{y} \qquad q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}\right)_{t_0} \tag{28}$$

- Ω, el parámetro densidad y su valor actual

$$\Omega \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \;\; \text{y} \;\; \Omega_0 \equiv \frac{\rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \qquad \text{donde} \qquad \rho_c = \frac{3}{8\pi G}H^2 \tag{29}$$

Comentarios

El parámetro de Hubble es la tasa a la que se expande el universo, o si se prefiere, la tasa de recesión de las galaxias en cada época. Su valor actual, H_0 fija un valor máximo para el tiempo transcurrido desde que toda la materia estaba reunida en un punto en caso de que no exista constante cosmológica. En efecto, si la velocidad de recesión fuese constante (¡un universo sin gravedad!), el tiempo que toma dos puntos en separarse una distancia R, es la distancia entre la velocidad, es decir, $t = R/\dot{R}$, por tanto $t_H \equiv H_0^{-1}$. Este valor se conoce con el nombre de *tiempo de Hubble.* Como la gravedad ha frenado la recesión, la edad del universo, t_0 debe ser menor que el tiempo de Hubble (enfatizamos: en caso de que $\Lambda = 0$). Las estimaciones recientes dan para el tiempo de Hubble un valor $t_H = 13 \times 10^9$ años.

En general podemos afirmar que el lapso transcurrido desde que un objeto emite su luz, hasta que nos llega, depende de la función $R(t)$, es decir, del modelo considerado. Sin embargo, para valores pequeños de z, o equivalentemente, para lapsos cortos comparados con la escala de la expansión, podemos obtener una expresión útil e independiente del modelo. Expandiendo $R(t)$ en una serie de potencias alrededor de t_0, obtenemos

$$\frac{R(t)}{R_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2\,(t - t_0)^2 + ... \qquad (30)$$

Recordando que $R_0/R(t) = 1 + z$ podemos invertir la ecuación anterior y obtener

$$z = H_0(t_0 - t) + (1 + \frac{q_0}{2})\,H_0^2(t_0 - t)^2 + ... \qquad (31)$$

de donde podemos despejar $(t - t_0)$ y despreciar potencias de z superiores a dos, para obtener

$$(t - t_0) = H_0^{-1}\left[z - (1 + \frac{q_0}{2})z^2 + ...\right] \qquad (32)$$

que es el resultado deseado.

Ejercicio 8.- Si H fuese constante.

Demuestre que si el parámetro de Hubble fuese independiente del tiempo, entonces el universo sería el de de Sitter.

El parámetro de desaceleración es un parámetro adimensional que mide el cambio del parámetro de Hubble en el tiempo, y por eso está relacionado con la aceleración de la expansión. Observe que valores positivos de q representan aceleración negativa, y *vice versa.* Derivando el parámetro de Hubble encontramos fácilmente que

$$\dot{H} = -H^2\,(1 + q) \qquad (33)$$

Si $q = 0$, entonces $\ddot{R} = 0$, por tanto $\dot{R} = A\,t$ y $H = 1/t$.

Si $q = -1$ entonces $\dot{H} = 0$ y el modelo es el de de Sitter.

La medición precisa de q_0 es uno de las prioridades de la cosmología observacional actual.

Por último, el parámetro densidad mide esencialmente la relación entre la energía cinética de una masa de prueba m, y su energía potencial. En efecto, puesto que $K = \frac{1}{2}m\dot{R}^2$ mientras que $U = GmM/R$, usando que $M = \frac{4}{3}\pi R^3\,\rho$, entonces

$$\Omega = \frac{U}{K} = \frac{\frac{4}{3}\pi G R^2\,\rho}{\frac{1}{2}\dot{R}^2} = \frac{\rho}{\frac{3}{8\pi G}H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} \qquad (34)$$

Notemos que el valor de la constante de Hubble determina la densidad crítica ρ_c. Actualmente la densidad crítica es $\rho_c \approx 1,9 \times 10^{-29}$ gr cm^{-3} que corresponde aproximadamente a 10 átomos de hidrógeno por metro cúbico. En caso de que consideremos la presencia de la constante cosmológica Λ, es útil definir la relación entre la densidad del vacío, $\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ y la densidad crítica ρ_c. Esta relación se denota por Ω_{vac}. Así, el parámetro densidad total es la relación entre las diferentes densidades respecto de la densidad crítica:

$$\Omega = \Omega_{mat} + \Omega_{rad} + \Omega_{vac} + ...$$

Las estimaciones actuales sugieren que $\Omega_{mat} \approx 0,3$ mientras que Ω_{rad} es alrededor de 10^4 veces menor. Respecto de Ω_{vac} existe una gran controversia a la que nos referiremos más adelante.

Si $\Omega > 1$, significa que la energía potencial total es mayor que la cinética, y el sistema debe recolapsar (universo cerrado). Si $\Omega < 1$, ocurre lo contrario y el sistema se expandirá indefinidamente (universo abierto). El caso intermedio o crítico ocurre cuando $\Omega = 1$ y la densidad total coincide con la densidad crítica. En ese caso se expande indefinidamente pero con una velocidad asintótica igual a cero (universo plano).

6.1 *Ecuaciones de Friedmann en términos de los parámetros*

Introduzcamos en las ecuaciones de Friedmann, (15,16) las definiciones de los parámetros H, Ω y q. Luego de un breve cálculo, el resultado es

$$k = R^2 \, H^2 \, (\Omega_{mat} + \Omega_{vac} \; - 1) \tag{35}$$

y

$$8\pi G p = H^2(2q - \Omega_{mat} + 2\Omega_{vac}) \tag{36}$$

La primera de estas ecuaciones muestra que el universo es plano, esférico o hiperbólico cuando $\Omega = 1, > 1, < 1$, respectivamente, mientras que la segunda ecuación revela que si no hay constante cosmológica y (como evidencia nuestro universo actual) $p = 0$, entonces $q = \Omega_{mat}/2$. Para el modelo plano debemos tener por tanto, $q_0 = 1/2$.

Ejercicio 9.- Los parámetros cosmológicos

a.- Desarrolle en detalle los pasos que conducen a las ecuaciones (35 y 36).

b.- Demuestre que en caso de tener una constante cosmológica, y si suponemos que el universo es dominado por la materia y plano (opción favorecida por algunos resultados teóricos, como veremos más adelante), entonces se cumple que

$$\Omega_{vac} = \frac{1}{3}(1 - 2q) \tag{37}$$

c.- Elija un resultado observacional para el valor actual de la constante de Hubble y para el parámetro de desaceleración, y con ellos estime el valor que debería de tener la constante cosmológica.

d.- Obtenga una expresión para el valor de q_0 en un universo sin constante cosmológica y dominado por la radiación.

7 Edad del universo

Todo cálculo de la edad del universo supone elegir un modelo que defina el comportamiento del factor de escala $R(t)$.

7.1 *Un ejemplo sencillo*

Un modelo de universo permite calcular el valor de t_0 en términos de la constante de Hubble y del parámetro de desaceleración actual, q_0. Antes de presentar el cálculo general, es útil considerar como ejemplo el caso sencillo del universo de Einstein-de Sitter.

Recordemos que este modelo supone que $k = \Lambda = 0$, y la densidad corresponde a materia no relativista y es igual a la densidad crítica. La ecuación de Friedmann es

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{mat} \tag{38}$$

escribiendo

$$\rho_{mat} = \rho_0(R_0^3/R^3)$$

y

$$\rho_0 = 3H_0^2/8\pi G$$

obtenemos luego de simplificar,

$$\dot{R} = \frac{H_0\, R_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R}}$$

introduciendo la variable adimensional $x \equiv R/R_0$ obtenemos

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0} \sqrt{x}\, dx \tag{39}$$

realizando la integral,

$$t = \frac{2}{3H_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{40}$$

Finalmente, la edad del universo (para este modelo) se halla haciendo $R = R_0$,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \tag{41}$$

7.2 Un caso más general

Consideremos ahora un caso más general, en el que no especificamos el valor de k, y sin constante cosmológica (el caso con $\Lambda \neq 0$ se dejará como ejercicio). La ecuación de Friemann para este caso es

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho_{mat}\,R^2 - k \tag{42}$$

Sustituyamos en esta ecuación los resultados $\rho_{mat} = \rho_0\,(R_0^3/R^3)$ válido para la materia, y $k = R_0^2\,H_0^2(\Omega_0 - 1)$ que es la ecuación (35) evaluada en t_0 y sin el término cosmológico. Luego de sustituir, el resultado puede ponerse como

$$dt = \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{R_0^3}{R} - R_0^2\,H_0^2(\Omega_0 - 1)}}$$

Factorizando $R_0^2\,H_0^2$ y recordando de nuevo la definición de densidad crítica, obtenemos,

$$H_0\,dt = \frac{dR}{\sqrt{\Omega_0\frac{R_0}{R} - \Omega_0 + 1}} \tag{43}$$

Definiendo la variable adimensional $x = R/R_0$, concluimos que

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(\frac{1}{x} - 1) + 1}} \tag{44}$$

y la edad del universo la obtenemos cuando $R = R_0$,

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(\frac{1}{x} - 1) + 1}} \tag{45}$$

La integral puede ser evaluada obteniendo

$$H_0\, t_0 = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}\right) \times \cos^{-1} \Omega_0^{-\frac{1}{2}} \; + \frac{1}{1-\Omega_0} \qquad (46)$$

Ejercicio 10.- La edad del universo.

a.- Integre la ecuación (45) para el caso de Einstein-de Sitter, para el que $\Omega_0 = 1$. El resultado debe ser el obtenido en la ecuación (41).

b.- Calcule el límite $\Omega_0 \to 1$ en la expresión general (46) y reproduzca el mismo resultado.

c.- Cuando $\Omega_0 > 1$, el análisis de la ecuación (44) muestra un comportamiento tipo cicloide. Demuestre que el límite $\Omega_0 \gg 1$ en la ecuación (46) da como resultado

$$H_0\, t_0 \to \frac{\pi}{2\sqrt{\Omega_0}}$$

Este resultado es plausible, porque afirma que mientras más materia gravitante haya, el universo más rápidamente recorre su ciclo.

d.- Incluya la constante cosmológica en el tratamiento de la edad, y convénzace de que el efecto de considerar este término, es aumentar la edad del universo.

8 La época de la radiación

En el universo existe además de materia ordinaria, (protones, neutrones...), radiación electromagnética que plena de manera extraordinariamente uniforme el espacio. La existencia de esta radiación cósmica de microondas fue sugerida en 1931 por Lemaitre, predicha por Gamow y su grupo en los 40's, de nuevo invocada por Zeldovich e independientemente por Dicke en los 60's y finalmente descubierta (por azar) en 1964 por Penzias y Wilson. Las observaciones y análisis hechas desde entonces y sobre todo las del COBE (Cosmic Background Explorer) han sido de singular importancia a la hora de promover la cosmología a un status más cuantitativo y tomar verdaderamente en serio el paradigma del big bang, además de aportar información valiosísima acerca de una época cuando el universo era un plasma opaco, denso y caliente. Los análisis han revelado:

- Que la radiación consiste en fotones de longitud de onda del orden de los milímetros (típicamente del tamaño de las letras de esta página), con el espectro de cuerpo negro más perfecto que se haya conseguido en la naturaleza. La distribución planckiana del espectro permite en primer lugar asignarle una temperatura a la radiación; el valor de la temperatura actual es

$$T_0 = 2,725 \pm 0,002 \text{ °K}$$

con un 95% de confianza.

- La naturaleza planckiana también nos permite inferir que materia y radiación estuvieron en equilibrio termodinámico, interactuando a través de los diversos procesos físicos característicos de la escala de energía determinada por la temperatura. Además el espectro de Planck de la radiación de microondas nos dice cómo cambia la temperatura con la expansión, permitiendo entre otras cosas conocer la temperatura como función del tiempo a partir del big bang, como veremos más adelante.

- Las observaciones del COBE (1992) demuestran que la radiación es isótropa, es decir, independiente de la dirección con la exquisita precisión de unas cuantas partes en 10^5, es decir, que las anisotropías son tales que

  $$\Delta T/T \sim 6 \times 10^{-6}$$

  donde ΔT es la diferencia de temperaturas apuntando el detector en dos direcciones diferentes. Estas pequeñísimas fluctuaciones revelan el grado de inhomogeneidad de la materia en el momento en que la temperatura del universo fue lo suficientemente fría como para permitir la existencia de átomos de hidrógeno, luego de lo cual materia y energía dejaron de interactuar. El patrón de inhomogeneidades es el requerido por las teorías de formación de grandes estructuras por inestabilidad gravitacional.

8.1 *El espectro de Planck*

Un hecho crucial para la interpretación de la radiación, es que la expansión preserva el carácter térmico del espectro, como mostraremos de inmediato. Recordemos que para una distribución de fotones de cuerpo negro, el número de fotones en el rango de frecuencias $(\nu,\, \nu + d\nu)$ es $n_\nu \, d\nu$, donde

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \tag{47}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Esta ley de distribución (de Planck) permite hallar el número de fotones por unidad de volumen como

$$n = \int_0^\infty n_\nu \, d\nu = 16\pi \, \zeta(3) \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \tag{48}$$

donde $\zeta(3) \approx 2,404$ es la función zeta de Riemann. Análogamente, la densidad de masa es

$$\rho_{rad} = \int_0^\infty n_\nu \, (\frac{h\nu}{c^2}) \; d\nu = \frac{a}{c^2} T^4 \tag{49}$$

donde a es la constante de Stephan-Boltzmann, dada por

$$a = \frac{8\pi^5 \, k_B^4}{15 h^3 \; c^3} = 7,56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \,{}^\circ\text{K}^{-4} \tag{50}$$

De la ecuación (48) haciendo $T = 2,7\,^\circ$K, concluimos que actualmente hay unos 400 fotones cósmicos en cada cm^3 del universo, mientras que usando (49) obtenemos que la densidad de masa asociada con la radiación actualmente (es decir, a la temperatura de $2,7^\circ$K), es

$$\rho_{rad}(t_0) \cong 4,7 \times 10^{-34} \, \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \tag{51}$$

Por otra parte, como sabemos que la dependencia de ρ_{rad} con el factor de escala es $\rho_{rad} \sim R^{-4}$, la comparación con la ecuación (49), permite inferir que $T \sim R^{-1}$, es decir,

$$T(t) = T_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right) = T_0(1+z) \tag{52}$$

Así, cuando detectamos un objeto con un corrimiento z particular, la relación (52) nos permite conocer la temperatura de la radiación en la época en que la luz de dicho objeto fue emitida.

Ejercicio 11.- Espectro de Planck y la expansión del universo

Considere fotones de la radiación cósmica con frecuencia ν. En un volumen V el número de fotones de frecuencia ν es $n_\nu \, V \, d\nu$. A medidas que el universo se expande, la frecuencia de los fotones se desplaza al rojo como

$$\nu' = \nu \, (1+z)$$

y el volumen crece como

$$V' = V/(1+z)^3.$$

Si los fotones no interactúan y por tanto su número se conserva, entonces $n_\nu \, V \, d\nu = n'_{\nu'} \, V' d\nu'$. Aplique la distribución de Planck para obtener que la distribución sigue siendo un espectro de cuerpo negro pero con una temperatura dada por la ecuación (52).

8.2 *La Temperatura del Universo*

Consideremos ahora cómo cambia la temperatura en el temprano universo, como función del tiempo. La ecuación de Friedmann para la evolución del factor de escala es

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{rad} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{53}$$

Para valores pequeños del factor de escala la densidad de la radiación domina sobre la de la materia, por eso no aparece esta última. Es claro que como $\rho_{rad} \sim R^{-4}$ podemos despreciar los otros términos a mano derecha y usando la ley de Stephan-Boltzmann, ecuación (49) el resultado es

$$\frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8\pi G \, a}{3c^2}\right)^{\frac{1}{2}} T^2 \tag{54}$$

Pero como $\frac{\dot{R}}{R} \sim R^{-2}$, resulta que

$$R = A\sqrt{t}$$

Derivando esta ecuación para hallar $\dot{R}$ y dividiendo por R, encontramos que

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{2t}$$

y comparando con la ecuación (54) obtenemos el importante resultado

$$T(t) = \left(\frac{3c^2}{32\pi G \, a}\right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}} \tag{55}$$

Por ejemplo, a los 100 segundos ($\sim$ dos minutos) la temperatura era de $10^9 \, {}^\circ K$, la temperatura carcterística del régimen nuclear. Esa es la era de la nucleosíntesis, durante la cual el 25% de los protones se transformaron en núcleos se helio. La verificación de que esa es la abundancia relativa de helio/hidrógeno, es una de las constataciones más exitosas del modelo del big bang.

Ejercicio 12.- El tiempo de las aniquilaciones

Usando el valor de la masa de los electrones (y de los protones) calcule la energía típica de una reacción $e + e^{+} \rightleftarrows \gamma$ (análogamente para protones), con la constante de Boltzmann obtenga la temperatura característica de estas reacciones. Estime usando la ecuación (55) los tiempos en que cada una de esas reaaciones era común.

8.3 La Transición de la Era de Radiación a la de Materia

Como señalamos anteriormente, a pesar de que hoy la densidad de energía de la materia es mucho mayor que la de la radiación, no siempre fue así. La transición entre una y otra ocurrió a partir del momento en que $\rho_{rad} = \rho_{mat}$. Puesto que la densidad de la materia satisface

$$\rho_{mat} = \rho_{mat}(t_0)(1+z)^3 \tag{56}$$

recordando la definición del parámetro densidad, ecuación (29) podemos escribir esta ecuación como

$$\rho_{mat} = \Omega_0 \frac{3H_0^2}{8\pi G}(1+z)^3 \approx 1,9 \times 10^{-29}\Omega_0(1+z)^3 \,\mathrm{gr\,cm}^{-3} \tag{57}$$

Por otra parte, la densidad de materia asociada con la radiación, cumple con

$$\rho_{rad} = aT^4\,(1+z)^4 \approx 4,7 \times 10^{-34}(1+z)^4 \mathrm{gr\,cm}^{-3} \tag{58}$$

Como vemos, para altos corrimientos al rojo (tiempos más tempranos) la densidad de la radiación supera a la de la materia. La transición se da para el valor $z = z_{tr}$

$$z_{tr} \approx 4 \times 10^4 \Omega_0$$

De donde observamos que el universo es la época de la transición era unas 10^4 veces 'más pequeño' mientras que los volúmenes estaban reducidos por un factor 10^{12}. Podemos estimar el tiempo que duró la dominación de la radiación eligiendo un modelo particular. Si suponemos que el modelo de Einstein-de Sitter es adecuado, entonces, de

$$R_0 = 10^4 R_{tr} \qquad \text{y} \qquad R_{tr} = R_0 \left(\frac{t_{tr}}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

resulta que

$$t_{tr} \cong t_0 \times 10^{-6}$$

es decir, el período dominado por la radiación representa apenas la millonésima parte del total.

8.4 *El Desacoplamiento Materia-Radiación*

Una época importante en la evolución del universo es cuando la temperatura fue lo suficientemente baja como para permitir que se formaran átomos. Esta época es conocida con el desafortunado nombre de época de *recombinación*. Desafortunado porque sugiere que los electrones y protones alguna vez estuvieron combinados, cosa que nunca ocurrió. La estimación más cruda para obtener la temperatura correspondiente a esa época es suponer que la energía térmica $k_B T$ en ese momento es igual a la energía de ionización del átomo de hidrógeno, $13,6$ e.V. Un cálculo simple permite obtener que $T_{rec} = 5 \times 10^4$°K. Sin embargo, el cálculo no es tan preciso porque a temperauras más bajas ya hay fotones con energías suficientes como para impedir la reacción e$^-$+ p$\rightarrow H + \gamma$, donde H representa al átomo de hidrógeno y γ al fotón. Si proponemos que la época de desacoplamiento es cuando el 90% de los protones y electrones están en forma de átomos de hidrógeno, entonces la temperatura es de 4.500 °K. Con esto a mano, podemos calcular la edad del universo cuando tenía esa temperatura. Para ello recurrimos a la ecuación (55), que con los valores numéricos correspondientes, afirma que

$$T(t) = 1,4 \times 10^{10}\, t^{-\frac{1}{2}} \text{ °K} \tag{59}$$

en donde t se expresa en segundos. Colocando como temperatura el valor $T_{rec} = 4.500$ °K, el resultado es

$$t_{rec} = 300.000 \,\text{años}$$

A partir de ese momento los fotones deben ser considerados partículas no interactuantes solo sujetas al corrimiento al rojo.

Ejercicio 13.- Entropía por barión en el universo

Un resultado de la física estadística afirma que para la distribución de Planck, la entropía es proporcional a T^3, al igual que la densidad de número de fotones. Eso significa que la relación del número de fotones al número de protones (o neutrones, colectivamente llamados bariones) es la entropía por barión. Definamos

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \tag{60}$$

Obtenga de la ecuación (57) el valor de $n_B = \rho_{mat}/m_p$para un z arbitrario, mientras que de (48) obtenga $n_\gamma = 420(1+z)^3$. Reuna los resultados para concluir que

$$\eta = 2,7 \times 10^{-8}\,\Omega_B$$

Es decir, que hay alrededor de un millardo de fotones por cada barión, y este número es independiente de z, es decir, es independiente del tiempo y de la evolución del universo. No se tiene idea del porqué de este valor.

9 Cosmología Relativista

Hemos afirmado que el enfoque newtoniano tiene limitaciones. Estas limitaciones son particularmente importantes a la hora de estudiar la propagación de la luz, que es un fenómeno esencialmente relativista y para el cual el marco newtoniano no tiene respuestas. Presentemos de manera simplificada algunos elementos de la relatividad general que nos permitan abordar el importante tema de la propagación de la luz en modelos cosmológicos.

La gran moraleja que subyace a la relatividad, es que la distribución de la materia-energía determina (a través de las ecuaciones de Einstein) la geometría del espacio-tiempo. En general este es un problema particularmente difícil, pero en el caso de la cosmología las simetrías impuestas simplifican el tratamiento del problema. Como el Principio Cosmológico postula que la materia está distribuida homogénea e isótropamente en el espacio, debemos considerar los espacios que sean homogéneos e isótropos, o como se dice en el argot, que sean máximamente simétricos. Es claro que el conocido espacio euclideano es un buen candidato, pero no es el único. Ilustremos el punto comenzando con espacios de dimensión 2. Es claro que un plano no tiene bordes ni irregularidades: es homogéneo e isótropo. Su elemento de línea en coordenadas cartesianas (x, y) y en coordenadas esféricas (r', θ), es

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \tag{61}$$

$$dl^2 = dr'^2 + r'^2 d\theta^2 \tag{62}$$

Los coeficientes de los diferenciales se llaman componentes de la métrica y se denotan por g_{ik}. En coordenadas cartesianas son $g_{xx} = g_{yy} = 1$, y

$g_{xy} = g_{yx} = 0$. Por otra parte, la superficie de una esfera, es decir, el conjunto de puntos (x, y, z) que equidistan de uno dado, es también homogénea e isótropa. Este espacio, denotado como S_2 tiene un elemento de línea escrito en coordenadas esféricas usuales está dado por

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \; d\phi^2) \tag{63}$$

como puede verse escribiendo el elemento de línea del espacio euclídeo tridimensional en coordenadas esféricas (r', θ, ϕ), y haciendo luego $r' = R =$const. Observemos que podemos introducir la variable *adimensional* r definida como $r = \text{sen}\,\theta$, de tal forma que $0 \ \leq r \ \leq 1$. En las coordenadas (r, θ), el elemento de línea (63) se escribe como

$$dl^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + \ r^2 \ d\phi^2 \right) \tag{64}$$

Los polos de la esfera corresponden a $r \ = 0$, mientras que el ecuador corresponde a $r \ = 1$. El 'volumen' (área) de este espacio se obtiene integrando por todo el rango de las variables, la cantidad $V_2 = \int \sqrt{g}\, d^2x$ donde g es el determinante de la métrica. El resultado es obviamente $4\pi R^2$. Note que el volumen es finito aunque el espacio no tiene bordes.

Pasemos ahora al espacio ordinario de tres dimensiones. Naturalmente que el espacio euclídeo con métrica

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dy^2 \tag{65}$$

es homogéneo e isótropo. Pero consideremos ahora la superficie tridimensional de una esfera en cuatro dimensiones, es decir, el conjunto de puntos con coordenadas $(x,\ y,\ z,\ w)$ que están a una distancia R constante del origen. El elemento de línea en coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi,\ \psi)$ es

$$dl^2 = R^2 \left[d\psi^2 + \text{sen}^2\psi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \; d\phi^2) \right] \tag{66}$$

Podemos introducir la variable adimensional $r = \text{sen}\psi$, en cuyo caso la métrica (66) resulta

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \; d\phi^2) \right] \tag{67}$$

Puede comprobarse fácilmente que el volumen de este espacio tridimensional es finito (aunque ilimitado) y vale $V_3 = \int \sqrt{g} d^3x = 2\pi^2 R^3$.

Ejercicio 14.- Otros espacios máximamente simétricos: Espacios hiperbólicos

a.- Considere una superficie hiperbólica, definida como el conjunto de puntos $(x,\, y,\, z)$ tal que $x^2 + y^2 - w^2 = -R^2$. Sustituya en la expresión

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - dw^2$$

el diferencial dw, introduzca coordenadas polares $x = r' \cos\theta$ y $y = r' \,\mathrm{sen}\theta$, y luego la variable adimensional $r = \frac{r'}{R}$ para obtener el elemento de línea del espacio hiperbólico bi-dimensional, como

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2\, d\theta^2 \right] \tag{68}$$

b.- Extienda la propuesta anterior, al espacio tridimensional hiperbólico. Demuestre que tanto el 'plano' como el espacio tridimensional hiperbólico, tienen área y volumen infinitos respectivamente. Puede verse que así como la curvatura de la esfera es positiva y vale $1/R^2$, la del espacio hiperbólico es negativa y vale $-1/R^2$.

9.1 *Vuelta a la Física*

De la discusión anterior es claro que los espacios tridimensionales homogéneos e isótropos, tienen métrica

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (\, d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta \; d\phi^2) \right] \tag{69}$$

donde el parámetro $k = 1, 0, -1$ para el caso esférico, euclídeo (o plano) e hiperbólico respectivamente. Estos espacios tridimensionales son los que se expanden a medida que transcurre el tiempo, de modo que el factor R es una función del tiempo.

En relatividad especial la noción de espacio-tiempo es fundamental. El espacio-tiempo es una variedad de 4 dimensiones con elemento de línea

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \tag{70}$$

donde $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ es el elemento de línea tridimensional euclideano y c es la velocidad de la luz. Observemos que si $ds = 0$, entonces $\frac{dl}{dt} = c$, y por tanto $ds = 0$ describe la propagación de la luz.

En cosmología el espacio-tiempo está descrito por el elemento de línea

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(\, d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \ d\phi^2) \right] \tag{71}$$

que se conoce como elemento de línea de Robertson-Walker. Una galaxia típica, que participa de la expansión, tiene coordenadas (r, θ, ϕ) constantes, por eso el sistema de coordenadas se llama comóvil. La distancia entre dos puntos de coordenadas r_1 y r_2 (supongamos que tienen las mismas coordenadas angulares) debe calcularse en un tiempo particular, digamos t_0 y se obtiene de (71) como

$$d_{1,2} = cR(t_0) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{72}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein son la prescripción para hallar la función $R(t)$. Si la materia-energía la representamos como un fluido de densidad ρ y presión p, y suponemos que existe una constante cosmológica, entonces las ecuaciones de Einstein son exactamente las ecuaciones de Friedmann:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}^2}{R^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{R} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\, R + \frac{\Lambda}{3} R \end{aligned} \tag{73}$$

y una ecuación de consistencia, que se puede deducir de estas dos, es precisamente la ecuación de balance de la energía,

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -p \frac{d\,(R^3)}{dt} \tag{74}$$

Notemos, no obstante, que la interpretación de estas ecuaciones es diferente de su contraparte newtoniana.

10 Algunas dificultades del big bang estándar

El escenario del big bang proporciona una descripción extraordinariamente exitosa del universo observable. Sin embargo, presenta algunos problemas de difícil explicación sin recurrir a excepcionales condiciones iniciales. Analizaremos brevemente el problema del horizonte, el problema de la planitud y el problema de la constante cosmológica.

10.1 *El problema del horizonte*

Puesto que la luz viaja a una velocidad finita, los objetos lejanos son vistos siempre como eran en el pasado. Si este pasado es suficientemente lejano, nos toparemos con el big bang. Esta frontera en el pasado significa que hay para cada observados, una frontera en el espacio, más allá de la cual la luz de esa región aún no ha tenido tiempo de llegarle. Esa frontera se conoce con el nombre de *horizonte,* y representa la región causal de ese observador. Naturalmente el horizonte se va ampliando a medida que el universo envejece. El problema surje tras la observación de que nuestro horizonte actual abarca regiones en el pasado que estaban fuera de sus respectivos horizontes, y cuando medimos las propiedades de la radiación de esas regiones, constatamos que son idénticas: ¿Cómo entender que por ejemplo la temperatura es la misma si ni siquiera la luz pudo propagarse de una región a otra para termalizarse?

Hagamos el argumento cuantitativo: Calculemos el tamaño del horizonte, es decir, la distancia que la luz puede viajar desde $r = 0$ en el big bang, $t = 0$ hasta el valor r_h de la coordenada comóvil en el instante t_{rec}, de la 'recombinación'. Esta distancia (propia) es $d_h = R(t_{rec})\, r_h$. La coordenada comóvil r_h la hallamos haciendo $ds = 0$ y suponiendo que el movimiento es radial,

$$\int_0^{r_h} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = c\int_0^{t_{rec}} \frac{dt}{R(t)} \tag{75}$$

Supongamos que $k = 0$, espacio plano (el argumento no cambia sustancialmente), de modo que

$$d_h = c\, R(t_{rec}) \int_0^{t_{rec}} \frac{dt}{R(t)} \tag{76}$$

Como durante la época de la radiación $R(t) = A\sqrt{t}$, podemos integrar fácilmente (76) para obtener

$$d_h = 2c\, t_{rec} \simeq 6 \times 10^{22}\,\mathrm{cm}$$

donde usamos que $t_{rec} \simeq 10^{12}$ seg. Esta distancia representa el tamaño de la región causal durante la época en que se liberó la radiación. Si extrapolamos esa distancia hasta hoy, ¿a qué distancia d_{h_0} corresponde? Puesto que nos interesa ¿ahora la época dominada por la materia, la respuesta es

$$d_{h_0} = 2c\, t_{rec}\, (\frac{t_0}{t_{rec}})^{\frac{2}{3}} \tag{77}$$

Esta distancia debe ser comparada con el tamaño de nuestra región causal, es decir, el tamaño l_0 del universo visible, que si el espacio no se expandiera, sería simplemente $l_0 = ct_0$.Tomando en cuenta la expansión (supondremos de nuevo que $k = 0$, e ignoraremos el breve lapso antes de la recombinación), escribimos

$$l_0 = R(t_0)\, c \int_{t_{rec}}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{78}$$

y para $R \sim t^{\frac{2}{3}}$, el resultado es $l_0 \simeq 3c\, t_0$. La relación entre ambas distancias es

$$d_{h_0}/l_0 \simeq \frac{2}{3}(t_{rec}/t_0)^{1/3}$$

y como $t_{rec} \simeq 10^5$ años y $t_0 \simeq 10^{10}$ años, encontramos que $d_{h_0}/l_0 \simeq 1/100$. Esto significa que el universo visible alberga cien distancias *separadas causalmente* entre sí, es decir, unos 10^6 volúmenes no comunicantes. El problema es cómo entender la isotropía de la radiación cósmica; ¿porqué la temperatura de distintas partes del universo que jamás estuvieron en contacto causal, es exactamente la misma?

Ejercicio 15.- El ángulo de la región causal.

Supongamos que d_h es la distancia al horizonte en la época de la recombinación. Demuestre que el ángulo que esa región cubre actualmente en el cielo, es

$$\delta = 2\, sen^{-1}\left(\frac{d_{h_0}}{3\, c\, t_0}\right)$$

Insertando los valores numéricos encuentre que $\delta \approx 1^\circ$. Esto quiere decir que cuando apuntamos el radiotelescopio a dos zonas del cielo separadas por más de un grado, la radiación de microondas detectada viene de regiones causalmente separadas.

10.2 *El Problema de la planitud*

El valor del parámetro densidad Ω es una función del tiempo en general. La excepción es si Ω fue igual a 1 entonces seguirá siéndolo por siempre. La primera manera de demostrar esta afirmación es notando que Ω mide la relación entre la energía potencial y la cinética, hablando en términos newtonianos. Si $\Omega = 1$ es porque la energía total es nula y por conservación deberá a medida que pasa el tiempo seguir siendo nula y por tanto Ω deberá seguir valiendo 1. Cuantitativamente, si escribimos la conservación de la energía como $K - U = E$, donde K es la energía cinética y U es el negativo de la energía potencial (que es negativa). De la relación $\Omega = U/K$, obtenemos

$$\dot{\Omega} = \frac{\dot{U}}{K} - \frac{U}{K^2}\dot{K} = \frac{\dot{U}}{K}(1 - \Omega) \tag{79}$$

donde en la última igualdad usamos que $\dot{K} = \dot{U}$. La ecuación (79) muestra que si en un instante $\Omega = 1$, mantendrá ese valor en instantes futuros.

Ejercicio 16.- $\Omega = 1$ es un punto de equilibrio inestable.

Demuestre que si Ω difiere de la unidad en $\delta\Omega$, entonces si $\delta\Omega$ es positivo, entonces tiende a crecer, y si es negativo, tiende a decrecer.

Las observaciones revelan que actualmente $\Omega_{mat\ 0} = 0,3$ (sin tomar en cuenta la posible contribución de la constante cosmológica). ¿Cómo explicar este valor tan cercano al valor de equilibrio inestable tras un millardo de años cambiando? Lo que esto quiere decir, es que en tiempo cercanos al big bang, el ajuste de Ω a la unidad ha debido de ser inexplicablemente preciso. El nombre de 'planitud'viene por la relación (35) que muestra que si $\Omega \approx 1$, el espacio es prácticamente plano. Una manera alternativa de ver esta 'coincidencia', es partiendo de la ecuación de Friedmann, escrita como

$$k = \left[\frac{8\pi G}{3}\rho - H^2\right] R^2 \tag{80}$$

Como k es constante, podemos igualar el lado derecho de esta ecuación, a él mismo evaluado en t_0, y recordando la definición de densidad crítica, el resultado es,

$$\rho - \rho_c = (\rho_0 - \rho_{c0})\frac{R_0^2}{R^2} \tag{81}$$

Factorizando ρ en el miembro de la izquierda y ρ_0 en el de la derecha y recordando la definición de Ω, obtenemos

$$(1 - \frac{1}{\Omega_0}) = (1 - \frac{1}{\Omega})\frac{\rho R^2}{\rho_0 R_0^2} \tag{82}$$

Para tiempos remotos, $\rho \to \infty$, pero $R \to 0$. Para materia o radiación, $\rho R^2 \to \infty$, de modo que el paréntesis a mano derecha debe ser muy cercano a cero para dar hoy un Ω_0 cercano a la unidad. Esto significa que Ω debió de haber estado ajustado a uno con una inexplicable precisión.

Ejercicio 17.- El ajuste fino

Suponga que $\Omega_0 = 1/2$, y obtenga con qué precisión estaba ajustado el parámetro densidad a uno, en la época de la recombinación.

11 Inflación

El modelo de universo inflacionario es una modificación al big bang estándar destinada a explicar varios de los enigmas señalados anteriormente, sin necesidad de invocar unas excepcionales condiciones iniciales. La idea fundamental es que en los primeros instantes, en lugar de una expansión como $\sqrt{t}$, o como $t^{2/3}$, que corresponden a una expansión desacelerada, ocurrió una expansión acelerada, tal vez exponencial, producida por un campo escalar que hace las veces de constante cosmológica efectiva. Aunque la existencia de una fase inflacionaria no tiene tantas evidencias a su favor como el paradigma general del big bang, es posible entender con un modelo idealmente simple, cómo el problema del horizonte y el de la planitud desaparecen si se postula la expansión exponencial. Intuitivamente, si hubo una expansión exponencial, el universo observable es apenas una parte muy pequeña del todo y debe lucir plano así como la Tierra luce localmente plana. Por otra parte, como el universo observable viene de una región más pequeña si hubo inflación, esa región más pequeña estaba conectada causalmente, resolviedo el problema del horizonte. Veamos esto cuantitativamente.

De nuevo: La Planitud

Consideremos de nuevo la ecuación (82) y recordemos que en la fase exponencial la densidad permanece esencialmente constante y hagamos $R \sim e^{\sqrt{\Lambda}t}$ como en el modelo de de Sitter. Para tiempos muy cercanos al big bang, las densidades se cancelan y el miembro derecho tiende a cero para cualquier valor del parámetro densidad, por consiguiente, $\Omega = 1$. Esta es una predicción de casi todos los modelos inflacionarios, que nuestro universo tiene secciones espaciales euclídeas.

De nuevo: El horizonte

Calculemos de nuevo el tamaño del horizonte desde el big bang hasta un t_1, para una expansión exponencial

$$d_h(t_1) = cA\, e^{\sqrt{\Lambda}t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt}{Ae^{\sqrt{\Lambda}t}}$$

realizando el cálculo, puede verse que el resultado es

$$d_h(t_1) = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}(e^{\sqrt{\Lambda}t_1} - 1)$$

Escogiendo el tiempo final $t_1 = 1$ seg y $\sqrt{\Lambda} = 10^n$ seg^{-1},obtenemos

$$d_h(t_1) \simeq \frac{c}{10^n} e^{10^n}$$

que para $n \approx 2$ da un valor para el horizonte al cabo de un segundo, mucho mayor que el horizonte actual, resolviendo el problema de la causalidad. El problema, que no abordaremos aquí, es cómo simular una constante cosmológica tal que $\sqrt{\Lambda} = 10^n$ seg^{-1}.

12 Algunas Constantes, Algunos Parámetros

- Constante Gravitacional de Newton $G = 6,67 \times 10^{-8}\ \mathrm{cm^3 gr^{-1}\, seg^{-2}}$
- Velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \times 10^{10}\, \mathrm{cm\, seg^{-1}}$
- Constante de Planck $h = 6,6 \times 10^{-27}\, \mathrm{gr\, cm^2\, seg^{-1}}$
- Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-16}\, \mathrm{erg}\ {}^\circ\mathrm{K}^{-1}$
- Masa del protón $m_p = 1,67 \times 10^{-24}$ gr
- Masa del electrón $m_e = 9,10 \times 10^{-28}$ gr
- Constante de Stephan-Boltzman $a = 7,56 \times 10^{-15}$ erg $\mathrm{cm^{-3}}\ {}^\circ\mathrm{K}^{-4}$
- Constante de Hubble $H_0 = 70\, \mathrm{Km\, seg^{-1}\, Mpc^{-1}}$
- Tiempo de Hubble $H_0^{-1} = 14 \times 10^9$ años
- 1 año 1 año$= 3,15 \times 10^7$ seg
- 1 Parcec $1\mathrm{pc} = 3,08 \times 10^{18}\mathrm{cm}$
- 1 año-luz 1año-luz $\approx 10^{18}$cm
- Temperatura actual de la radiación $T_{rad}(t_0) = 2,725 \pm 0,002\ {}^\circ\mathrm{K}$

13 Bibliografía Sugerida

- Nivel elemental, sin invocar a las matemáticas

George Ellis, Ruth Williams; *Flat and Curved Spacetimes*, Oxford University Press, 1988.

Marc Lachieze-Rey; *Cosmology: a First course*, Cambridge University Press, 1995.

Robert Wald; *Space, Time and Gravity*, The University of Chicago Press, 1992.

Edward Harrison; *Cosmology, The Science of the Universe*, Cambridge University Press, 1991.

Craig Hogan; *The Little Book of the Big Bang*, Springer-Verlag, New York,1998.

John Barrow; *The Origin of the Universe*, BasicBooks, Harper-Collins Publishers, 1994.

George Ellis; *Before the Beginning*: Cosmology Explained, Bowerdean Publishing Co., 1993.

Steven Weinberg; *The First Three Minutes: a Modern view of the Origin of the Universe*, Fontana/Collins, Glascow, 1977.

- Nivel más formal y avanzado

Peter Coles, George Ellis; *Is the Universe Open or Closed?* Cambridge Lectures Notes in Physics, Cambridge University Press, 1997.

Steven Weinberg; *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.

James Peebles; *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.

Héctor Rago; *Cosmología Relativista, una Introducción.* Curso dictado en la I Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica, ULA, 1995.

Wolfgang Rindler; *Essential Relativity*, Springer-Verlag,1977.

J. N. Islam; *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge University Press, 1992.

Artículos

Lawrence Krauss; *Cosmological Antigravity*, Scientific American, Jan 1999.

Michael Turner, J. Anthony Tyson; *Cosmology at the Milenium*, astro-ph 9901113, 1999.

J. Peebles, D. Schram, E. Turner, R. Kron; *The Evolution of the Universe*, Scientific American, 1998.

J. Peebles; *The Standard Cosmological Model*, astro-ph 9806201, jun 1998.

J. D. Cohn; *Living with Lambda*, astro-ph 9807128.

- Algunas páginas web con material interesante

http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gr/public/cos_home.html
http://www.astro.uiuc.edu/~jdc/cosmo.html
http://astro.stanford.edu/users/jeffw/P15/P15.html
http://www.bc.cc.ca.us/programs/sea/astronomy/book.htm
http://euclid.tp.ph.ic.ac.uk/~albrecht/college-only/astro-notes/course2.html
http://map.gsfc.nasa.gov/html/big_bang.html