SOBRE LA INTERFASE ENTRE MATEMÁTICAS Y COSMOLOGÍA

Jaume Carot,
Grup de Relativitat i Cosmologia
Dep. Física, Universitat Illes Balears
Campus UIB, Cra Valldemossa pk 7.5
E-07122 Palma de Mallorca (Espanya)

Tel.: +34-971-173225
Fax: +34-971-173426
jcarot@uib.es

Universidad de los Andes (ULA)
Mérida (Venezuela)
Junio de 2004

Índice general

Capítulo 1

Algunos Conceptos simples en Geometría.

El propósito de este capítulo es revisar algunos conceptos básicos de Geometría Diferencial que subyacen todos los desarrollos posteriores en el campo de la Relatividad General y la Cosmología relativista (entre muchos otros campos de la Física). Asimismo, introduciremos la notación básica que emplearemos luego a lo largo de estas notas.

1.1. Vectores y Espacio Tangente.

Para fijar ideas e introducir algunos de los conceptos que utilizaremos repetidamente, consideremos un ejemplo muy simple espacio vectorial; a saber $\mathbb{R}^2$. El espacio $\mathbb{R}^2$ se puede definir/concebir de dos formas: bien como el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (que llamaremos $\mathbb{R}^2$), o bien como flechas tangentes al plano con un origen común en un punto p de éste (que llamaremos $T_p\mathbb{R}^2$ o espacio tangente al plano en el punto p):

(a) $\mathbb{R}^2 = \{\vec{u} = (u^1, u^2),\ u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}$, con la suma y el producto por un escalar definidos como es habitual; i.e.: $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\vec{v} = (v^1, v^2)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \equiv (u^1 + v^1, u^2 + v^2)$ para la suma, y $a \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$ entonces $a \cdot \vec{u} \equiv (au^1, au^2)$ para el producto por un escalar. Notemos que los vectores de $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados de números reales.

(b) $T_p\mathbb{R}^2 = \{$flechas en el plano con origen en el mismo punto $p\}$, con la suma definida mediante la regla del paralelogramo (i.e.: dadas dos flechas $\vec{u}_p, \vec{v}_p$ con origen en el mismo punto, su suma $\vec{u}+\vec{v}$ es la flecha que tiene por origen el mismo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y por extremo el punto opuesto al origen según la diagonal del paralelogramo que tiene por lados las flechas $\vec{u}_p$ y $\vec{v}_p$[1]; y el producto por un escalar mediante una regla que podría expresarse como: 'dada una flecha $\vec{u}_p$ y un escalar a, la flecha $a\vec{u}$ es la que tiene por origen y dirección los mismos que $\vec{u}_p$, longitud a veces la de $\vec{u}$ y sentido el mismo que $\vec{u}_p$ si $a > 0$ o contrario si $a < 0$'. Este espacio se llama **espacio tangente al plano en el punto** p y se representa como $T_p\mathbb{R}^2$. Notemos que los vectores de este espacio son flechas que tienen un mismo origen.

[1] Una imagen vale más que mil palabras, ¿o no?

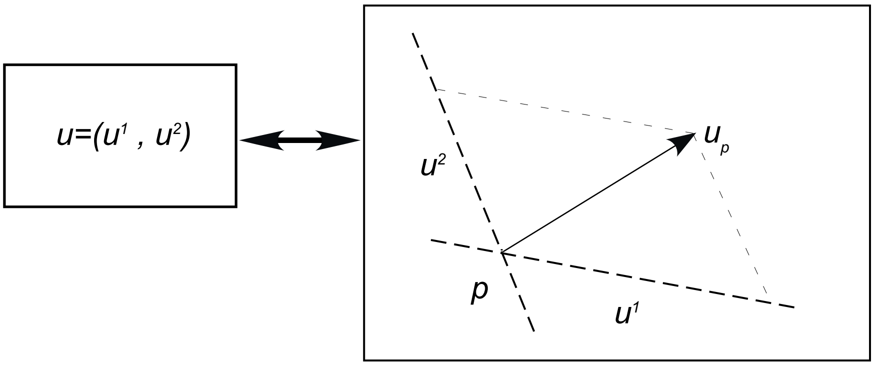

Figura 1.1: Equivalencia entre $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{u}_p \in T_p\mathbb{R}^2$.

La equivalencia entre ambos espacios está tan profundamente enraizada en nuestra manera de pensar que la asumimos como obvia, aunque debería resultar claro que los vectores son objetos diferentes en uno y otro caso: pares ordenados de números reales y flechas en el plano con origen común (que pueden ser dibujadas). Asimismo, las operaciones son también diferentes: 'suma ordenada' y 'regla del paralelogramo' respectivamente, etc.

De hecho, los vectores en uno y otro espacio se puede decir que son **representaciones** diferentes (pares ordenados de números reales/flechas en el plano con origen común) de un mismo objeto.

Para pasar de una representación a otra necesitamos una 'regla de paso', que no es sino lo que en álgebra lineal se llama **isomorfismo**; esto es: una función que asigna a cada par ordenado de números reales una flecha y sólo una y viceversa (función o aplicación biyectiva) y que 'conserva' la suma y el producto por un escalar (i.e.: dado un par (w^1, w^2) que es suma de dos pares ordenados $(w^1, w^2) = (u^1, u^2) + (v^1, v^2)$, dicha función asigna una flecha al par (w^1, w^2) que coincide con la flecha suma -mediante la regla del paralelogramo- de las flechas asignadas a los pares (u^1, u^2) y (v^1, v^2), etc.). En este caso, la 'regla de paso' se podría esquematizar mediante el siguiente algoritmo:

(1) Tomar ejes sobre el plano: pueden ser perpendiculares entre si o cortarse formando un cierto ángulo diferente de $\pi/2$.

(2) Dado el par (u^1, u^2), representar el punto del plano que tiene coordenadas (u^1, u^2) con respecto a los ejes dibujados.

(3) Dibujar la flecha que tiene por origen el punto de intersección de los ejes tomados en (1), y por extremo el punto del plano dibujado en (2). La flecha así obtenida, que designaremos $\vec{u}_p$ **representa** el vector $\vec{u}$ lo mismo que el par ordenado (u^1, u^2), y así escribiremos $\vec{u}_p = (u^1, u^2)$ simplemente.

Notemos que cada elección de ejes (cada ángulo de corte entre los ejes que supongamos) genera una función diferente, y así un par ordenado (u^1, u^2) viene representado por diferentes flechas según tomemos ejes diferentes, pero en cualquier caso la relación 'par ordenado' $\leftrightarrow$ 'flecha' es biyectiva (una vez se han escogido los ejes), y se conservan la suma y el producto por un escalar.

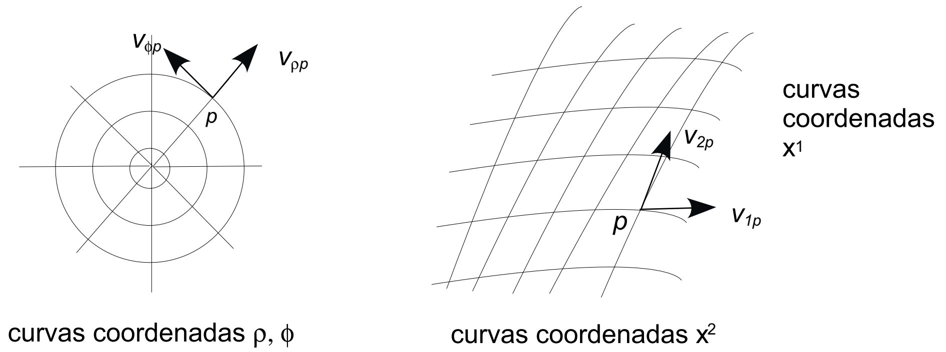

Figura 1.2: Curvas coordenadas y Vectores tangentes a ellas. Coordenadas polares y coordenadas arbitrarias $x^a = \{x^1, x^2\}$.

Resulta obvio que lo anterior se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ y $T_p\mathbb{R}^n$ para n cualquiera y más aún: dada una 'superficie' n dimensional M contenida en un espacio $\mathbb{R}^N$ con $n < N$, siempre podemos definir T_pM como el conjunto de las flechas n-dimensionales tangentes a la superficie M y con origen en el punto p de ésta. Como ejemplo se puede pensar en la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$; tenemos entonces $T_pS^2 = \{$flechas tangentes a la esfera en el punto $p\}$ y claramente este espacio es idéntico (isomorfo) a $T_p\mathbb{R}^2$.

En lo sucesivo llamaremos a estas 'superficies' n- dimensionales **variedades n-dimensionales**.

1.2. Coordenadas y curvas coordenadas.

En esta sección seguiremos utilizando el plano como variedad a la hora de presentar y desarrollar los conceptos que siguen, siendo la generalización a variedades n-dimensionales (véase el final de la sección anterior) absolutamente trivial.

Consideremos el plano euclideo con coordenadas cartesianas $\{x, y\}$, o polares $\{\rho, \phi\}$, o en general, unas coordenadas cualesquiera $x^a = \{x^1, x^2\},\ a = 1, 2$ y dibujemos las curvas coordenadas correspondientes a cada uno de estos sistemas de coordenadas. Así se tiene que para un punto dado p de coordenadas (x_0, y_0), o (ρ_0, ϕ_0), o (x_0^1, x_0^2), la curva coordenada x que pasa por ese punto está formada por todos los puntos tales que $y = y_0$ (constante) mientras que su coordenada x toma todos los valores posibles; la curva coordenada ρ que pasa por p está formada por todos los puntos tales que su coordenada $\phi = \phi_0$ (constante) y ρ varía, etc. En el caso de unas coordenadas cualesquiera $\{x^1, x^2\}$, la curva coordenada x^1 que pasa por p consiste en los puntos tales que $x^2 = x_0^2$ y x^1 varía, mientras que la curva coordenada x^2 a través de ese mismo punto está formada por los puntos para los que $x^1 = x_0^1$ y x^2 varía (véanse las figuras).

Consideremos asimismo los vectores $\{\vec{v}_{\rho_p}, \vec{v}_{\phi_p}\} \in T_p\mathbb{R}^2$ tangentes (con punto de aplicación) en el punto

p a las curvas coordenadas ρ y ϕ que se cortan en p. Es fácil comprobar que estos vectores constituyen una base de $T_p\mathbb{R}^2$.

Sea ahora una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cualquiera, si utilizamos, por ejemplo, coordenadas polares tendremos $f(\rho, \phi)$ y entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial \rho}\right]_p &\equiv \text{variación de } f \text{ según } \rho \text{ con } \phi = \phi_0 \text{ en } p \\ &\equiv \text{variación de } f \text{ en la dirección de } \vec{v}_{\rho_p} \\ \left[\frac{\partial f}{\partial \phi}\right]_p &\equiv \text{variación de } f \text{ según } \phi \text{ con } \rho = \rho_0 \text{ en } p \\ &\equiv \text{variación de } f \text{ en la dirección de } \vec{v}_{\phi_p} \end{aligned}$$

y entonces se tiene que

$$a\left[\frac{\partial f}{\partial \rho}\right]_p + b\left[\frac{\partial f}{\partial \phi}\right]_p \equiv \text{variación de } f \text{ en la dirección de } a\vec{v}_{\rho_p} + b\vec{v}_{\phi_p}$$

que no es sinó la expresión de la **derivada direccional**.

De modo similar y para unas coordenadas cualesquiera $\{x^1, x^2\}$ se tendrá también que si $\{\vec{v}_{1p}, \vec{v}_{2p}\}$ son los vectores tangentes en p a las curvas coordenadas x^1 y x^2 respectivamente entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_p &\equiv \text{variación de } f \text{ según } x^1 \text{ con } x^2 = x^2_0 \text{ en } p \\ &\equiv \text{variación de } f \text{ en la dirección de } \vec{v}_{1p}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$a\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_p + b\left[\frac{\partial f}{\partial x^2}\right]_p \equiv \text{variación de } f \text{ en la dirección de } a\vec{v}_{1p} + b\vec{v}_{2p}$$

De modo que podemos definir operadores derivada direccional en un punto como

$$\left[a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p \equiv \begin{array}{c} \text{Derivada Direccional} \\ \text{en la dirección de} \\ \vec{u}_p = a\vec{v}_{1p} + b\vec{v}_{2p} \end{array}$$

Es inmediato e intuitivo ver que los operadores derivada direccional en un punto se pueden sumar y multiplicar por escalares:

$$\begin{aligned} \text{Suma}: \left[a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p + \left[a'\frac{\partial}{\partial x^1} + b'\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p &\equiv \left[(a+a')\frac{\partial}{\partial x^1} + (b+b')\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p \\ \text{Producto}: k\left[a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p &\equiv \left[ka\frac{\partial}{\partial x^1} + kb\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p \end{aligned}$$

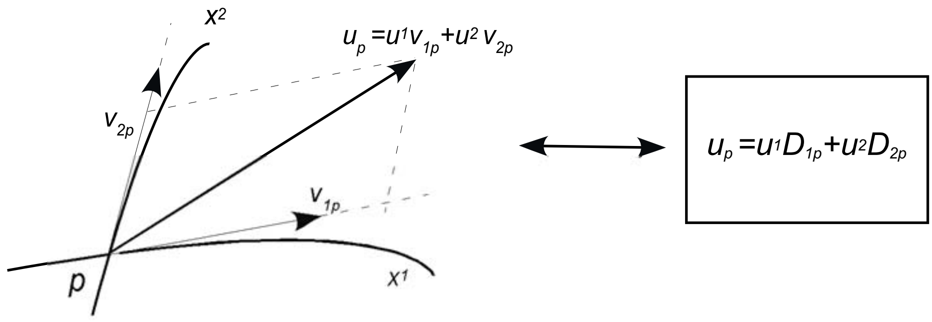

Figura 1.3: Equivalencia entre flechas y operadores derivada direccional. En la figura se tiene $D_{1p} = \partial_{1p}$ y $D_{2p} = \partial_{2p}$.

con estas operaciones así definidas, el conjunto de todos los operadores derivada direccional en un punto tiene estructura de espacio vectorial.

Todo lo anterior establece una identificación entre flechas tangentes al plano con origen en p y operadores derivada direccional en el mismo sentido y con las mismas propiedades que en el caso de la identificación entre pares ordenados de números reales y flechas tangentes al plano con origen en p (véase la sección anterior); esto es: se trata de una biyección que conserva la suma y el producto por un escalar (isomorfismo) y por lo tanto se puede decir que un par ordenado de números reales, una flecha con origen en p y tangente al plano y un operador derivada direccional en p son representaciones de un mismo objeto. Dada esta identificación, al espacio vectorial de los operadores derivada direccional en un punto p se le llama también **Espacio Tangente a $\mathbb{R}^2$ en** p y se le representa como $T_p\mathbb{R}^2$.

N 1 Notemos que según esta asignación entre vectores flecha y operadores derivada direccional se tiene

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{v}_{ap}: \text{ vector tangente a la} \\ \text{curva coordenada } x^a \text{ en } p\end{array}} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\partial}{\partial x^a}\right]_p : \text{ derivada} \\ \text{parcial según } x^a \text{ en } p\end{array}}$$

Claramente se tiene que,

$$\mathcal{B} = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\right]_p, \left[\frac{\partial}{\partial x^2}\right]_p \right\}$$

es una base de $T_p\mathbb{R}^2$ llamada **Base Coordenada**.

N 2 A partir de ahora y para simplificar la notación emplearemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^a}\right]_p \equiv \partial_a|_p$$

y a menudo (y siempre que ello no pueda dar lugar a confusión) prescindiremos de toda referencia al punto p sobreentendiéndola. Emplearemos también el llamado **Convenio de Sumación de Einstein**; así $u^1\partial_1 + u^2\partial_2 = u^a\partial_a$; o de modo general $C^kB_k = C^1B_1 + \cdots + C^mB_m$, esto es: índices repetidos que aparezcan como superíndices y como subíndices se consideran sumados sobreentendiéndose tanto el sumatorio como los límites de sumación, siempre y cuando ello no pueda inducir a error o confusión.

1.2.1. Cambio de Coordenadas y Definición de Vector en Física.

Consideremos ahora dos sistemas de coordenadas arbitrarios válidos sobre el plano (o sobre una misma región abierta de éste); $x^a = \{x^1, x^2\}$ y $x^{a'} = \{x^{1'}, x^{2'}\}$, a los nos referiremos como *coordenadas x y coordenadas x'*; se tiene entonces, aplicando la regla de la cadena:

$$\partial_1|_p = \left[\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\partial_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\partial_{2'}\right]_p , \quad \partial_2|_p = \left[\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\partial_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\partial_{2'}\right]_p$$

Dado $\vec{u}_p = (u^1\partial_1 + u^2\partial_2)_p$ y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se tiene

$$\vec{u}_p = \left[\left(u^1\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + u^2\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\right)\partial_{1'} + \left(u^1\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} + u^2\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\right)\partial_{2'}\right]_p \equiv \left(u^{1'}\partial_{1'} + u^{2'}\partial_{2'}\right)_p$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}; \qquad u^{a'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^m}\right]_p u^m$$

de modo semejante se tendría

$$u^a = \left[\frac{\partial x^a}{\partial x^{c'}}\right]_p u^{c'}$$

esto es, las matrices de transición entre las dos bases son las matrices Jacobianas del cambio de coordenadas.

La generalización a una variedad M de dimensión n es inmediata y se tienen en todo momento ecuaciones semejantes a las anteriores, esto es, para dos sistemas de coordenadas $x^a = \{x^1, \cdots, x^n\}$ y $x^{a'} = \{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$, se tiene que $\mathcal{B} = \{\partial_1|_p, \cdots, \partial_n|_p\}$ y $\mathcal{B}' = \{\partial_{1'}|_p, \cdots, \partial_{n'}|_p\}$ son dos bases (coordenadas) de T_pM (espacio tangente a M en el punto $p \in M$) y entonces un vector cualquiera $\vec{u}_p \in T_pM$ se podrá expresar en componentes según ambas bases como

$$\vec{u}_p = u^a\partial_a|_p = u^{a'}\partial_{a'}|_p, \quad \text{siendo} \quad u^{a'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^m}\right]_p u^m \tag{1.1}$$

Esto lleva directamente a la definición de vector (contravariante) tal y como se utiliza habitualmente en Física:

Definición 1 *Un* ***vector (contravariante) en una variedad*** n***-dimensional*** M *(o simplemente* ***vector n-dimensional****) es un conjunto de n números, asociados a un punto* $p \in M$*, que escribimos como* $(u^1, \cdots, u^n)$ *en el sistema de coordenadas* $\{x^1, \cdots, x^n\}$ *y* $(u^{1'}, \cdots, u^{n'})$ *en el sistema de coordenadas* $\{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ *de modo que*

$$u^{a'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^m}\right]_p u^m.$$

N 1 Notemos que esto proporciona un modo muy simple de encontrar las expresiones de los vectores tangentes a unas determinadas curvas coordenadas en función (como combinación lineal) de los vectores tangentes a otras curvas coordenadas dadas.

N 2 El adjetivo *contravariante* aquí significa simplemente *que lleva los índices arriba* (superíndices), más adelante veremos en qué se distingue de *covariante*.

1.2.2. Campos de Vectores.

Hasta aquí hemos hablado de vectores definidos en un punto, con lo que todos los desarrollos son los propios del álgebra lineal elemental, en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$, independientemente de que para determinados propósitos interpretaramos los vectores como flechas con origen en el punto en cuestión o como operadores derivada direccional.

Para muchas aplicaciones ocurre que tenemos un vector en cada punto de la variedad ditribuídos de forma continua, esto es: puntos cercanos tienen vectores con valores cercanos de sus respectivas componentes según las bases coordenadas en esos puntos; esta es la idea de **campo vectorial (contravariante)** de la cual abundan los ejemplos en Física: el campo gravitatorio, donde en cada punto del espacio (variedad) hay un vector definido: la fuerza que experimentaría una masa unidad situada en ese punto; el campo electrostático definido de modo similar pero con respecto a la carga eléctrica, etc.

Más concretamente se tiene:

Definición 2 *Un* ***campo vectorial (contravariante)*** $\vec{X}$ *sobre una variedad n-dimensional* M *es una función continua que asigna a cada punto* $p \in M$ *un vector de* T_pM*; i.e. (definición Física): es un conjunto de n funciones continuas definidas sobre* M*, que escribimos* $X^a(x)$ *en las coordenadas* x *(*$\{x^1, \cdots, x^n\}$*) y* $X^{a'}$*) en las coordenadas* x' *(*$\{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$*) de modo que*

$$X^{a'}(x') = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^m}\right] X^m(x(x')).$$

N 1 En rigor lo que hemos definido más arriba es un campo vectorial continuo. Un campo vectorial responde a la definición anterior sin el requisito de continuidad; ocurre sin embargo que los únicos campos que nos interesan son no sólo continuos, sino también infinitamente diferenciables: C^∞ (esto es: las funciones $X^a(x)$ son funciones C^∞), a partir de ahora supondremos salvo indicación expresa en sentido contrario que los campos vectoriales que manejamos son C^∞.

1.2.3. Curvas y Vectores Velocidad.

A continuación revisaremos los conceptos de curva y vector tangente a ésta, como hemos venido haciendo hasta aquí, veremos estos conceptos en el caso del plano euclideo, siendo inmediata su generalización al caso de una variedad n-dimensional.

Definición 3 *Una* ***curva*** γ ***en*** $\mathbb{R}^2$ *es una función diferenciable* $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *tal que para todo* $t \in (a,b)$*, la imagen* $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$*. En unas coordenadas arbitrarias* $x^a = \{x^1, x^2\}$ *se tiene* $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t))$ *y esta expresión se llama entonces* ***representación paramétrica de la curva*** γ*, y se dice también que la curva está* ***parametrizada*** *por* t *(o que* t *es el* ***parámetro*** *a lo largo de la curva).*

Definición 4 *El* ***vector tangente a la curva*** $\gamma(t)$ ***en el punto*** p *(o* ***vector velocidad*** *de la curva en* p*) es* $\vec{u}_p \in T_p\mathbb{R}^2$ *definido como*

$$\vec{u}_p = \left[\frac{d\gamma(t)}{dt}\right]_p = \left[\frac{dx^1(t)}{dt}\partial_1 + \frac{dx^2(t)}{dt}\partial_2\right]_p$$

para unas coordenadas cualesquiera x^1, x^2*.*

A partir de la interpretación geométrica de la derivada se puede ver que el vector así definido es una flecha tangente a la curva y con punto de aplicación en el punto p.

Ejemplo 1: Sea $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida como $C(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$. Claramente esta curva consiste en una circunferencia de radio 1.

N 1 Dada una curva parametrizada por t, siempre podemos reparametrizarla mediante otro parámetro $t' = h(t)$ donde h es una función diferenciable en el intervalo (a,b), se obtiene así lo que denomina una **reparametrización** de la curva, $\gamma(t')$ y ésta pasa a estar definida como $C : (h(a), h(b)) \to \mathbb{R}^2$ si $h(a) < h(b)$ o bien como $C : (h(b), h(a)) \to \mathbb{R}^2$ en caso contrario.

N 2 A menudo, en el caso del plano, las curvas se expresan como $y = f(x)$. El paso de la representación paramétrica a ésta es simple: de $x = x(t)$ se despeja t como función de x; i.e.: $t = t(x)$ y se substituye en la expresión de $y = y(t)$ así: $y = y(t(x)) \equiv y(x)$. Hay que tener cuidado puesto que, mientras que la representación paramétrica de una curva es, por definición, una función; las expresiones del tipo $y = f(x)$ pueden resultar un tanto problemáticas; así en el ejemplo anterior se tiene: $x = \cos t$ y por tanto $t = \arccos x$ con lo que $y = \sin\arccos x = \pm\sqrt{1 - x^2}$ que no es una función monovaluada.

N 3 El paso contrario es muy simple también: dada $y = f(x)$, ponemos, por ejemplo, $x = t$ y entonces $y = f(t)$; así se tiene $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$. Cualquier otro tipo de asignación $x = h(t)$ (con h una función monovaluada de t con un rango adecuado) conduce entonces a $y = f(h(t)) = (f \circ h)(t) = y(t)$, otra representación paramétrica (una reparametrización) de la curva. Así por ejemplo, la parábola $y = x^2$ puede ser representada paramétricamente como: $(x(t), y(t)) = (t, t^2)$ o también $(x(t), y(t)) = (\tan t, \tan^2 t)$; sin embargo asignaciones tales como $x(t) = \sin t$ sólo serían válidas para valores de $x \in (-1, 1)$.

Un tipo particularmente importante de curvas son las **curvas coordenadas** que pasan por un punto dado, así, dado un punto $p \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas (x_0, y_0), la curva coordenada-x que pasa por p, que llamaremos X_p, es

$$\begin{array}{rcl} X_p : (-\infty, +\infty) & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) = (x_0 + t, y_0) \end{array}$$

esto es: mantenemos la coordenada y constante e igual a y_p y dejamos variar la coordenada x de modo que para $t = 0$ se tiene $x(t = 0) = x_0$.
De manera similar se definiría la curva coordenada-y que pasa por p, Y_p,i.e.:

$$\begin{array}{rcl} Y_p : (-\infty, +\infty) & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) = (x_0, y_0 + t) \end{array}$$

Para coordenadas cualesquiera x^1, x^2 tendremos igualmente que las curvas coordenadas que pasan por el punto p de coordenadas (x_0^1, x_0^2) serán, en una notación obvia:

$$\begin{array}{rcl} X_p^1 : (a,b) & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x^1(t), x^2(t)) = (x_0^1 + t, x_0^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} X_p^2 : (a',b') & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x^1(t), x^2(t)) = (x_0^1, x_0^2 + t) \end{array}$$

donde los intervalos (a,b) y (a',b') corresponden a los valores que pueden tomar las coordenadas x^1 y x^2 respectivamente (por ejemplo, si $x^1, x^2 = \rho, \phi$; coordenadas polares, entonces $a = -\rho_0$, $b = \infty$ y $a' = -\phi_0$, $b' = 2\pi - \phi_0$).

Las definiciones anteriores en el caso de una variedad M de dimensión n son simplemente

Definición 5 *Una **curva** γ **en una variedad** n**-dimensional** M es una función diferenciable $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to M$ tal que para todo $t \in (a,b)$, la imagen $\gamma(t) \in M$. En unas coordenadas arbitrarias $x^a = \{x^1, \cdots, x^n\}$ se tiene $\gamma(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ y esta expresión se llama entonces **representación paramétrica de la curva** γ.*

*El **vector tangente a la curva** $\gamma(t)$ **en el punto** p (o **vector velocidad** de la curva en p) es $\vec{u}_p \in T_pM$ definido como*

$$\vec{u}_p = \left[\frac{d\gamma(t)}{dt}\right]_p = \left[\frac{dx^1(t)}{dt}\partial_1 + \cdots + \frac{dx^n(t)}{dt}\partial_n\right]_p$$

Si en lugar de considerar el vector tangente a la curva (vector velocidad de la curva) en un punto p de ésta consideramos el conjunto de *todos* los vectores tangentes a γ en todos sus puntos, tenemos el **campo de velocidades** de la curva γ; esto es: un campo de vectores, definido esta vez no sobre toda la variedad sino tan sólo sobre la curva en cuestión y tal que al particularizar a un punto concreto de la curva se obtiene el vector tangente a la curva en ese punto; en general lo escribiremos:

$$\vec{u}(x(t)) = \frac{dx^a(t)}{dt}\partial_a$$

1.3. Variedades: una aproximación informal.

Las **Variedades Diferenciables**, o simplemente en nuestro caso **Variedades**, son el objeto de estudio de la rama de las matemáticas llamada **Geometría Diferencial**. En la sección siguiente daremos la definición precisa de variedad; mientras tanto, en esta sección describiremos el concepto de variedad de forma intuitiva.

Existen básicamente dos aproximaciones a la idea de variedad; por un lado, una variedad no es sino la generalización de la idea de superficie (bidimensional) en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$, a una dimensión cualquiera; de hecho se puede demostrar[2] que cualquier variedad (analítica) de dimensión n se puede considerar como una superficie en un espacio euclideo $\mathbb{R}^N$ con $n \leq N \leq n(n+1)/2$, el espacio $\mathbb{R}^N$ se llama a veces **espacio ambiente** de la variedad en cuestión. Por otra parte, una variedad n-dimensional se puede 'ver' como un conjunto de puntos que localmente (i.e.: en entornos pequeños alrededor de cada punto) se parece al conjunto de puntos $\mathbb{R}^n$ (espacio euclideo n-dimensional), aunque globalmente puedan ser muy distintos.

El primer punto de vista tiene la ventaja de que en $\mathbb{R}^N$ podemos definir coordenadas cartesianas globalmente (con todo lo que ello supone) y restringir después a la variedad en cuestión. Las superficies en $\mathbb{R}^3$ son desde luego variedades 2-dimensionales; así por ejemplo, utilizando coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ la esfera S^2 (centrada en el origen y de radio 1) se puede definir como $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$; como hemos dicho podemos utilizar las coordenadas cartesianas para coordenar puntos de la esfera; así por ejemplo, un punto del hemisferio norte tendrá coordenadas $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, con lo que tan sólo son precisas dos coordenadas (x e y por ejemplo) para describir los puntos de la esfera, de acuerdo con la idea de superficie como un conjunto de puntos bidimensional, esto es: con *dos grados de libertad*. Ver la superficie (la esfera en este caso) como un subconjunto del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$ y utilizar coordenadas cartesianas allí tiene ventajas; por ejemplo, los vectores (flechas) de $T_p\mathbb{R}^3$ tienen componentes, según la base cartesiana de ese espacio, iguales a la diferencia entre las coordenadas del extremo de la flecha y el origen de ésta (p); sin embargo, resulta difícil ver si un determinado vector de $T_p\mathbb{R}^3$ lo es tambien de T_pS^2 para un punto p sobre la esfera; esto es: si una flecha con origen en p es o no tangente a la esfera. Además, uno tiene que estar refiriéndose todo el tiempo al espacio ambiente.

El segundo punto de vista es intrínseco; esto es: considera la variedad por si misma, y no como subconjunto de algún espacio ambiente. En general, no podremos definir coordenadas cartesianas, pero todo lo que digamos estará ya directamente referido a la geometría de la propia variedad. El punto clave está en el concepto de **localmente como** $\mathbb{R}^n$. Así diremos, por ejemplo, que la esfera es una variedad 2-dimensional porque localmente (en un entorno alrededor de cualquier punto):

(i) Podemos coordenar todos los puntos de ese entorno de manera continua utilizando tan sólo dos coordenadas (por ejemplo: longitud y latitud).

(ii) En ese entorno la geometría es parecida a la de $\mathbb{R}^2$ (por ejemplo, para nosotros, habitantes de la Tierra -considerándola como una esfera perfecta-, ésta nos parece plana, como $\mathbb{R}^2$, en un entorno de nuestra posición). Esta segunda condición es lo que significa el adjetivo 'diferenciable' que acompaña al sustantivo 'variedad', y simplemente significa que la superficie no puede tener 'puntas' o 'crestas'; e.g.: un cono incluyendo el vértice no sería una variedad diferenciable, ya que en un entorno del vértice, las cosas no son como en $\mathbb{R}^2$; por ejemplo: el vector tangente a cualquier curva que pasara por ese vértice es dicontinuo en el vértice (esto es: la derivada de la representación paramétrica de la curva no existe en ese punto, la curva **no es diferenciable** en ese punto), y eso no ocurre para ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

---

[2]Véase, por ejemplo: Eisenhart, LP, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1949), o también Friedman, A, *Isometric embedding of Riemann manifolds into euclidean spaces*, Rev. Mod. Phys. **37**, 201, (1965).

Para nosotros, todas las variedades serán diferenciables salvo que digamos lo contrario.

Notemos que en el caso de la esfera además es imposible establecer una correspondencia continua y uno-a-uno entre la totalidad de los puntos de la esfera y el plano. Intuitivamente, esto es fácil de ver, pero no es tan fácil de demostrar con las herramientas matemáticas[3] de que disponemos.

1.3.1. Coordenadas en una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Veamos a continuación la definición precisa de coordenadas en el caso de una superficie bidimensional $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, la generalización de esta definición a n dimensiones conduce directamente a la definición de coordenadas en una variedad M cualquiera de dimensión n.

Consideremos un punto $p \in \Sigma$ cualquiera y un abierto, que llamaremos O_p, contenido en Σ y que contenga ese punto[4]; esto es: $p \in O_p \subseteq \Sigma$.

Diremos que $\xi = \{x^1, x^2\}$ son coordenadas válidas en la región O_p si existe un abierto de $U_p \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función x de O_p en U_p:

$$\begin{aligned} x : O_p \subseteq \Sigma &\rightarrow U_p \subseteq \mathbb{R}^2 \\ q &\mapsto (x^1_q, x^2_q) \end{aligned}$$

tal que

1. x es biyectiva (i.e.: inyectiva y exhaustiva).
2. x es continua.
3. x^{-1} (que existe porque x es biyectiva) es también continua.

Parafraseando: $\{x^1, x^2\}$ son coordenadas válidas en la región O_p si a todo punto $q \in O_p$ de esa región se le pueden hacer corresponder dos números reales (x^1_q, x^2_q) que llamamos **coordenadas del punto** q, de manera que **(1) biyectividad de x:** a puntos distintos corresponden valores distintos de sus coordenadas y fijado un punto p sus coordenadas (x^1_p, x^2_p) son únicas. Además, **(2) continuidad de x:** al variar continuamente los puntos de O_p (i.e.: al pasar de un punto de O_p a otro infinitamente cercano), los valores de (x^1, x^2) varían continuamente (i.e.: pasan de un valor a otro infinitamente cercano), y también: **(3) continuidad de x^{-1}:** al variar los valores de x^1, x^2 de manera continua, obtenemos una variación continua de puntos de $O_p \subseteq \Sigma$.

Veamos algunos comentarios y precisiones al respecto:

N 1 Notemos que, dado que x es biyectiva y tanto ella como su inversa son continuas, también hubiéramos podido definirla como una función de $U_p \subseteq \mathbb{R}^2$ en $O_p \subseteq \Sigma$, esto es:

$$\begin{aligned} x : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow O_p \subseteq \Sigma \\ (x^1_q, x^2_q) &\mapsto q \end{aligned}$$

[3]Sin embargo, esto es trivial utilizando conceptos topológicos: la esfera es un conjunto compacto de puntos mientras que el plano no lo es, y se sabe que la imagen de un conjunto compacto por una función continua debe ser otro conjunto compacto.

[4]Recordemos que este conjunto abierto será simplemente la intersección de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a p, con la superficie Σ en cuestión.

en algunos libros las coordenadas se definen de este modo y en otros del otro. En cualquier caso, el abierto U_p de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los valores posibles de las coordenadas x.

N 2 Las funciones $x : O_p \to U_p$ es lo que en Física llamamos **sistemas de coordenadas** (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio O_p y recorrido U_p); en Matemáticas se llaman normalmente **cartas coordenadas**.

En general (esto es: para una superficie cualquiera) no podremos definir una carta coordenada (i.e.: un solo sistema de coordenadas) que abarque toda la superficie y que verifique todos los requisitos de la definición. Tendremos que 'partir' la superficie en varias regiones abiertas del tipo O_p considerado, que se 'solapen' unas con otras y que recubran toda la superfice y definiremos en cada una de ellas coordenadas tal y como hemos visto. En las regiones de solapamiento entre abiertos, coexisten dos sistemas de coordenadas y por tanto podremos hablar de 'cambio de coordenadas', ya que si tenemos coordenadas $x : O_p \to U$ y coordenadas $x' : O_{p'} \to U_{p'}$, dado un punto $q \in O_p \cap O_{p'}$, tendremos que $f \equiv x' \circ x^{-1} : U_p \to U_{p'}$ será una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (que es a la que llamamos **cambio de coordenadas** y que es biyectiva, continua y con la inversa continua también); si estas funciones son todas ellas de tipo C^n entonces se dice que la superficie Σ es diferenciable C^n, y diferenciable C^∞, o analítica si dichas funciones son C^∞ o analíticas, respectivamente.
Fijémonos que las coordenadas x así definidas, suponen, de hecho, una **representación paramétrica de** Σ, ya que para un punto $q \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, se tiene en coordenadas cartesianas (x_q, y_q, z_q) y en las coordenadas x^1, x^2 definidas sobre la superficie (x_q^1, x_q^2), y lo mismo para todos los puntos de la región O_p, es decir: tenemos las coordenadas cartesianas (x, y, z) propias de $\mathbb{R}^3$, y las coordenadas (x^1, x^2) definidas en esa región de Σ, con lo cual se tendrá

$$x = x(x^1, x^2), \quad y = y(x^1, x^2), \quad z = z(x^1, x^2)$$

esto es: una representación paramétrica de los puntos de Σ, recuperándose así la idea de que *una superficie es un conjunto de puntos con dos grados de libertad*, en el mismo sentido en que *una curva es un conjunto de puntos con un grado de libertad* (que parametrizamos/coordenamos mediante t). Esto encaja con la representación de una superficie mediante una ligadura:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}.$$

Fijémonos que de la expresión anterior podemos "despejarüna de las coordenadas en función de las otras dos, por ejemplo: $z = h(x, y)$ y de aquí se tiene directamente una representación paramétrica, puesto que basta poner, por ejemplo: $x = x, y = y, z = h(x, y)$; y a partir de aquí reparametrizando: $x = F(x^1, x^2)$, $y = G((x^1, x^2)$, donde F y G sean tales que $\det[\partial(x, y)/\partial(x^1, x^2)]$, se pasa a cualquier otra representación paramétrica que convenga.
Ejemplo 1: La esfera $S_a^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ se puede expresar de forma paramétrica conveniente como:

$$x = a \sin\theta \cos\phi, \quad y = a \sin\theta \sin\phi, \quad z = a \cos\theta$$

donde θ y ϕ son los parámetros/coordenadas sobre esta superficie.
Ejemplo 2: El cono $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ se puede expresar de forma paramétrica conveniente como:

$$x = \xi^1 \cos\xi^2, \quad y = \xi^1 \sin\xi^2, \quad z = \xi^1$$

donde ξ^1 y ξ^2 son los parámetros/coordenadas sobre esta superficie.
La representación de la superficie como ligadura es

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

y resulta claro que $(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)|_p \neq \vec{0}$ para cualquier punto p excepto para el vértice O (que coincide con el origen) que tiene coordenadas $(0, 0, 0)$.

N 3 Es interesante notar que, para poder despejar $z = h(x, y)$ a partir de $f(x, y, z) = 0$, el teorema de la función implícita (o de la función inversa), requiere que en algún punto (x_p, y_p, z_p) de la región de interés se tenga: $\partial_z f(x, y, z)|_p \neq 0$, entonces la existencia de la función $z = h(x, y)$

está garantizada en un entorno del punto (x_p, y_p). Pudiera ocurrir que $\partial_z f(x,y,z)|_p = 0$ pero que, por ejemplo, $\partial_x f(x,y,z)|_p \neq 0$, en cuyo caso estaría garantizada la existencia de una función $x = H(y,z)$, etc. En resumen, para que una expresión del tipo $f(x,y,z) = 0$ represente una superficie en una región alrededor de un punto p (i.e.: un conjunto de puntos con dos grados de libertad/representable mediante 2 parámetros o coordenadas) es necesario que en ese punto $(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)|_p \neq \vec{0}$. Si ello no ocurre significa que el punto en cuestión es un punto 'singular' (una 'punta', etc.), donde la superficie puede no ser suave. Ver el **Ejemplo 2**.

1.3.2. Variedades: una definición formal.

Como ya hemos dicho, una variedad es la generalización a una dimensión cualquiera del concepto de superficie. A continuación, y por razones de completitud, daremos la definición formal tal y como viene en la mayor parte de textos. Conviene recordar sin embargo y en todo momento la imagen intuitiva de variedad descrita en la sección anterior, a la que añadimos esta otra: Una variedad está hecha de trozos que son como conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, 'cosidos' entre si sin formar puntas, crestas, etc., esto es: "suavemente".

Definición 6 *Una* ***variedad real****, C^∞, n-**dimensional** M es un conjunto de puntos junto con una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\} = \mathcal{T}$, que son sus abiertos (i.e.: $\mathcal{T}$ es una topología y por tanto $(M, \mathcal{T})$ es un espacio topológico; en particular esto implica que cada punto $p \in M$ está contenido en al menos un subconjunto O_α y que los $\{O_\alpha\}$ forman un recubrimiento de M), de modo que:*

1. *Para cada O_α existe una función $x_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, donde U_α es un abierto de $\mathbb{R}^n$, de modo que la función x_α (que tendrá n componentes: $x_\alpha(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \in U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$) es biyectiva y continua y la inversa es también continua[5].*

2. *Si dos subconjuntos O_α, O_β se solapan; i.e.: $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, consideremos la función f definida como $f = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$; i.e.:*

$$f \equiv x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to x_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$$

   Entonces f y f^{-1} (que son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$) son C^∞.

N 1 Como en el caso de las superficies, las funciones $x_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$ se llaman en Física **sistemas de coordenadas** (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio O_α ni el recorrido U_α); mientras que en Matemáticas se llaman **cartas coordenadas**. Nosotros utilizaremos indistintamente un nombre u otro.

N 2 A fin de evitar que podamos 'fabricar' variedades nuevas introduciendo un nuevo sistema de coordenadas, o introduciendo un abierto $O_{\gamma'} \subset O_\gamma$ y definiendo allí nuevas coordenadas, se requiere en la definición anterior que el recubrimiento $\{O_\alpha\}$ y la familia de cartas (o sistemas de) coordenadas $\{x_\alpha\}$ sea maximal, esto es: que todos los sistemas de coordenadas compatibles con los requisitos (1) y (2) de la definición estén incluídos. Ni que decir tiene que esto no supone ninguna complicación para los desarrollos que vienen a continuación y no debe preocuparnos.

[5]En matemáticas, una función biyectiva, continua y con la inversa también continua se llama **homeomorfismo**, y si además ella y su inversa son C^∞, se llama **difeomorfismo**.

N 3 Si los cambios de coordenadas son continuos simplemente (ni siquiera diferenciables) hablamos de variedades topológicas, si son diferenciables tan sólo n veces, de variedades C^n. Nosotros supondremos siempre que nuestras variedades son C^∞ (suaves: 'smooth' en inglés) y las llamaremos simplemente **variedades** (en lugar de variedades diferenciables); éste es desde luego el caso de la Física, donde las variedades de interés son, en muchos casos, de dimensiónes bajas: dimensión 2 (superficies en $\mathbb{R}^3$ incluyendo el plano $\mathbb{R}^2$), dimensión 3: el propio espacio $\mathbb{R}^3$ (o alguna región abierta de éste), dimensión 4: diferentes tipos de espacio-tiempo (sobre los cuáles está formulada la Teoría de la Relatividad). Hay otros casos de interés en que los puntos de la variedad no son necesariamente o directamente identificables como puntos en el sentido geométrico (i.e.: elementos de $\mathbb{R}^3$ o de alguna superficie contenida allí, o incluso puntos del espacio-tiempo): por ejemplo dado un sistema holónomo[6] en mecánica clásica, el conjunto de todas las configuraciones posibles, tiene estructura de variedad diferenciable (es el llamado **espacio de configuraciones** del sistema) siendo sus coordenadas las coordenadas canónicas $q = (q^1, \cdots, q^f)$ donde f el número de grados de libertad del sistema.

1.4. Tensores.

1.4.1. Vectores covariantes.

Sea M una variedad n-dimensional, $p \in M$ un punto de esta y consideremos un sistema de coordenadas x (con coordenadas $x^a = \{x^1, \cdots, x^{n'}\}$) definido en una región abierta alrededor de p.

Consideremos el espacio tangente a M en p, T_pM y la base coordenada asociada al sistema de coordenadas x, esto es:

$$\mathcal{B} = \{\partial_a|_p, a = 1, \cdots, n\}$$

Consideremos también el conjunto

$$\mathcal{B}^* = \{dx^a|_p, a = 1, \cdots, n\}$$

y *definamos* la función (prescindiendo de los subíndices p para mayor claridad)

$$\begin{array}{rccl} dx^a : & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{u} = u^m \partial_m & \mapsto & u^a \end{array}$$

Claramente esta función es lineal: $dx^a(\vec{u} + \vec{v}) = u^a + v^a = dx^a(\vec{u}) + dx^a(\vec{v})$ y $dx^a(k\vec{u}) = k dx^a(\vec{u})$ para vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v} \in T_pM$ y números reales k. Además se tiene

$$dx^a(\partial_b) = \delta^a_b \tag{1.2}$$

Podemos definir la suma y el producto por un escalar en $\mathcal{B}^*$ como sigue:

[6]Sistema compuesto por partículas sometidas a ligaduras geométricas (restringen las configuraciones -posiciones- posibles del sistema) e ideales (las fuerzas que estas ligaduras ejercen, no realizan trabajo en un desplazamiento virtual compatible con las ligaduras del sistema.

$$(kdx^a + k'dx^b)(\vec{u}) \equiv kdx^a(\vec{u}) + k'dx^b(\vec{u})$$

para números reales cualesquiera k, k'.

Definición 7 *El conjunto $T_pM^* \equiv \{\boldsymbol{\theta} = \theta_a dx^a|_p,\ \theta_a \in \mathbb{R}\}$ con la suma y el producto por un escalar definidos anteriormente es un espacio vectorial real llamado **espacio dual de** T_pM o **espacio cotangente**. La base de T_pM^* es $\mathcal{B}^* = \{dx^a|_p, a = 1, \cdots, n\}$ y se denomina **base dual de** $\mathcal{B} = \{\partial_a|_p, a = 1, \cdots, n\}$, y sus elementos son funciones lineales $\boldsymbol{\theta} : T_pM \to \mathbb{R}$ llamadas **1-formas**, o **vectores covariantes**, o **tensores covariantes de orden 1**.*

Es fácil ver que *todas* las funciones lineales de T_pM en $\mathbb{R}$ son elementos de T_pM^*, esto es: se pueden escribir como combinaciones lineales de diferenciales de las coordenadas en el punto p.

Si $\boldsymbol{\theta} = \theta_a dx^a \in T_pM^*$ y $\vec{u} = u^m \partial_m$ entonces

$$\boldsymbol{\theta}(\vec{u}) = \theta_a u^a \tag{1.3}$$

donde hemos prescindido del subíndice p (referencia al punto) para mayor claridad.

Por cuestiones de conveniencia se definen también las funciones

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}: & T_pM^* & \to \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{\theta} & \mapsto \vec{u}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \boldsymbol{\theta}(\vec{u}) \end{array} \tag{1.4}$$

y se dice entonces que un vector $\vec{u} \in T_pM$ es un **Tensor Contravariante de orden 1**.

Cambio de Coordenadas y Vector Covariante en Física.

Consideremos ahora dos sistemas de coordenadas x y x' (con coordenadas $x^a = \{x^1, \cdots, x^{n'}\}$ y $x^{a'} = \{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ respectivamente) y las bases de T_pM y T_pM^* asociadas a dichos sistemas; esto es:

$$\begin{array}{rr} \mathcal{B} = \{\partial_a|_p, a = 1, \cdots, n\}, & \mathcal{B}' = \{\partial_{a'}|_p, a' = 1', \cdots, n'\} \\ \mathcal{B}^* = \{dx^a|_p, a = 1, \cdots, n\}, & \mathcal{B}^{*'} = \{dx^{a'}|_p, a' = 1', \cdots, n'\} \end{array}$$

Dada $\boldsymbol{\theta} \in T_pM^*$, se tendrá $\boldsymbol{\theta} = \theta_a dx^a = \theta_{a'} dx^{a'}$ (donde de nuevo obviamos la referencia a p), y utilizando la regla de la cadena es inmediato ver

$$\theta_{a'} = \theta_m \left[\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\right]_p \tag{1.5}$$

Lo anterior lleva a la definición de vector covariante tal como se usa habitualmente en Física:

Definición 8 *Un **vector covariante** (1-forma, tensor covariante de orden 1)$\boldsymbol{\theta}$ en una variedad n-dimensional M es un conjunto de n números reales asociados al punto p que notamos θ_a en las coordenadas x^a y $\theta_{a'}$ en las coordenadas $x^{a'}$ de modo que*

$$\theta_{a'} = \theta_m \left[\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\right]_p$$

Como en el caso de los vectores contravariantes, podemos hablar de **campos vectoriales covariantes** como funciones que asignan a cada punto de la variedad un vector covariante, sus componentes son por lo tanto funciones de las coordenadas y se tiene

$$\theta_{a'}(x') = \theta_m(x(x')) \left[\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\right]$$

Producto tensorial de formas y vectores.

Dadas dos formas, $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta} \in V^*$ se define su **Producto Tensorial**, representado por $\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta}$ como la función:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta} : V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}_1, \vec{u}_2) & \mapsto & \boldsymbol{\omega}(\vec{u}_1)\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{u}_2) \end{array}$$

esto es: la primera forma actúa sobre el primer vector del par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ dando como resultado un número real, la segunda forma sobre el segundo vector dando como resultado otro número real y ambos números se multiplican; i.e.:

$$\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \boldsymbol{\omega}(\vec{u}_1)\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{u}_2) \tag{1.6}$$

Dada al propiedad de linealidad de las formas es inmediato comprobar que

- $\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta}\,(a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1, \vec{u}_2) = a\,\boldsymbol{\omega}(\vec{u}_1)\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{u}_2) + b\,\boldsymbol{\omega}(\vec{v}_1)\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{u}_2)$.
- $\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta}\,(\vec{u}_1, a\vec{u}_2 + b\vec{v}_2) = a\,\boldsymbol{\omega}(\vec{u}_1)\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{u}_2) + b\,\boldsymbol{\omega}(\vec{u}_1)\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{v}_2)$.

y se dice entonces que $\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta}$ es una **función bilineal**, o que es una **función lineal en cada argumento**

Ejemplo 1: Sea $V = \mathbb{R}^2$ y consideremos $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2*}$ definidas como $\boldsymbol{\omega}(u^1, u^2) = au^1 + bu^2$ y $\boldsymbol{\theta}(u^1, u^2) = cu^1 + du^2$, para un vector cualquiera $\vec{u} = (u^1, u^2)$, entonces

$$\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\theta}\;(\vec{u}, \vec{v}) = \boldsymbol{\omega}(\vec{u})\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{v}) = \left(au^1 + bu^2\right)\left(cv^1 + dv^2\right).$$

para vectores cualesquiera $\vec{u} = (u^1, u^2)$ y $\vec{v} = (v^1, v^2)$.

Al igual que hemos hecho para las formas, también podemos definir el producto tensorial de dos vectores a partir de (1.4); así pues, dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ definimos $\vec{u}\otimes\vec{v}$ como la función

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}\otimes\vec{v} : V^* \times V^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}) & \mapsto & \vec{u}(\boldsymbol{\omega})\cdot\vec{v}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \boldsymbol{\omega}(\vec{u})\cdot\boldsymbol{\theta}(\vec{v}) \end{array}$$

A partir de las definiciones de espacio tangente y espacio cotangente en un punto, es posible definir tensores covariantes, contravariantes y mixtos de cualquier orden, y si trabajamos en unas coordenadas determinadas y consideramos las bases coordenadas de dichos espacios, resulta inmediato encontrar expresiones dichos tensores. A continuación damos las definiciones pertinentes en las casos de tensores de orden 2 y la definición general de un tensor mixto de orden cualquiera.

1.4.2. Tensores Covariantes de orden superior.

Definición 9 *Un **Tensor Covariante de orden 2** es una función* $T:\ T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ *tal que es lineal en cada argumento, esto es:*

1. $T(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2, \vec{v}) = a\,T(\vec{u}_1, \vec{v}) + b\,T(\vec{u}_2, \vec{v})$ *para vectores cualesquiera* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *y* $\vec{v} \in T_pM$*, y números reales cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $T(\vec{u}, a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = a\,T(\vec{u}, \vec{v}_1) + b\,T(\vec{u}, \vec{v}_2)$ *para vectores cualesquiera* $\vec{u}, \vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2 \in T_pM$*, y números reales cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.

N 1 Notemos que en la definición de tensor (covariante de orden 2) está implícito el que el resultado de aplicar T a *cualquier* par de vectores es *siempre* un número real; esto es: siempre está definido, no puede ser infinito, imaginario, etc.

N 2 La definición anterior se extiende trivialmente a la de tensor covariante de orden r del siguiente modo: Un **Tensor Covariante de Orden** r es una función $T : T_pM\times \overset{r}{\cdots} \times T_pM \to \mathbb{R}$ tal que es lineal en cada argumento, esto es: $T(\cdots, a\vec{u} + b\vec{u}', \cdots) = a\,T(\cdots, \vec{u}, \cdots) + b\,T(\cdots, \vec{u}', \cdots)$ para cualquier posición en que se encuentre $a\vec{u} + b\vec{u}'$.

Consideremos ahora un sistema de coordenadas x ($x^a = \{x^1, \cdots, x^n\}$) válido en una región alrededor de $p \in M$ y consideremos los espacios T_pM y T_pM^* con sus bases coordenadas respectivas $\mathcal{B} = \{\partial_a|_p,\ a = 1, \cdots, n\}$ y $\mathcal{B}^* = \{dx^a|_p,\ a = 1, \cdots, n\}$; se tiene entonces:

Definición 10 *Dado un tensor covariante de orden 2, T, se denominan **componentes de** T **en la base*** $\mathcal{B} = \{\partial_a|_p,\ a = 1, \cdots, n\}$ *a los* n^2 *números reales*

$$T_{ab} \equiv T(\partial_a|_p, \partial_b|_p) \tag{1.7}$$

A partir de la definición y proposición anteriores, y recordando lo expuesto en la sección **??** respecto a productos tensoriales de 1-formas, es inmediato demostrar el teorema siguiente:

Teorema 1 *Dado un tensor covariante de orden 2 T, se tiene, en la notación establecida (y prescindiendo del subíndice p):*

$$T = T_{ab} dx^a \otimes dx^a, \quad \text{siendo} \quad T_{ab} \equiv T(\partial_a, \partial_b) \tag{1.8}$$

$$T(\vec{u}, \vec{v}) = T_{ab} u^a v^b, \quad \text{siendo} \quad \vec{u} = u^c \partial_c,\ \vec{v} = v^m \partial_m \tag{1.9}$$

Si se tienen dos sistemas de coordenadas x y x' en una misma región de M, es inmediato comprobar

$$T_{a'b'} = \left[\frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}}\right]_p \left[\frac{\partial x^s}{\partial x^{b'}}\right]_p T_{rs}, \qquad T_{cd} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^c}\right]_p \left[\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^d}\right]_p T_{a'b'} \tag{1.10}$$

Lo cual lleva a la definición de uso habitual en Física, que parafrasea las dadas para los vectores covariantes y contravariantes:

Definición 11 *Un* ***Tensor Covariante de orden 2 sobre*** M*, es un conjunto de* n^2 *números asociados al punto* p*, que escribimos* T_{ab} *en las coordenadas* $\{x^1, \cdots, x^n\}$ *y* $T_{a'b'}$ *en las coordenadas* $\{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ *de modo que*

$$T_{a'b'} = \left[\frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}}\right]_p \left[\frac{\partial x^s}{\partial x^{b'}}\right]_p T_{rs}.$$

De modo semejante a como se hizo en el caso de vectores contravariantes y covariantes, aquí también se puede decir que un **Campo Tensorial Covariante de orden 2** es una función que asigna a cada punto de la variedad un tensor covariante de orden 2 de modo continuo. Las componentes del campo tensorial son funciones de las coordenadas y se tiene

$$T_{a'b'}(x') = \left[\frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}}\right] \left[\frac{\partial x^s}{\partial x^{b'}}\right] T_{rs}(x(x')).$$

1.4.3. Tensores Contravariantes de orden superior.

Definición 12 *Un* ***tensor contravariante de orden 2*** *es una función* $T:\ T_pM^* \times T_pM^* \to \mathbb{R}$ *tal que es lineal en cada argumento, esto es:*

1. $T(a\boldsymbol{\omega}_1 + b\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\theta}) = a\ T(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\theta}) + b\ T(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\theta})$ *para 1-formas cualesquiera* $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ *y* $\boldsymbol{\theta} \in T_pM^*$*, y escalares cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

2. $T(\boldsymbol{\omega}, a\boldsymbol{\theta}_1 + b\boldsymbol{\theta}_2) = a\ T(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}_1) + b\ T(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}_2)$ *para 1-formas cualesquiera* $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}_1$ *y* $\boldsymbol{\theta}_2 \in T_pM^*$*, y escalares cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

Todos los comentarios que hicimos en el caso de tensores covariantes son trasladables directamente al caso de tensores contravariantes, y se puede establecer un teorema análogo al Teorema 1, teniéndose:

Teorema 2 *En la notación establecida previamente, se tiene para todo tensor contravariante de orden 2* T*:*

$$T = T^{ab}\partial_a \otimes \partial_b, \quad \text{siendo} \quad T^{ab} = T\left(dx^a, dx^b\right) \tag{1.11}$$

$$T(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) = T^{ab}\theta_a\omega_b, \quad \text{siendo} \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_c dx^c, \boldsymbol{\omega} = \omega_m dx^m \tag{1.12}$$

□

En lo que respecta al cambio de base, siguiendo un procedimiento análogo en todo al visto anteriormente para el caso de tensores covariantes, se tiene

$$T^{a'b'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r}\right]_p \left[\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^s}\right]_p T^{rs} \tag{1.13}$$

donde, siguiendo la notación establecida $T^{a'b'} = T(dx^{a'}, dx^{b'})$, etc.

También en este caso podemos dar la definición de uso habitual en Física y la de campo tensorial contravariante de orden 2:

Definición 13 *Un* ***Tensor Contravariante de orden 2 sobre*** *M, es un conjunto de n^2 números asociados al punto p, que escribimos T^{ab} en las coordenadas $\{x^1, \cdots, x^n\}$ y $T^{a'b'}$ en las coordenadas $\{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ de modo que*

$$T^{a'b'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r}\right]_p \left[\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^s}\right]_p T^{rs}.$$

Un ***Campo Tensorial Contravariante de orden 2*** *es una función que asigna a cada punto de la variedad un tensor contravariante de orden 2 de manera continua y se tiene entonces*

$$T^{a'b'}(x') = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r}\right] \left[\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^s}\right] T^{rs}(x(x')).$$

1.4.4. Tensores Mixtos.

Definición 14 *Un* ***Tensor Mixto (1,1)*** *(o* ***una vez covariante, una vez contravariante****) es una función $T: T_pM \times T_pM^* \to \mathbb{R}$ tal que es lineal en cada argumento, esto es:*

1. *$T(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2, \boldsymbol{\theta}) = a\, T(\vec{u}_1, \boldsymbol{\theta}) + b\, T(\vec{u}_2, \boldsymbol{\theta})$ para vectores y 1-formas cualesquiera $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in T_pM$ y $\boldsymbol{\theta} \in T_pM^*$, y escalares cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.*
2. *$T(\vec{u}, a\boldsymbol{\theta}_1 + b\boldsymbol{\theta}_2) = a\, T(\vec{u}, \boldsymbol{\theta}_1) + b\, T(\vec{u}, \boldsymbol{\theta}_2)$ para un vector cualquiera $\vec{u} \in T_pM$ y 1-formas cualesquiera $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in T_pM^*$, y escalares cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.*

De nuevo todos los comentarios hechos en los casos anteriores son trasladables a éste: estructura de espacio vectorial, generalización a tensores mixtos (p, q) (o p-veces covariantes y q-veces contravariantes; i.e.: funciones $T : T_pM \times \overset{p}{\cdots} \times T_pM \times T_pM^* \times \overset{q}{\cdots} \times T_pM^* \to \mathbb{R}$ lineales en cada argumento, etc. El equivalente a los Teoremas 1 y 2 es en este caso:

Teorema 3 *En la notación establecida, y para todo tensor mixto (1,1) T se tiene*

$$T = T^a_b dx^b \otimes \vec{\partial}_a, \quad \text{siendo} \quad T^a_b = T\left(\partial_b, dx^a\right) \tag{1.14}$$

$$T(\vec{u}, \boldsymbol{\theta}) = T^a_b u^b \theta_a, \quad \text{siendo} \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_c dx^c, \vec{u} = u^m \partial_m. \tag{1.15}$$

□

Atendiendo al modo en que cambian las componentes de un tensor mixto al cambiar de coordenadas, se tiene la definición habitual en Física:

Definición 15 *Un* ***Tensor Mixto de tipo (1,1) sobre*** *M, T, es un conjunto de n^2 números asociados al punto p, que escribimos T^a_b en las coordenadas $\{x^1, \cdots, x^n\}$ y $T^{a'}_{b'}$ en las coordenadas $\{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ de modo que*

$$T^{a'}_{b'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r}\right]_p \left[\frac{\partial x^s}{\partial x^{b'}}\right]_p T^r_s.$$

*Un **Campo Tensorial Mixto de tipo (1,1) sobre** M, T, es una función que asigna a cada punto de la variedad un tensor mixto de tipo (1,1) de manera continua y se tiene entonces*

$$T^{a'}_{b'}(x') = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{r}}\right]\left[\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{b'}}\right] T^{r}_{s}(x(x')).$$

1.4.5. Tensores de orden cero o escalares.

Dentro del formalismo tensorial, resulta conveniente para determinados propósitos referirse a los escalares (i.e.: números reales) como **tensores de orden cero**, y así lo haremos a veces. Así pues, podemos dar también la definición de uso habitual en Física como sigue:

Definición 16 *Un **Tensor de orden 0 sobre** M (o **escalar**) es un número real asociado al punto p, que escribimos Φ_p y cuyo valor no cambia al cambiar de coordenadas. Un **Campo Escalar** (o **Campo tensorial de orden 0**) es una función continua que asigna un número real a cada punto de la variedad, y por consiguiente su valor numérico no cambia al cambiar de coordenadas $\Phi(x') = \Phi(x(x'))$.*

Los ejemplos en el campo de la Física abundan: el valor de la temperatura, el del potencial gravitatorio, el de la presión, etc. Todos ellos son números reales, asociados a un punto del espacio cuyo valor es totalmente independiente de las coordenadas que estemos utilizando para describir ese punto (i.e.: independientes de la base del espacio vectorial $T_p\mathbb{R}^3$).

Aunque sea evidente, no está de más reflexionar, a la luz de estas definiciones, sobre por qué, por ejemplo, dado un fluído que ocupa una región de $\mathbb{R}^3$, la velocidad de una de las partículas que lo componen es un tensor contravariante de orden 1 (i.e.: un vector), que se puede describir totalmente mediante tres números $\vec{u}_p = (u^1, u^2, u^3)$ una vez que hemos fijado una base de $T_p\mathbb{R}^3$; y sin embargo el conjunto de tres números reales compuesto por la presión, la densidad y la temperatura del fluído, todos en ese punto: (P, ρ, T), **no** es un vector (tensor contravariante de orden 1).

1.4.6. Simplificando convenios y notación. Usos y costumbres en Física.

En todo lo que sigue, supondremos que tenemos una variedad M de dimensión n sobre la cual (en regiones abiertas de ella) tenemos definidos diferentes sistemas de coordenadas $\{x^1, \cdots, x^n\} \equiv \{x^a\}$, $\{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\} \equiv \{x^{a'}\}$, etc. Las bases de T_pM y T_pM^* para un punto p dado serán bases coordenadas; esto es: $\mathcal{B} =\equiv \{\vec{e}_{a_p} = \partial_a|_p\}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_{a'_p} = \partial_{a'}|_p\}$; y sus duales $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{\omega}^a_p = dx^a|_p\}$, $\mathcal{B}'^* = \{\boldsymbol{\omega}^{a'}_p = dx^{a'}|_p\}$; donde una vez más, hemos hecho explícita la identificación entre el vector (flecha) tangente a la curva coordenada x^a en p ($\vec{e}_{a_p}$) con la derivada parcial respecto de esa coordenada evaluada en p ($\partial_a|_p$).

Siguiendo el uso habitual en Física, nos referiremos a los tensores a través de sus componentes en una base fijada, y así en lugar de hablar del *tensor covariante de orden 2, T*, nos referiremos a él como *el tensor covariante* T_{ab} (y ya queda implícito el que sea de orden 2). Asimismo, entenderemos directamente que en las coordenadas $\{x^{a'}\}$ el tensor tiene componentes $T_{a'b'}$ tales que

$$T_{a'b'} = \left[\frac{\partial x^{r}}{\partial x^{a'}}\right]_p \left[\frac{\partial x^{s}}{\partial x^{b'}}\right]_p T_{rs}$$

y a menudo prescindiremos también de toda referencia al punto p sobreentendiéndola.

La condición de linealidad en cada argumento; por ejemplo: $T(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2, \vec{v}) = a\ T(\vec{u}_1, \vec{v}) + b\ T(\vec{u}_2, \vec{v})$ (y algo similar para el segundo argumento), se expresa en componentes de una forma 'mecánica', de modo que basta aplicar las reglas y propiedades habituales de la suma y el producto de números reales (en particular, la propiedad distributiva): $T_{ab}(au_1^a + bu_2^a)v^b = a\ T_{ab}u_1^a v^b + b\ T_{ab}u_2^a v^b$.

A menudo nos referiremos a los superíndices como **índices contravariantes**, y a los subíndices como **índices covariantes**. Fijémonos que cada índice contravariante 'cambia de coordenadas' con la matriz jacobiana y que cada índice covariante lo hace con la jacobiana inversa.

Nombre habitual	Rep. en Matemáticas	Rep. en Física	Cambio coordenadas
Vector contravariante	$\vec{u} = u^a \partial_a$	u^a	$u^{a'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r}\right] u^r$
Vector covariante	$\boldsymbol{\theta} = \theta_a dx^a$	θ_a	$\theta_{a'} = \left[\frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}}\right] \theta_r$
Tensor covariante	$T = T_{ab} dx^a \otimes dx^b$	T_{ab}	$T_{a'b'} = \left[\frac{\partial x^r}{\partial x^{a'}}\right] \left[\frac{\partial x^s}{\partial x^{b'}}\right] T_{rs}$
Tensor contravariante	$T = T^{ab}\partial_a \otimes \partial_b$	T^{ab}	$T^{a'b'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^r}\right] \left[\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^s}\right] T^{rs}$
Tensor mixto	$T = T_a^b dx^a \otimes \partial_b$	T_a^b	$T_{a'}^{b'} = \left[\frac{\partial x^s}{\partial x^{a'}}\right] \left[\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^r}\right] T_s^r$

1.4.7. La Métrica.

Definición 17 *Una **Métrica** (o **Tensor Métrico**) en una variedad M es un campo tensorial covariante, de orden 2 y simétrico, que en unas coordenadas cualesquiera $x = \{x^a\}$ se escribe como $g_{ab}(x)$. Una variedad M donde se tiene definida una métrica $g_{ab}(x)$ se llama **Variedad Riemanniana** y se nota como (M, g).*

Así pues, para un punto cualquiera $p \in M$ consideramos T_pM y entonces $g_{ab}(p)$ (tensor métrico en p) se obtiene sin más que substituir las coordenadas del punto p en el campo $g_{ab}(x)$).

N 1 El hecho que $g_{ab}(x)$ sea simétrica significa, recordemos, que $g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$ para cualesquiera índices $a, b = 1, \cdots, n$ y en cualquier sistema de coordenadas. Recordemos además que se verifica la propiedad de linealidad en cada argumento; i.e.: $g_{ab}(x)(f(x)u_1^a(x) + h(x)u_2^a(x))v^b(x) = f(x)\ g_{ab}(x)u_1^a(x)v^b(x) + h(x)\ g_{ab}(x)u_2^a(x)v^b(x)$, para campos vectoriales cualesquiera $u_1^a(x), u_2^a(x)$ y $v^a(x)$, y funciones arbitrarias $f(x)$ y $h(x)$.

N 2 Dado que la métrica es un tensor de orden 2, se puede (y se acostubra a) representar mediante una matriz, como en el ejemplo de $\mathbb{R}^3$. Si el determinante de dicha matriz es cero, entonces la métrica se denomina **singular**; si es distinto de cero entonces la métrica se denomina **no singular**. Nosotros trabajaremos exclusivamente con métricas no singulares, en cuyo caso podremos construir la **métrica inversa** o **métrica contravariante**, $g^{ab}(x)$, que es un campo tensorial contravariante de orden 2 tal que sus componentes dispuestas en forma de matriz, forman la matriz inversa de la que representa $g_{ab}(x)$; esto es:

$$g^{ab}(x)g_{bc}(x) = \delta_c^a, \qquad g_{ab}(x)g^{bc}(x) = \delta_a^c.$$

La métrica contravariante es también simétrica por construcción.

N 3 Una métrica se dice que es **definida positiva** si, para todo punto $p \in M$ y todo vector $u^a \in T_pM$

se tiene $g_{ab}u^a u^b > 0$ y $g_{ab}u^a u^b = 0$ si y solo si $u^a = 0$[7]. Si ello no es así, entonces se dice que la métrica es **indefinida**; en este caso existen vectores k^a tales que $g_{ab}k^a k^b = 0$ y sin embargo $k^a \neq 0$, dichos vectores se llaman **vectores nulos o isótropos**. Este es el caso de la teoría de la Relatividad.

La métrica se utiliza en primer lugar para definir el producto escalar (o producto interno) en el espacio tangente a la variedad en cada punto T_pM, para cada $p \in M$; y también para definir la **norma de un vector**, así se tiene:

Definición 18 *Se llama **Norma** del vector u^a (campo vectorial $u^a(x)$), y se representa $\|\vec{u}\|$ al escalar (la función): $\|\vec{u}\| \equiv \sqrt{g_{ab}u^a u^b}$ ($\|\vec{u}\| \equiv \sqrt{g_{ab}(x)u^a(x)u^b(x)}$).*

Ejemplo 1: Sea $M = S^2_a$ la esfera de radio a, su métrica en coordenadas esféricas $x = \{\theta, \phi\}$ es

$$g_{ab}(x) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

La métrica contravariante o inversa es

$$g^{ab}(x) = \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Sea $M = \mathbb{R}^4$ con coordenadas cartesianas $x = \{ct, x, y, z\}$, consideremos la métrica siguiente:

$$\eta_{ab}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

llamada **Métrica de Minkowski**. El par $(\mathbb{R}^4, \eta)$ se llama espacio-tiempo de Minkowski y es la variedad en la que está formulada la relatividad especial. Los puntos de esta variedad se llaman **sucesos**, c es la velocidad de la luz en el vacío y t es el tiempo medido en un sistema de referencia fijado.

Es fácil ver que, en un punto cualquiera p, el vector $k^a = (1, 1, 0, 0)$ (en las coordenadas cartesianas descritas más arriba) es un vector nulo. Asimismo, para cualquier función de las coordenadas $f(x)$ se tiene que el campo $X^a = (f(x), f(x), 0, 0)$ es también un campo nulo.

En estas coordenadas, la métrica inversa o contravariante coincide con la covariante, esto es:

$$\eta^{ab}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[7]Naturalmente, la primera parte se puede formular también como $g_{ab}(x)u^a(x)u^b(x) > 0$ para todo campo vectorial $u^a(x)$, pero la segunda parte no: puede darse que $u^a(p) = 0$ en un punto $p \in M$ dado, pero $u^a(x) \neq 0$ como campo evctorial.

Pero en coordenadas esféricas: $x' = \{ct, r, \theta, \phi\}$, con r, θ, ϕ definidas como en $\mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\eta_{a'b'}(x') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}, \qquad \eta^{a'b'}(x') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix}$$

Nota importante. A menudo prescindiremos de explicitar la dependencia funcional en la métrica, los campos de vectores, etc., quedando claro por el contexto si se trata de la métrica como campo tensorial o de la métrica en un punto, etc. Asimismo, y como comentamos en la sección anterior, abusaremos del lenguaje y diremos 'tensores', 'vectores', etc. en lugar de 'campos de tensores', 'campos vectoriales', etc. siendo también el contexto el que dicte si se trata de campos o de objetos definidos sólo en un punto.

El elemento de linea.

Para una variedad con métrica (M, g) se utiliza a menudo la expresión **elemento de linea** para designar la norma al cuadrado de un campo vectorial $\vec{ds}(x)$ cuyas componentes son $dx^a = \text{lím}_{\delta x^a}$, donde aquí dx^a significa

$$dx^a = \lim_{\Delta x^a \to 0} \Delta x^a; \qquad \text{i.e.}: \qquad \vec{ds}(x) = \lim_{\Delta x^a \to 0} \Delta x^a \partial_a$$

esto es: las componentes del vector $\vec{ds}(x)$ son incrementos infinitesimales (no hay que confundirlos con los elementos de $\mathcal{B}^*$, la base de T_pM^*). Se tiene entonces:

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b. \tag{1.16}$$

Notemos que la notación ds^2 debería ser, en realidad $(ds)^2$, o aún $\|\vec{ds}\|^2$, ya que $ds^2 = 2sds$, sin embargo se escribe siempre como en la ecuación anterior. Es frecuente abusar del lenguaje y referirnos a la expresión anterior como a *'la métrica de la variedad'*.

Para el caso en que $M = \mathbb{R}^3$ se tiene $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en coordenadas cartesianas, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$, en esféricas, etc., expresiones todas ellas que debieran resultar familiares.

En el caso de una esfera de radio a, cuya métrica viene dada en el **Ejemplo 1**, se tiene:

$$ds^2 = a^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]$$

que no es sino el elemento de longitud sobre la esfera (al cuadrado) o también el diferencial de ángulo sólido al cuadrado $d\Omega^2$.

Para el espacio-tiempo de Minkowski tenemos:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

expresión que aparece a menudo en electromagnetismo.

Ejemplo 3: Otro ejemplo interesante, y que nos ocupará más tarde, es el elemento de linea de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que viene dado por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)}\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{1.17}$$

donde la constante k puede tomar los valores $-1, 0, +1$ y la función $R(t)$ es lo que se llama **Radio del Universo**. Esta métrica describe el Universo actual a gran escala. De aquí se puede deducir el “Big-bang”, la edad actual del universo, etc., etc.

La variedad a la que corresponde depende del valor de k: para $k = 0$ es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, para $k = -1$ es $\mathbb{R} \times H^3$ (siendo H^3 el hiperbolide tridimensional), y para $k = +1$ es $\mathbb{R} \times S^3$ (donde S^3 designa a la esfera tridimensional). La $\mathbb{R}$ del producto cartesiano se refiere al tiempo, mientras que el otro factor ($\mathbb{R}^3$, H^3 o S^3) se refiere a las secciones espaciales; esto es: si fijamos el tiempo (‘congelamos’ la evolución del Universo, como si hiciéramos una foto) la geometría del espacio de tres dimensiones donde viven las galaxias, etc. sería $\mathbb{R}^3$, H^3 o S^3 respectivamente. ¿Cuál es la k del Universo? No lo sabemos con seguridad. En cualquier caso, las consecuencias físicas son muy diferentes depenendiendo de su valor.

Gimnasia de índices.

Dada una métrica no singular g_{ab} vimos que podíamos definir la métrica contravariant o inversa, g^{ab}. Estos dos objetos se utilizan para construir nuevos tensores a partir de otros tensores dados mediante contracciones; el efecto es ‘bajar’ (métrica g_{ab}) índices o ‘subirlos’ (métrica inversa g^{ab}).

Así por ejemplo, dado un vector contravariante X^a, podemos contraerlo con la métrica; i.e.: $g_{ab}X^b$, el resultado es otro tensor (ya que se trata del producto de dos tensores), covariante en este caso y de orden 1 (tiene un solo índice libre), es decir, una 1-forma o vector covariante. Como este nuevo tensor proviene del tensor X^a y la métrica es un tensor ‘distinguido’ (en el sentido de que está fijo), se acostumbra a notar este nuevo tensor con la misma letra X y el índice allí donde corresponda; es decir: se pone

$$X_a \equiv g_{ab}X^b.$$

De modo semejante, dado Y_a (1-forma, vector covariante) se define el vector contravariante Y^a como:

$$Y^a \equiv g^{ab}Y_b$$

En general, tendremos expresiones del tipo:

$$T^a{}_{bcd} = g^{am}T_{mbcd}, \qquad T_a{}^b{}_{cd} = g^{bm}T_{amcd}, \qquad S_{ab} = g_{am}g_{bn}S^{mn}, \qquad \text{etc.}$$

En las definicions anteriores se debe respetar el orden de los índices; es decir $T_a{}^b{}_{cd} = g^{bm}T_{amcd}$ no es igual a $T^b{}_{acd} = g^{bm}T_{macd}$, etc.

Capítulo 2

Transformaciones y Simetrías en general.

En este capítulo pretendemos introducir el concepto de Grupo de Transformaciones en una variedad así como el Grupo de Simetría de un determinado objeto geométrico (tensor), que está íntimamente ligado al anterior. Al hacerlo, revisaremos conceptos tales como *generadores infinitesimales de las transformaciones*, *órbitas del grupo*, *coordenadas adaptadas*, etc. Todo el material se presenta deliberadamnete de forma no rigurosa, aunque se proporcionan referencias adecuadas donde encontrar formulaciones y demostraciones más precisas.

En lo que sigue, M designa una variedad diferenciable de dimensión n, y $\{x^a\}$, $\{x^{a'}\}$, ... $a = 1, \cdots, n$ distintos sistemas de coordenadas definidos sobre alguna región abierta de M. Para aplicaciones al cas de la Relatividad General $n = 4$. Dado $p \in M$, escribiremos sus coordenadas en cada uno de los sistemas anteriores como $x^a(p)$ (esto es: $x^a(p) = \big(x^1(p), \cdots, x^n(p)\big)$); y T_pM, T_pM^* denotarán como es habitual los espacios tangente y cotangente a M en el punto p.

2.1. Grupos de Transformaciones a un parámetro.

Presentamos un ejemplo trivial: consideremos $M = \mathbb{R}^2$ el (plano euclideo) con las coordenadas cartesianas usuales $(x, y) = x^a$. Consideremos ahora el grupo de las rotaciones en el plano, que es un grupo de Lie a un parámetro,

$$G = \{R(t), t \in [0, 2\pi)\}$$

donde el parámetro t se escoge de modo que $R(t)R(t') = R(t+t')$ y se $R(t = 0) = e$, siendo e el elemento neutro (identidad) del grupo. La representación matricial de este grupo, $SO(2)$, es

$$SO(2) = \left\{ R(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},\ t \in [0, 2\pi) \right\}$$

Para cada $t \in [0, 2\pi)$ definimos la función:

$$\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

como $\varphi_t(p) = \bar{p}$ with $\varphi_t(x(p), y(p)) = (x(p)\cos t + y(p)\sin t, -x(p)\sin t + y(p)\cos t) = (x(\bar{p}), y(\bar{p}))$. Así, en general:

$$\varphi_t(x, y) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t) = (\varphi_t^1(x, y), \varphi_t^2(x, y)) \tag{2.2}$$

Es fácil ver que

- φ_t es biyectiva y C^∞, $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ es también C^∞ para cualquier valor de t; esto es: las funciones $\{\varphi_t\}_{t\in[0,2\pi)}$ son difeomorfismos.
- $\varphi_{t'}(\varphi_t(p)) = \varphi_{t'+t}(p)$
- $\varphi_{t=0}(p) = p$ for every $p \in \mathbb{R}^2$

Se dice entonces que $\{\varphi_t\}_{t\in[0,2\pi)}$ es un grupo de difeomorfismos y se dice que G *actúa como un grupo de Lie de transformaciones sobre* $\mathbb{R}^2$.

En el caso general, consideraremos $G = \{g(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$ un grupo de Lie uniparamétrico parametrizado de forma que $g(t)g(t') = g(t + t')$ y $g(0) = e$, donde e es el elemento neutro; dicha parametrización existe siempre.

Sea M una variedad y supongamos que en la región de interés tenemos definidas unas coordenadas $\{x^a\}$, se dice entonces:

Definición 19 *G **actúa como un grupo de Lie de transformaciones sobre** M si para cada $t \in I$ podemos definir una función $\varphi_t : M \to M$ con $\varphi_t(p) = \bar{p}$ de modo que*

1. *$\{\varphi_t\}_{t\in I}$ son difeomorfismos,*
2. *$\varphi_{t'}(\varphi_t(p)) = \varphi_{t+t'}(p)$,*
3. *$\varphi_{t=0}(p)$ para todo $p \in M$*

N 1 Escribiremos las coordenadas del punto imagen $\bar{p}$ como

$$x^a(\bar{p}) = \varphi_t^a(x^c(p)) \tag{2.3}$$

y resulta obvio de lo expresado más arriba que el conjunto de funciones $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ es un grupo de difeomorfismos con la operación composición de funciones.

N 2 Notemos que G y $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ no son el mismo grupo, aunque son en cierto modo 'idénticos' (isomorfos). Cuando no haya riesgo de confusión, nos referiremos a ambos grupos como G, o utilizaremos expresiones tales como *el grupo G de difeomorfismos*, etc.

Definición 20 *Un punto $p \in M$ se dice que es un **Punto Fijo de** $\{\varphi_t\}$ si $\varphi_t(p) = p$ para todo $t \in I$.*

2.1.1. Generador infinitesimal.

Sea t tal que $|t| << 1$; dado que las funciones φ_t son difeomorfismos podemos expandir

$$\begin{aligned} x^a(\bar{p}) = \varphi^a_t(x^c(p)) = \varphi^a(t, x^c(p)) = \\ \varphi^a(0, x^c(p) + \left[\frac{\partial \varphi^a(t, x^c)}{\partial t}\right]_{t=0} t + O(t^2) = \\ x^a(p) + t\left[\frac{\partial \varphi^m(t, x^c)}{\partial t}\right]_{t=0} \delta^a_m + O(t^2) = \\ x^a(p) + t\left[\frac{\partial \varphi^m(t, x^c)}{\partial t}\right]_{t=0} \left[\frac{\partial x^a}{\partial x^m}\right]_p + O(t^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

despreciando los términos $O(t^2)$ podemos escribir

$$x^a(\bar{p}) \simeq \left(1 + t\left[\frac{\partial \varphi^m(t, x^c(p))}{\partial t}\right]_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p x^a \tag{2.5}$$

Definición 21 *Definimos el vector contravariante*

$$\vec{X}_p \equiv \left[\frac{\partial \varphi^m(t, x^c(p))}{\partial t}\right]_{t=0} \partial_m|_p \equiv X^m(x^c(p))\left[\frac{\partial}{\partial x^m}\right]_p \tag{2.6}$$

como el ***generador infinitesimal en*** p ***(del grupo*** G***)****. Escribiremos*

$$\vec{X} \equiv \left[\frac{\partial \varphi^m}{\partial t}\right]_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}$$

para simplificar.

En el ejemplo anterior de las rotaciones en el plano euclideo, utilizando coordenadas cartesianas y aplicando la definición anterior se tiene, para el generador infinitesimal de las rotaciones en el plano en un punto arbitrario de coordenadas (x, y):

$$\vec{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Para un punto dado p se tendrá $\vec{X}_p = y(p)\partial_x|_p - x(p)\partial_y|_p$, i.e.: $\left(X^1_p, X^2_p\right) = (y(p), -x(p))$ que se puede dibujar como un vector flecha con origen en p, tangente a la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y que pasa por p.
Si usamos coordenadas polares $y^a = (\rho, \phi)$, se tiene: $y^a(p) = (\rho(p), \phi(p))$. El punto transformado por una rotación de ángulo t, $\bar{p} = \phi_t(p)$ tendrá coordenadas $y^a(\bar{p}) = (\rho(\bar{p}), \phi(\bar{p})) = (\varphi^1_t(\rho, \phi), \varphi^2_t(\rho, \phi)) = (\rho(p), \phi(p) + t)$, y el generador infinitesimal en estas coordenadas resulta ser (véase la ecuación (2.6)): $\vec{X}_p = \partial_\phi|_p$, que coincide con el resultado de cambiar de coordenadas el vector $\vec{X}$ obtenido anteriormente en cartesianas.

2.1.2. Transformaciones Finitas y Órbitas.

Las transformaciones finitas se pueden imaginar como la composición de infinitas transformaciones infinitesimales:

$$x^a(\bar{p}) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{t}{N}\vec{X}_p\right)^N x^a(p) \tag{2.7}$$

La notación exponencial indica que la transformación es la consecuencia de aplicar N veces el operador $\left(1 + \frac{t}{N}\vec{X}_p\right)$ a $x^a(p)$ con N tendiendo a ∞ (notemos que entonces t/N tiende a cero como se requiere en una transformación infinitesimal).

Aplicando esto podemos escribir

$$x^a(\bar{p}) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{t}{N}\vec{X}_p\right)^N x^a(p) \equiv \left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p) \tag{2.8}$$

o simplemente

$$x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}}\right) x^a(t=0) \tag{2.9}$$

donde $e^{t\vec{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t\vec{X})^n$ y es importante notar que $\vec{X}$ está evaluado en el punto p, de coordenadas $x^a(t=0)$, es decir, en la expresión anterior $\vec{X} = \vec{X}(x(t=0))$.

Definición 22 *El conjunto de puntos $x^a(t) = \{e^{t\vec{X}}x^a, \forall t\}$ es una curva parametrizada por t llamada* ***órbita de*** $\{\varphi_t\}$ ***(o de** G**) a través de*** p*, y se nota como O_p; i.e.: $O_p = x^a(t) = \{e^{t\vec{X}}x^a, \forall t\}$*

Notemos que $x^a(t=0) = x^a(p)$, y el vector tangente (velocidad) en p es $\left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=0} = X^a_p$. Asimismo, para cualquier otro punto q sobre la órbita, $x^a(q) = x^a(t=t_1) = \left(e^{t_1\vec{X}_p}\right) x^a(p)$ se tiene que

$$\left[\frac{dx^a(t)}{dt}\right]_{t=t_1} = \frac{dx^a(t)}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p)\right]_{t=t_1} = \left[\frac{\partial\varphi^a_t(x^c(p))}{\partial t}\right]_{t=t_1} = X^a_q$$

donde la última igualdad se sigue de que, de acuerdo con la definición de generador infinitesimal en un punto q,

$$\vec{X}_q = \left[\frac{\partial\varphi^m_t(x^c(q))}{\partial t}\right]_{t=0} \partial_m|_q \text{ esto es } X^m_q = \left[\frac{\partial\varphi^m_t(\varphi^c_{t_1}(x^d(p)))}{\partial t}\right]_{t=0} =$$
$$\left[\frac{\partial\varphi^m_{t+t_1}(x^d(p))}{\partial t}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial\varphi^m_{t'}(x^d(p))}{\partial t'}\right]_{t'=t_1} \quad \text{donde } t' = t + t_1.$$

Es decir: el vector velocidad de la órbita O_p en cada punto (vector tangente a O_p en cada punto) es precismente el generador infinitesimal de G en ese punto, o dicho de otro modo: las órbitas son las curvas integrales del campo de generadores infinitesimales $\vec{X}(x)$.

Alternativamente se puede definir la órbita de $\{\varphi_t\}$ (o de G) a través de p como el conjunto de puntos que puede alcanzarse desde p aplicando una transformación φ_t para algún valor de $t \in \mathbb{R}$; i.e.: $O_p = \{q \in M \;:\; \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ verificando } \varphi_t(p) = q\}$.

Consideremos de nuevo las rotaciones en $\mathbb{R}^2$. Expandiendo

$$\begin{aligned}
x(t) = e^{t\vec{X}}x &= \left\{1 + t(y\partial_x - x\partial_y) + \frac{t^2}{2}(y\partial_x - x\partial_y)^2 + \cdots\right\}x = \\
&= x\left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right] + y\left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\cdots\right] = x\cos t + y\sin t \\
y(t) = e^{t\vec{X}}y &= \left\{1 + t(y\partial_x - x\partial_y) + \frac{t^2}{2}(y\partial_x - x\partial_y)^2 + \cdots\right\}y = \\
&= y\left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right] - x\left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\cdots\right] = -x\sin t + y\cos t.
\end{aligned}$$

Resumen.

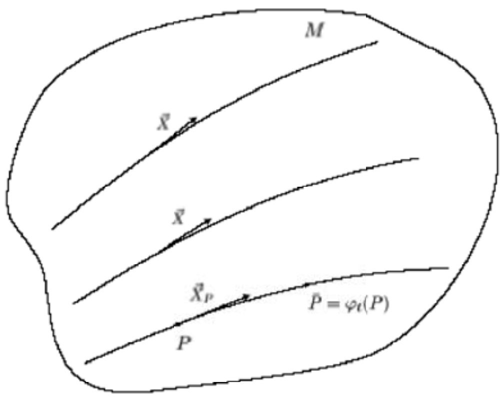

Figura 2.1: Órbitas, generadores infinitesimales y transformaciones.

La situación que se muestra en la figura, junto con los desarrollos precedentes, se puede resumir del modo siguiente:

1. La acción del grupo sobre puntos de la variedad puede definirse como:

$$\varphi_t^a(x^c) = \left(e^{t\vec{X}}\right)x^a$$

allá donde la expresión anterior tenga sentido.

2. La órbita a través de p:

$$x^a(t) = \varphi_t^a(x^c(0)) = \left(e^{t\vec{X}}\right)_p x^a(0)$$

es la curva tal que: $x^a(0) = x^a(p)$ y $\left[\frac{dx^a}{dt}\right] = X^a(x(t))$.

3. La acción $\varphi_t(p) = \bar{p}$ consiste en moverse una distancia paramétrica t a lo largo de la órbita que pasa por p.

4. $\vec{X}$ es el campo de velocidades (campo vectorial tangente) a las órbitas del grupo (las cuales son por lo tanto curvas integrales de $\vec{X}$).

2.1.3. Transformaciones asociadas a un campo de vectores.

Hasta aquí hemos visto que un grupo uniparamétrico G actuando sobre la variedad tiene asociado un grupo de difeomorfismos $\{\varphi_t : M \to M,\ t \in \mathbb{R}\}$ y define un campo vectorial $\vec{X}$ llamado generador infinitesimal. Veremos que el recíproco también es cierto (al menos localmente); esto es: dado un campo vectorial $\vec{X}$ éste actúa como generador infinitesimal de un grupo de difeomorfismos $\{\varphi_t : M \to M,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Consideremos pues un campo de vectores $\vec{X}$ definido sobre la variedad M. En unas coordenadas arbitrarias $\{x^a\}$ tendremos:

$$\vec{X} = X^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

y se define

Definición 23 *Se llama* ***Órbita (o curva integral) del campo $\vec{X}$ a través del punto*** *p, a la curva en M que pasa por p y es tal que su vector tangente en cada punto coincide con $\vec{X}$ evaluado en ese punto; es decir, si se parametriza la curva en cuestión mediante un parámetro t, la órbita de $\vec{X}$ a través de p es la solución $x^a(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*

$$\frac{dx^a(t)}{dt} = X^a(x(t)), \qquad x^a(0) = x^a_p, \qquad a = 1, \cdots, n \tag{2.10}$$

El conjunto de todas las órbitas de $\vec{X}$ a través de todos los puntos de M se llama ***congruencia de órbitas de $\vec{X}$****.*

Es interesante notar que los teoremas de existencia y unicidad de para soluciones de las ecuaciones diferenciales garantizan la existencia de una solución al sistema anterior en un entorno (abierto) de $t = 0$; i.e.: $x^a(t)$ existe para $t \in (-a, a)$, que puede ser en particular toda la recta real, esto es: $x^a(t)$ puede existir para todos los valores de $t \in (-\infty, +\infty)$, en cuyo caso se dice que $\vec{X}$ **es un campo vectorial completo**; véanse los ejemplos siguientes.

Dado un campo $\vec{X}$ y considerada la congruencia de curvas integrales, es posible definir la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \varphi_t : M &\to M \\ p &\mapsto \varphi_t(p) = q \end{aligned}$$

siendo q un punto que se halla sobre la misma curva integral de $\vec{X}$ que p, pero a una distancia paramétrica t de éste, es decir, si $x^a(t)$ es la órbita (curva integral) de $\vec{X}$ que pasa por p de modo que $x_p^a = x^a(t_0)$, entonces $x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = x^a(t_0 + t)$. Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $t = t_0$ se tiene

$$\begin{aligned} x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = x^a(t_0) + \left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2x^a}{dt^2}\right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \cdots = \\ x_p^a + X^a(p)\,(t - t_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^a}{dt}\right)\right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \cdots = \\ x_p^a + X^a(p)\,(t - t_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{dx^m}{dt}\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \cdots = \\ x_p^a + X^a(p)\,(t - t_0) + \frac{1}{2!}X^m(p)\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

que formalmente, y teniendo en cuenta que $\vec{X} = X^m \partial_m$, se puede escribir como

$$x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)\vec{X}_p}\right) x^a \tag{2.11}$$

donde la exponencial en la expresión anterior debe entenderse como la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathrm{e}^{(t-t_0)\vec{X}}\right) x^a\right]_{t=t_0} \equiv \left\{\left[1 + (t - t_0)\vec{X} + \frac{1}{2!}(t - t_0)^2\vec{X}\vec{X} + \cdots\right] x^a\right\}_p = \\ \left\{x^a + (t - t_0)X^m\left(\partial_m x^a\right) + \frac{1}{2!}(t - t_0)^2 X^c\partial_c\left(X^m\left(\partial_m x^a\right)\right) + \cdots\right\}_p = \\ \left\{x^a + (t - t_0)X^a + \frac{1}{2!}(t - t_0)^2 X^c X^a_{,c} + \cdots\right\}_p \end{aligned} \tag{2.12}$$

y sólo tiene sentido para aquellos valores de t para los que la órbita existe (véanse los ejemplos anteriores). En lo que sigue y siempre que ello no induzca a confusión se pondrá $t_0 = 0$, esto es $x_p^a = x^a(0)$.

Es fácil ver que las transformaciones $\{\varphi_t\}$ verifican las siguientes propiedades[1]

1. $\varphi_t \circ \varphi_{t'}(p) = \varphi_t\left(\varphi_{t'}(p)\right) = \varphi_{t+t'}(p)$ para un punto p cualquiera.
2. $\varphi_{t=0}(p) = p$ para todo punto p. La transformación φ_0 se llama **Transformación Identidad**.
3. Dada una transformación φ_t, su inversa φ_t^{-1} existe y es $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, esto es: $\varphi_{-t}\circ\varphi_t(p) = \varphi_{t=0}(p) = p$ para todo punto $p \in M$.
4. Se verifica la propiedad asociativa (puesto que la composición de funciones la verifica), esto es: $(\varphi_t \circ \varphi_{t'}) \circ \varphi_{t''} = \varphi_t \circ (\varphi_{t'} \circ \varphi_{t''})$.

[1] siempre y cuando los dos miembros de las ecuaciones que siguen tengan sentido; véanse los comentarios al respecto del **Ejemplo 2**.

Lo anterior se puede resumir diciendo:

Proposición 1 *El conjunto de todas las transformaciones $\{\varphi_t\}$ inducidas por un campo $\vec{X}$ tiene estructura de grupo con la operación composición y se llama* ***Grupo Uniparamétrico de Transformaciones (inducidas por $\vec{X}$).***

En la definición anterior hemos puesto $x^a(0) = x^a_p$ por conveniencia, pero es obvio que el valor del parámetro t en el que se toma la condición inicial, puede ser cualquiera $t = t_0$, siempre que $x^a(t_0)$ esté definido (i.e.: que sean números reales, no infinito, o números complejos, etc.; véase el **Ejemplo 2**). Los teoremas habituales de existencia y uncidad garantizan entonces la existencia de soulución en un entorno de t_0, es decir, para valores de $t \in (t_0 - a, t_0 + a)$.
Ejemplo 1: Consideremos una variedad M de dimensión 2 (puede ser el plano), y coordenadas $x^a = \{x^1, x^2\}$ (que pueden ser cartesianas). Sea $\vec{X} = \partial_1 + \cos x^1 \partial_2$. La congruencia de órbitas de $\vec{X}$ será el conjunto de soluciones del sistema

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = 1, \qquad \frac{dx^2(t)}{dt} = \cos x^1$$

que se puede integrar trivialmente, resultando:

$$x^1(t) = t + c^1, \qquad x^2(t) = \sin(t + c^1) + c^2$$

Las constantes de integración c^1, c^2 caracterizan las diferentes curvas de la congruencia, así por ejemplo si queremos la órbita particular a través del punto p de coordenadas $x^a_p = (x^1_p, x^2_p)$ se tiene:

$$x^1(0) = c^1 = x^1_p, \qquad x^2(0) = \sin(c^1) + c^2 = x^2_p$$

de donde la curva en cuestión resulta ser

$$x^a(t) = (t + x^1_p, \sin(t + x^1_p) + x^2_p - \sin x^1_p)$$

En este caso, las órbitas del campo $\vec{X}$ están definidas para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$; con lo que $\vec{X}$ es un campo vectorial completo.
Ejemplo 2: Sea como antes una variedad M de dimensión 2 (en particular el plano), con las mismas coordenadas $x^a = \{x^1, x^2\}$ del ejemplo anterior. Consideremos ahora el campo $\vec{Y} = (x^1)^2\partial_1 + \partial_2$. Susu órbitas vendrán dadas por las soluciones del sistema

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = (x^1)^2, \qquad \frac{dx^2(t)}{dt} = 1$$

esto es:

$$x^1(t) = -\frac{1}{t + c^1}, \qquad x^2(t) = t + c^2$$

La órbita a través del punto p de coordenadas $x^a_p = (x^1_p, x^2_p)$ es en este caso

$$x^a(t) = (\frac{x^1_p}{1 - x^1_p t}, t + x^2_p)$$

y resulta inmediato comprobar que, salvo en el caso en que $x^1_p = 0$, **el campo $\vec{Y}$ no es completo** ya que, por ejemplo, si $x^1_p > 0$ entonces $t \in (-\infty, 1/x^1_p)$.
Si el campo $\vec{X}$ es completo, entonces no hay ningún problema con las propiedades anteriores, esto es, las ecuaciones tienen sentido para valores cualesquiera de t, t' y t'' y se habla de Grupo de Transformaciones. Si $\vec{X}$ no es completo, entonces puede que las ecuaciones anteriores no estén definidas para ciertos valores del parámetro t, por ejemplo, puede ser que $\varphi_t(p)$ y $\varphi_{t'}(p)$ existan (i.e.: $\varphi_t(p) = x^a(t)$, $\varphi_{t'}(p) = x^a(t')$ estén definidos, sean números reales), pero que $\varphi_{t+t'}(p)$ no exista (i.e.: $x^a(t + t')$ no esté definido: sea infinito o un número imaginario, véase de nuevo el **Ejemplo 2**). En

este caso siempre está garantizada la existencia para valores de t, t' suficientemente próximos a 0 (los teoremas de existencia y unicidad para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lo garantizan), y en tonces se habla de **Grupo de Transformaciones Locales**. En lo que respecta a la mecánica del cálculo de transformaciones, transformaciones inducidas, etc., todo funciona igual en ambos casos y nosotros no haremos ninguna distinción, tanto más cuanto consideraremos transformaciones infinitesimales la mayor parte de las veces; pero conviene tener claro que son situaciones diferentes.

2.2. Transformaciones inducidas sobre vectores y tensores.

En la sección anterior hemos visto como las funciones $\varphi_t : M \to M$ transforman puntos de la variedad en puntos de la variedad de un modo determinado (esto es: moviendo un punto una distancia t a lo largo de la curva integral del campo $\vec{X}$ que pasa por ese punto). En general, toda función $\phi : M \to M$ (esto es: una función que aplica puntos de la variedad en puntos de la variedad) se llama *transformación* dado que *transforma* unos puntos en otros; las funciones φ_t para todo t son un caso particular de transformaciones (a saber: las que vienen de la acción de un grupo G).

Las transformaciones actúan pues de modo natural sobre los puntos de la variedad. Sin embargo se pueden definir *acciones inducidas* sobre todos los objetos que 'habitan' la variedad M: vectores, funciones reales, tensores arbitrarios, etc. La forma en que se definen estas transformaciones inducidas es, como veremos, la más natural y simple posible.

Asimismo, dada una función real $f : M \to \mathbb{R}$, en algunos textos se utiliza la notación $\varphi^* f$ (y se lee entonces pull-back de la función f por φ) para designar simplemente la composición de funciones, es decir: $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

En lo que sigue definiremos y discutiremos brevemente dichas acciones inducidas para una transformación cualquiera φ (esto es: no necesariamente una de las φ_t definidas en la sección anterior), aunque después lo aplicaremos a los difeomorfismos φ_t. La razón es, eminentemente, de orden práctico: conceptualmente es lo mismo y resulta más simple escribir φ que φ_t.

La transformación definida entre espacios tangentes se llama **diferencial de** φ (o **push-forward**) y se representa por φ_*, mientras que la transformación inducida sobre los espacios cotangentes, se llama **pull-back de** φ y se representa como φ^*.

Ejemplo 1: Sea $M = \mathbb{R}^2$ y supongamos coordenadas cartesianas $\{x, y\}$. Consideremos, por ejemplo, la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) = (3x + 2y, -x^2 + y^2) \end{array}$$

entonces se tiene $\varphi^1(x, y) = 3x + 2y$ y $\varphi^2(x, y) = -x^2 + y^2$.
Si p es tal que $(x_p, y_p) = (1, 1)$ entonces $q = \varphi(p)$ será $(x_q, y_q) = (5, 0)$.

N 1 Puede ocurrir también que los puntos p y q estén en cartas coordenadas diferentes, en cuyo caso las componentes de φ, esto es φ^a darán las coordenadas del punto q en las coordenadas definidas en una región alrededor de dicho punto, pero la mecánica del cálculo es la misma. Esto es, si alrededor del punto p tenemos coordenadas $x = \{x^a\}$, y alrededor del punto q coordenadas $x' = \{x^{a'}\}$, entonces las componentes de φ son $\varphi^{a'}$ y dan las coordenadas del punto imagen: $x_q^{a'} = \varphi^{a'}(x_p)$. Como ejemplo, considérese de nuevo $M = \mathbb{R}^2$ y una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Supongamos coordenadas cartesianas $x^a = \{x, y\}$ en una región del espacio de partida y coordenadas polares $x^{a'} = \{\rho, \phi\}$ en el espacio de llegada, siendo $\varphi(x, y) =$

$(\rho(x,y) = 2x^2 + 3y^2, \phi(x,y) = x + y)$; esto significa que $\varphi^{1'}(x,y) = \rho(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ y $\varphi^{2'}(x,y) = \phi(x,y) = x - y$, así por ejemplo, si p es tal que $(x_p, y_p) = (1, -1)$ entonces $q = \varphi(p)$ será $(\rho_q, \phi_q) = (5, 1)$.

N 2 Salvo que explícitamente se diga lo contrario, supondremos siempre que los puntos p y q relacionados por φ (esto es: $q = \varphi(p)$) están en una misma carta coordenada (esto es: utilizamos las mismas coordenadas para ambos puntos). De todos modos, y si ello no es así, no hay ninguna diferencia conceptual ni ninguna dificultad añadida, sino tan sólo una pequeña complicación en la notación.

2.2.1. Diferencial (push-forward) de φ.

Sea como antes $\varphi : M \to M$ y $p, q \in M$ dos puntos tales que $q = \varphi(p)$. Consideremos ahora la siguiente función definida entre T_pM y $T_qM = T_{\varphi(p)}M$:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_* : & T_pM & \to & T_{\varphi(p)}M \\ & \vec{Y}_p & \mapsto & \left(\varphi_* \vec{Y}_p\right) \equiv \vec{Y}'_{\varphi(p)} \equiv \vec{Y}'_q \end{array}$$

de modo que, para cualquier función real $f : M \to \mathbb{R}$, la derivada direccional de f en $q = \varphi(p)$ en la dirección de $\vec{Y}'$, sea la misma (i.e.: tenga el mismo valor numérico) que la derivada direccional de $f \circ \varphi$ en p en la dirección de $\vec{Y}$, esto es:

$$\begin{array}{rccl} & \left[\vec{Y}'(f)\right]_{\varphi(p)} & \equiv & \left[\vec{Y}(f \circ \varphi)\right]_p, \quad \text{para cualquier } f \\ \text{es decir :} & \text{número} & = & \text{número} \end{array} \tag{2.13}$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$Y'^a \left[\frac{\partial f}{\partial x^a}\right]_{\varphi(p)} = Y^m \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^m}\right]_p \left[\frac{\partial f}{\partial x^a}\right]_{\varphi(p)}$$

y entonces:

$$Y'^a(q) = Y^m(p) \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^m}\right]_p \tag{2.14}$$

que a menudo se escribe también como

$$Y'^a(q) = Y^m(p) \frac{\partial x_q^a}{\partial x_p^m}$$

aunque ello puede inducir a error, ya que no tiene porqué haber ningún cambio de coordenadas (i.e.: puede ser que utilicemos el mismo sistema de coordenadas para los puntos p y q), sinó tan sólo una transformación de puntos.

En el caso de uno de los difeomorfismos φ_t se tiene:

Obviamente, si en la región en que se encuentra q tenemos unas coordenadas $x' = \{x^{a'}\}$ distintas de las de $x = \{x^a\}$ que hay alrededor de p, las expresiones anteriores son simplemente:

$$\vec{Y}'_q = Y'^{a'} \partial_{a'}|_q, \quad \text{siendo} \quad Y'^{a'}(q) = \left[\frac{\partial \varphi^{a'}(x)}{\partial x^m}\right]_p Y^m(p).$$

Fijémonos que φ_* es una función lineal que viene representada, en las bases $\{\partial_a|_p\}$ y $\{\partial_a|_{p'}\}$ por la matriz

$$\varphi_* = [(\varphi_*)^a_b], \quad \text{con} \quad (\varphi_*)^a_b = \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^b}\right]_p, \quad \text{y entonces} \quad Y'^a(q) = (\varphi_*)^a_b Y^b(p).$$

Ejemplo 2: Para la función φ definida en el **Ejemplo 2.1**, esto es $\varphi(x, y) = (3x + 2y, -x^2 + y^2)$ y los puntos $p: (x_p, y_p) = (1, 1)$ y $q = \varphi(p): (x_q, y_q) = (5, 0)$, si $\vec{Y} = (2\partial_x + 3\partial_y)_p$ se tendrá

$$\begin{aligned}
Y'^1(q) &= Y^1(p)\left[\frac{\partial \varphi^1(x,y)}{\partial x}\right]_p + Y^2(p)\left[\frac{\partial \varphi^1(x,y)}{\partial y}\right]_p = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \\
Y'^2(q) &= Y^1(p)\left[\frac{\partial \varphi^2(x,y)}{\partial x}\right]_p + Y^2(p)\left[\frac{\partial \varphi^2(x,y)}{\partial y}\right]_p = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 2 \\
&\text{i.e.} \qquad \vec{Y}'_q = (12\,\partial_x + 2\,\partial_y)_q .
\end{aligned}$$

2.2.2. Pull-back de φ.

Con la misma notación de antes, consideremos ahora T_pM^* y $T_{\varphi(p)}M^* = T_qM^*$ y la función:

$$\begin{array}{rccc}
\varphi^*: & T_{\varphi(p)}M^* & \to & T_pM^* \\
 & \boldsymbol{\theta}_q & \mapsto & (\varphi^*\boldsymbol{\theta}_q) \equiv \boldsymbol{\theta}'_p
\end{array}$$

definida de modo que el valor numérico de $\boldsymbol{\theta}'_p \equiv (\varphi^*\boldsymbol{\theta}_q) \in T_pM^*$ cuando actúa sobre un vector cualquiera $\vec{Y}_p \in T_pM$ sea igual al valor numérico de $\boldsymbol{\theta}_q$ cuando actúa sobre el vector $\vec{Y}'_q \equiv (\varphi_*\vec{Y}_p) \in T_qM$, esto es:

$$\begin{array}{rcll}
\left[\boldsymbol{\theta}'_p\left(\vec{Y}_p\right)\right] & \equiv & \boldsymbol{\theta}_q\left(\vec{Y}'_q\right) = \boldsymbol{\theta}_q\left(\varphi_*\vec{Y}_p\right) \quad \text{para cualquier } \vec{Y}_p & (2.15) \\
\text{es decir:} \quad \text{número} & = & \text{número} & (2.16)
\end{array}$$

Procediendo de manera semejante al caso anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\theta'_a(p)dx^a_p\,(Y^c\partial_c)_p &= \theta_m(q)dx^m_q\left(Y^n(p)\left[\frac{\partial\varphi^b(x)}{\partial x^n}\right]_p \partial_b|_q\right), \\
\theta'_a(p)Y^a(p) &= \theta_m(q)Y^n(p)\left[\frac{\partial\varphi^m(x)}{\partial x^n}\right]_p ; \quad \text{esto es} \\
\theta'_a(p) &= \theta_m(q)\left[\frac{\partial\varphi^m(x)}{\partial x^a}\right]_p . \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Como en el caso anterior, si en la región en que se encuentra q tenemos unas coordenadas $x' = \{x^{a'}\}$ distintas de las de $x = \{x^a\}$ que hay alrededor de p, las expresiones anteriores son:

$$\boldsymbol{\theta}'_p = \theta'_a(p)dx^a_p, \quad \text{siendo} \quad \theta'_a(p) = \theta_{a'}(q)\left[\frac{\partial\varphi^{a'}(x)}{\partial x^m}\right]_p .$$

Como antes, φ^* es una función lineal cuya matriz es, en las bases $\{dx^a|_q\}$ y $\{dx^a|_p\}$:

$$\varphi^* = [(\varphi^*)^a_b], \quad \text{con} \quad (\varphi^*)^a_b = \left[\frac{\partial\varphi^a(x)}{\partial x^b}\right]_p, \quad \text{y entonces} \quad \theta'_b(p) = (\varphi^*)^a_b\theta_a(p)$$

esto es: $\varphi^* = (\varphi_*)^t$ donde la t indica transposición.

2.2.3. Pull-back de un Tensor arbitrario.

Hasta ahora hemos visto que dada una transformación $\varphi : M \to M$, ésta induce una transformación (push-forward, φ_*) entre T_pM y T_qM, y otra transformación (pull-back, φ^*) entre T_qM^* y T_pM^*, siendo en ambos casos $q = \varphi(p)$.

Las definiciones anteriores se pueden generalizar a tensores cualesquiera de modo inmediato; y la aplicación se llama genéricamente **pull-back**. Veamos algunos casos.

1. Supongamos que T_p es un tensor contravariante de orden 2 en el punto p, es decir:

   $$T_p = T^{ab}\partial_a|_p \otimes \partial_b|_p$$

   se define entonces el tensor $T'_q \equiv \varphi^*(T_p)$ como

   $$\varphi^*(T^{ab}\partial_a|_p \otimes \partial_b|_p) \equiv T^{ab}(\varphi_*\partial_a)_q \otimes (\varphi_*\partial_b)_q$$

   Como resulta inmediato comprobar[2] se tiene

   $$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T^{ab}(p)\left[\frac{\partial\varphi^c}{\partial x^a}\right]_p\left[\frac{\partial\varphi^d}{\partial x^b}\right]_p \partial_c|_q \otimes \partial_d|_q$$

[2]Póngase por ejemplo $\partial_a|_p = \vec{Y}_p$, se tendrá $\varphi_*(\vec{Y}_p) = Y'^c\partial_c|_q$, donde $Y'^c = [\partial\varphi^c/\partial x^m]_p Y^m(p)$, pero $Y^m(p) = \delta^m_a$ de donde $\varphi_*(\partial_a) = [\partial\varphi^c/\partial x^a]_p$.

esto es

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T'^{cd}(q)\partial_c|_q \otimes \partial_d|_q, \quad \text{siendo} \quad T'^{cd}(q) = T^{ab}(p)\left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a}\right]_p \left[\frac{\partial \varphi^d}{\partial x^b}\right]_p$$

o equivalentemente

$$T'^{cd}(q) = T^{ab}(p)\,(\varphi_*)^c{}_a\,(\varphi_*)^d{}_b\,, \qquad \text{siendo} \qquad (\varphi_*)^c{}_a = \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a}\right]_p \tag{2.18}$$

2. Procediendo de modo análogo, para un tensor covariante de orden 2, definido en el punto q, T_q, se tiene $T'_p \equiv \varphi^*(T_q)$ tal que

$$T'_p \equiv \varphi^*(T_q) = T'_{cd}(p)dx^c|_p \otimes dx^d|_q, \quad \text{siendo} \quad T'_{cd}(p) = T_{ab}(q)\left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^c}\right]_p \left[\frac{\partial \varphi^b}{\partial x^d}\right]_p$$

es decir

$$T'_{cd}(p) = T_{ab}(q)\,(\varphi^*)_c{}^a\,(\varphi^*)_d{}^b \qquad \text{donde} \qquad (\varphi^*)_c{}^a = \left(\varphi^t_*\right)^a{}_c \tag{2.19}$$

3. Para un tensor mixto de tipo $(1,1)$ definido en p, $T_p = T^a_b(p)\partial_a|_p \otimes dx^b|_p$ resulta

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T'^c_d(q)\partial_c|_q \otimes dx^d|_d, \quad \text{siendo} \quad T'^c_d(q) = T^a_b(p)\left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x^a}\right]_p \left[\frac{\partial (\varphi^{-1})^b}{\partial x^d}\right]_{\varphi(p)}$$

La expresión anterior resulta poco adecuada para el cálculo puesto que contiene la matriz de las derivadas de φ^{-1} en el punto $q = \varphi(p)$, mientras que las otras cantidades están evaluadas en p. Utilizando el teorema de la función inversa se puede reescribir de un modo más conveniente; así, si ponemos

$$\left[\frac{\partial (\varphi^{-1})^b}{\partial x^d}\right]_{\varphi(p)} \equiv \left[\left(\varphi^{-1*}\right)_d{}^b\right]_{\varphi(p)}$$

el teorema de la función inversa implica

$$\left[\left(\varphi^{-1*}\right)_c{}^a\right]_{\varphi(p)} = \left[(\varphi^*)^{-1}_p\right]_c{}^a$$

siendo

$$[(\varphi^*)_c{}^a]_p = \left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^c}\right]_p$$

con lo cual la expresión anterior queda

$$T'^c_d(q) = T^a_b(p)\,(\varphi_*)^c{}_a\left[(\varphi^*)^{-1}\right]_d{}^b \tag{2.20}$$

donde todas cantidades que aparecen en el segundo miembro están calculadas en el punto p.

2.3. La derivada de Lie formal e informalmente.

En lo que sigue, $\vec{X} = X^a(x)\partial_a$ designará un campo vectorial definido en M y que representaremos por $\vec{X}$ o X^a según convenga, es respecto a este campo que definiremos la derivada de Lie de un campo tensorial cualquiera. Asimismo, y siguiendo la notación y definiciones establecidas en la sección anterior, $\{\varphi_t\}$ designarán las transformaciones inducidas por el campo $\vec{X}$. Se tiene entonces

Definición 24 *Sea un campo tensorial de tipo (p,q) cualquiera $T(x) = T^{a\cdots}_{b\cdots}(x)\partial_a \otimes \cdots \otimes dx^b \otimes \cdots$ definido sobre M, su* ***Derivada de Lie respecto a*** $\vec{X}$ *es el campo tensorial*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T(x) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left[T'(x) - T(x)\right] \tag{2.21}$$

donde $T'(x) \equiv \left(\varphi^*_{-\delta t}(T)\right)(x)$ y se ha explicitado la dependencia en las coordenadas x de los campos T' y T para indicar que están evaluados en el mismo punto.

De la definición anterior es claro que el resultado de tomar la derivada de Lie de un tensor es otro tensor del mismo tipo, puesto que se trata de la resta de dos tensores multiplicada por el escalar $(\delta t)^{-1}$. Asimismo y teniendo en cuenta las definiciones de $\varphi^*_{\delta t}(T)$ para los diferentes tipos de tensores (basta con considerar transformaciones infinitesimales), se tiene para un campo tensorial cualquiera $T^{a\cdots}_{b\cdots}$ definido sobre M y en unas coordenadas arbitrarias $x = \{x^a\}$:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T^{a\cdots}_{b\cdots} = T^{a\cdots}_{b\cdots,\,m}X^m - T^{m\cdots}_{b\cdots}X^a_{\;,m} - \cdots + T^{a\cdots}_{m\cdots}X^m_{\;,b} + \cdots \tag{2.22}$$

Fijémonos que aparecen signos $-$ para los índices contravariantes y $+$ para los covariantes.

Veamos como ejemplo el caso de un campo de vectores $\vec{Y}(x) = Y^a(x)\partial_a$. Dado que tendremos que trabajar con transformaciones inversas (i.e.: $\varphi_{-\delta t}$), pondremos $x = \varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x))$. A efectos de simplificar la notación escribiremos $\varphi_{-\delta t *}(\vec{Y}) \equiv \vec{Y}'$.

Paso 1 Dado $\vec{Y}(x)$, calculemos $\vec{Y}'(x) = \vec{Y}'\left(\varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x)\right)$, tendremos:

$$\vec{Y}'(x) = Y'^a\left(\varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x)\right)\partial_a|_x = Y^m(\varphi_{\delta t}(x))\left[\frac{\partial\varphi^a_{-\delta t}}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\partial_a|_x =$$

$$Y^m(x^c + \delta t X^c(x))\left[\frac{\partial(x^a - \delta t X^a)}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\partial_a|_x =$$

$$\left(Y^m(x) + \delta t\left[\frac{\partial Y^m}{\partial x^c}\right]_x X^c(x)\right)\left[\delta^a_m - \delta t\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\right]$$

El término

$$\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)} = X^a_{\;,m}(\varphi_{\delta t}(x)) = X^a_{\;,m}(x^d + \delta t X^d(x))$$

está evaluado en el punto $\varphi_{\delta t}(x))$, para expresarlo en x desarrollamos en serie de Taylor alrededor de x, de modo que se obtiene (despreciando términos $O(\delta t^2)$):

$$X^a_{\;,m}(x^d + \delta t X^d(x)) = X^a_{\;,m}(x) + \delta t X^a_{\;,me}(x)X^e(x)$$

substituyéndolo en las expresiones anteriores y realizando las operaciones indicadas se tiene:

$$\vec{Y}'(x) = \left\{ Y^a(x) + \delta t \left[Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \right]_x + O(\delta t^2) \right\} \partial_a|_x$$

Paso 2 Efectuemos la resta $\vec{Y}'(x) - \vec{Y}(x)$, se tiene:

$$\vec{Y}'(x) - \vec{Y}(x) = \left\{ \delta t \left[Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \right]_x + O(\delta t^2) \right\} \partial_a|_x$$

Paso 3 Dividiendo por δt y tomando el límite cuando tiende a cero se tiene, en un punto cualquiera x:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = \left(Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \right) \partial_a$$

Veamos a continuación las propiedades que posee la derivada de Lie así definida. Todas ellas son fáciles de demostrar por lo que nos limitaremos a enunciarlas. En todo lo que sigue, $a, b, \cdots$ designarán constantes y $T^{a\cdots}_{b\cdots}$, $S^{a\cdots}_{b\cdots}$, etc. designarán tensores arbirarios

1. Linealidad: $\mathcal{L}_{\vec{X}} \left(aT^{a\cdots}_{b\cdots} + bS^{a\cdots}_{b\cdots} \right) = a\, \mathcal{L}_{\vec{X}} T^{a\cdots}_{b\cdots} + b\, \mathcal{L}_{\vec{X}} S^{a\cdots}_{b\cdots}$.
2. Leibnitz: $\mathcal{L}_{\vec{X}} \left(T^{a\cdots}_{b\cdots} \cdot S^{c\cdots}_{d\cdots} \right) = \left(\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{a\cdots}_{b\cdots} \right) S^{c\cdots}_{d\cdots} + T^{a\cdots}_{b\cdots} \left(\mathcal{L}_{\vec{X}} S^{c\cdots}_{d\cdots} \right)$
3. Preserva el tipo de tensor: la derivada de Lie de un tensor de tipo (p, q) es también un tensor de tipo (p, q).
4. Conmuta con la contracción: $\mathcal{L}_{\vec{X}} T^a_{ac} = \delta^a_b \mathcal{L}_{\vec{X}} T^a_{bc}$.
5. Para los campos escalares (i.e.: funciones o campos tensoriales de orden cero) se tiene: $\mathcal{L}_{\vec{X}} f = X^m f_{,m}$.

Veamos a continuación la ecuación (2.22) particularizada a campos de vectores, 1-formas y tensores de orden 2 covariantes y contarvariantes, y tensores mixtos $(1, 1)$.

Campos de vectores.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} Y^a = Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \equiv \left[\vec{X}, \vec{Y} \right]^a \tag{2.23}$$

La última expresión, $[\vec{X}, \vec{Y}]$, se denomina **conmutador o paréntesis de Lie** de los campos $\vec{X}$ y $\vec{Y}$. A menudo resulta útil, para evitar confusiones y errores de manipulación, escribir $\vec{W} \equiv \mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = [\vec{X}, \vec{Y}]$, y entonces las expresiones (2.23) resultan claras: $W^a = Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m = [\vec{X}, \vec{Y}]^a$.

Fijémonos que se verifica $[\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}]$. Asimismo, es fácil comprobar (aunque resulta tedioso), que dados tres campos vectoriales cualesquiera, $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ se tiene:

$$\left[\vec{X}, \left[\vec{Y}, \vec{Z} \right] \right] + \left[\vec{Z}, \left[\vec{X}, \vec{Y} \right] \right] + \left[\vec{Y}, \left[\vec{Z}, \vec{X} \right] \right] = 0 \tag{2.24}$$

La ecuación anterior se denomina **Identidad de Jacobi**.

Campos de 1-formas.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \theta_a = \theta_{a,m} X^m + X^m_{,a} \theta_m \tag{2.25}$$

Tensores covariantes de orden 2.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T_{ab} = T_{ab,m} X^m + T_{mb} X^m_{\ ,a} + T_{am} X^m_{\ ,b} \tag{2.26}$$

Tensores contravariantes de orden 2.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{ab} = T^{ab}_{\ \ ,m} X^m - T^{mb} X^a_{\ ,m} - T^{am} X^b_{\ ,m} \tag{2.27}$$

Tensores mixtos de tipo (1,1).

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T^a_b = T^a_{b\ ,m} X^m - T^m_b X^a_{\ ,m} + T^a_m X^b_{\ ,m} \tag{2.28}$$

2.3.1. La derivada de Lie en coordenadas adaptadas.

Veamos a continuación una introducción informal para la derivada de Lie con respecto a un campo $\vec{X}$. Lo presentaremos para el caso de la derivada de Lie de un campo de vectores $\vec{Y}$, pero el procedimiento es inmediatamente generalizable a un tensor de tipo arbitrario.

Notemos que si $\vec{X} = \partial_c$, esto es: $X^a = \delta^a_c$ (i.e.: $\vec{X}$ es el campo tangente a la curva coordenada x^c que pasa por cada punto), la expresión (2.22) se reduce simplemente a:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{a\cdots}_{b\cdots} = T^{a\cdots}_{b\cdots\, ,\, c} \tag{2.29}$$

esto es: la derivada de Lie coincide con la parcial.

Se puede demostrar el siguiente resultado:

Proposición 2 *Sea $\vec{X}$ un campo vectorial tal que, en un punto $p \in M$ dado, $\vec{X}(p) \neq 0$. Entoces existe un sistema de coordenadas $x' = \{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ en un entorno de p tal que $\vec{X} = \partial_{1'}$. Se dice entonces que **las coordenadas x' están adaptadas al campo $\vec{X}$**.*

Dem.: Lo anterior se verificará si y sólo si $X^a \partial_a = \partial_{1'}$, esto es, si y sólo si el sistema

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^c} X^c = \delta^{a'}_{1'}, \qquad a' = 1', \cdots, n'$$

tiene solución. Pero esto está garantizado en un entorno de cualquier punto p por los teoremas de existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, siempre y cuando $X^c(p) \neq 0$ para alguna $c = 1, \cdots, n$. Notemos que en el sistema anterior $X^c(x)$ son datos y las incógnitas son las funciones $x^{a'} = x^{a'}(x^1, \cdots, x^n)$. $\square$

A partir del resultado anterior se tiene para los campos $\vec{X}$ y $\vec{Y}$:

$$X^{a'} = \delta^{a'}_{1'}, \quad X^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^{1'}}, \qquad Y^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^m} Y^m, \quad Y^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^{b'}} Y^{b'} \tag{2.30}$$

En las coordenadas x' se tendrá, de acuerdo con la ecuación (2.29),

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y} = Y^{a'}_{1'}\partial_{a'}$$

Pongamos $Y^{a'}_{1'} \equiv T^{a'}$ para mayor comodidad y calculemos T^a, esto es, $\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y}$ en las coordenadas x originales:

$$T^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}T^{m'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left(Y^{m'}_{1'}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left(\frac{\partial Y^{m'}}{\partial x^{1'}}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[X^c\partial_c\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^b}Y^b\right)\right] =$$
$$Y^b_{\ ,c}X^c + \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b}X^cY^b\right] \tag{2.31}$$

para calcular el segundo sumando en la expresión anterior, consideremos:

$$\frac{\partial}{\partial x^b}\left[\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c}X^c\right] = X^a_{\ ,b}$$

desarrollando la derivada indicada en el primer miembro e igualando con el segundo se tiene

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b}\right]X^c = -\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\right)\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c}\right)X^c$$

pero de (2.30) se tiene que

$$\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c}\right)X^c = \delta^{m'}_{1'} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial x^a}{\partial x^{1'}} = X^a$$

con lo que se tiene

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b}\right]X^c = -\frac{\partial X^a}{\partial x^b}$$

y substituyendo finalmente en (2.31) se obtiene

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y} = \left(Y^a_{\ ,m}X^m - X^a_{\ ,m}Y^m\right)\partial_a.$$

2.3.2. La derivada de Lie y el pull-back de un tensor cualquiera.

La definición de derivada de Lie dada por la ecuación (2.21), da lugar a una expresión formal para el pull-back de un tensor cualquiera de modo muy simple. De la expresión

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T(x) = \lim_{\delta t \to 0}\frac{1}{\delta t}\left[T'(x) - T(x)\right]$$

se tiene que para $\delta t \to 0$,

$$T'(x) = T(x) + (\delta t)\mathcal{L}_{\vec{X}} T(x) \equiv \left(1 + (\delta t)\mathcal{L}_{\vec{X}}\right) T(x), \qquad T'(x) = \left(\varphi^*_{-\delta t}(T)\right)(x)$$

Dada una transformación finita correspondiente a un parámetro t, φ_t, ésta se puede imaginar como la composición de infinitas transformaciones infinitesimales como la anterior, poniendo $\delta t = t/N$ cuando $N \to \infty$ se tiene entonces

$$T'(x) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{t}{N}\mathcal{L}_{\vec{X}}\right)^N T(x) = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x)$$

esto es

$$\left(\varphi^*_{-t}(T)\right)(x) = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x)$$

o equivalentemente, cambiando t por $-t$:

$$\left(\varphi^*_t(T)\right)(x) = \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x) \tag{2.32}$$

donde $\exp(-t\mathcal{L}_{\vec{X}})$ debe entenderse como la serie de Taylor que define la función exponencial para el argumento indicado (esto es, el operador $-t\mathcal{L}_{\vec{X}}$). La expresión anterior resulta útil para determinadas aplicaciones.

2.4. Simetría de un tensor.

Basándonos en la idea de derivada de Lie como generalización de la idea de derivada direccional, y en particular en la expresión de ésta en términos de coordenadas adaptadas al vector $\vec{X}$, generador infinitesimal de las transformaciones $\{\varphi_t\}$, resulta intuitivo dar la siguiente definición de invariancia o simetría de un tensor T:

Definición 25 *Se dice que el campo tensorial T* ***es invariante bajo el grupo*** *G, o que G* ***es el grupo de simetría o de invariancia de*** *T, si y sólo si*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*_t T = T \ \text{ para todo } t \tag{2.33}$$

donde $\vec{X}$ designa al generador infinitesimal de G.

Fijémonos que la definición anterior, en coordenadas adaptadas a $\vec{X}$, es simplemente

$$\frac{\partial T^{a\cdots}_{b\cdots}}{\partial x^1} = 0, \quad \text{siendo} \quad \vec{X} = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

lo cual se puede interpretar diciendo "$T^{a\cdots}_{b\cdots}$ no depende de la coordenada x^1" o bien "es invariante bajo traslaciones a lo largo de las curvas coordenadas x^1", etc.

2.5. Grupos de Lie r-paramétricos.

Hast ahora hemos estado considerando grupos a un parámetro. Ocurre a menudo que los grupos de transformaciones que interesan son grupos de Lie r-paramétricos. La teoría completa es relativamente compleja, por lo que aquí trataremos de exponer tan sólo las consecuencias que serán de interés para nosotros siguiendo en todo momento una aproximación semejante a la seguida en el caso de los grupos uniparamétricos.

Supondremos en lo que sigue que G es un grupo de Lie parametrizado de forma que sus elementos son funciones C^∞ de r parámetros $t_A,\ A = 1, \cdots, r$ y así escribiremos $g = g(t_A)$ para todo elemento $g \in G$. Supondremos además que $g(t_A = 0) = e$, el elemento neutro del grupo (esto siempre es posible).

Definición 26 *Se dice que G actúa como un grupo de transformaciones de la variedad M si existe una función:*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G \times M & \rightarrow & M \\ & (g,p) & \rightarrow & \Phi(g,p) \equiv \varphi_g(p) \equiv \bar{p} \end{array}$$

tal que $\{\varphi_g,\ g \in G\}$ es un grupo de difeomorfismos bajo la operación composición (esto es: $\varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{g \cdot g'}$).

Como en el caso de los grupos a un parámetro, G y $\{\varphi_g,\ g \in G\}$ son grupos isomorfos y cuando no haya riesgo de confusión nos referiremos a cualquiera de ells como *el grupo G* o bien *el grupo G de difeomorfismos*, etc. Más tarde sin embargo, será conveniente distinguir entre G y $\{\varphi_g,\ g \in G\}$, en cuyo caso nos referiremos a éste último como el grupo S; es decir $S \equiv \{\varphi_g,\ g \in G\}$.

2.5.1. Generadores infinitesimales y Órbitas.

Como en el caso de los grupos 1-paramétricos, consideremos las coordenadas del punto transformado $\bar{p} = \varphi_g(p) = \Phi(g,p)$:

$$\begin{aligned} x^a(\bar{p}) = \Phi^a(g(t_A), x^c(p)) = \Phi^a(0,x) + \left[\frac{\partial \Phi^a(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,t=0} t_B + O(t^2) = \\ x^a(p) + \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0} t_B \frac{\partial x^a}{\partial x^m} + O(t^2) = \\ \left(1 + t_B \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}\right) x^a(p) + O(t^2) \end{aligned}$$

así, para transformaciones correspondientes a valores infinitesimales de t_A tenemos

$$\begin{aligned} x^a(\bar{p}) = \varphi^a_{g(\delta t)}(x(p)) = \left(1 + \delta t_B \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}\right) x^a(p) \\ = \left(1 + \sum_{B=1}^{r} \delta t_B \vec{X}_B\right) x^a(p) \end{aligned} \tag{2.34}$$

y entonces los vectores de T_pM:

$$\vec{X}_B \equiv \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\, t=0} \partial_m|_p \equiv \left[\frac{\partial \varphi^m_{t_C}(x)}{\partial t_B}\right]_{p,\, t=0} \partial_m|_p, \quad B = 1, \cdots, r \tag{2.35}$$

se denominan **generadores infinitesimales de** G **(en** p**)**. Si consideramos el conjunto de estos generadores infinitesimales para todos los puntos de la variedad M, obtenemos r campos vectoriales de generadores infinitesimales en que las componentes de cada uno de ellos son, en general, funciones de las coordenadas. Como es habitual, abusaremos del lenguaje y llamaremos también a estos campos **generadores infinitesimales de** G.

Los campos $\vec{X}_B$ son linealmente independientes; sin embargo, si consideramos $\Delta(p) \subseteq T_pM$, el subespacio vectorial generado por $\vec{X}_1(p), \cdots, \vec{X}_r(p)$, es claro que $\dim \Delta(p) \leq r \leq \dim T_pM (= \dim M) = n$. esto es: cuando particularizamos a un punto p los vectores resultantes en ese punto pueden ser linealmente dependientes. Notemos que $\dim \Delta(p) = \mathrm{rango}(\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r)_p$.

Definición 27 *Se llama* ***Órbita de*** G ***a través de*** $p \in M$*, al conjunto de puntos de la variedad que se pueden alcanzar a partir de p mediante una transformación* φ_g *para algún elemento* $g \in G$*; esto es*

$$O_p = \{q \in M \;:\; \text{existe } g \in G \;\varphi_g(p) = q\} \tag{2.36}$$

Se puede demostrar entonces:

Teorema 4 *Dado un grupo de Lie r-paramétrico de transformaciones actuando sobre la variedad* M*, con (campos de) generadores infinitesimales* $\vec{X}_B,\ B = 1, \cdots, r$ *definidos más arriba:*

1. *Para todo elemento* $g \in G$*, existen valores de los parámetros* $t_1, \cdots, t_r$ *tales que:*

$$x^a(\bar{p}) = \varphi^a_g(x(p)) = \left(\mathrm{e}^{\sum_{A=1}^r t_A \vec{X}_A}\right)_p x^a(p) \tag{2.37}$$

2. *Las órbitas son subvariedades de* M *y dados dos puntos* $p, p' \in M$ *se tiene que, o bien* $O_p \cap O_{p'} = \emptyset$*, o bien* $O_p = O_{p'}$*; esto es: o son iguales o son disjuntas (no tienen puntos en común).*
3. *Los campos* $\vec{X}_B$ *son tangentes a las órbitas en cada punto.*
4. *Si la dimensión de las órbitas es la misma para todos los puntos de la variedad (lo cual es así salvo en puntos/casos especiales) entonces* $\dim O_p = \dim \Delta(p)$*, y se tiene* $T_qO_p = \Delta(q)$ *para todo punto* $q \in O_p$*; y por lo tanto* $\dim O_p = \mathrm{rango}(\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r)_p$.
5. *Los campos* $\vec{X}_B$ *verifican* $[\vec{X}_A, \vec{X}_B] = C^M_{AB}\vec{X}_M$ *donde* $C^M_{AB} \in \mathbb{R}$ *son constantes llamadas* ***constantes de estructura del grupo*** G *y verifican:*
   - a*)* $C^M_{AB} = -C^M_{BA}$
   - b*) Identidad de Jacobi:* $C^A_{BC}C^C_{LM} + C^A_{LC}C^C_{MB} + C^A_{MC}C^C_{BL} = 0$

N 1 El espacio vectorial generado por los campos de generadores infinitesimales, junto con el paréntesis de Lie considerado como una operación interna (i.e.: el resultado de operar dos campos de vectores en ese espacio vectorial es siempre un campo vectorial en ese espacio) es una estructura matemática que se llama *Álgebra de Lie*.

Lo anterior es muy útil cuando se trata de escoger sistemas de coordenadas especiales, adaptados a determinados propósitos; así por ejemplo, del hecho que las órbitas sean subvariedades se sigue que se pueden escoger coordenads adaptadas a ellas; esto es, si $\dim O_p = m \leq \dim M = n$ se pueden tomar coordenadas $x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^{n-m}$ de modo que las órbitas sean precisamente las subvariedades dadas por $y^1, \cdots, y^{n-m} =$ constante. El que los generadores infinitesimales sean tangentes a las órbitas implica que, en esas coordenadas:

$$\vec{X}_A = X_A^k(x^i, y^j)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

y la dependencia de las componentes de los campos vectoriales $X_A^k(x^i, y^j)$ en las coordenadas y^j, $j = 1, \cdots, n-m$ viene restringida por las ecuaciones $[\vec{X}_A, \vec{X}_B] = C_{AB}^M \vec{X}_M$, etc.

La demostración del teorema anterior es larga y, hecha con todo rigor, relativamente complicada; sin embargo resulta relativamente simple justificar los puntos más importantes a partir de los desarrollos llevados a cabo en el caso de los grupos a un parámetro:
De la expresión (2.34)se tiene que $\varphi_{g(\delta t)}$ es un difeomorfismo correspondiente al elemento del grupo cuyos valores de los parámetros son δt_A; i.e.: $g = g(\delta t_1, \cdots, \delta t_r)$. Para valores finitos y fijos de los parámetros t_A se tiene $g = g(t_1, \cdots, t_r)$ y el difeomorfismo correspondiente $\varphi_{g(t)}$ se puede imaginar como como la superposición de infinitos difeomorfismos infinitesimales correspondientes a $g = g(t_1/N, \cdots, t_r/N)$ cuando $N \to \infty$, así tendremos, como en el caso de los grupos a un parámetro:

$$x^a(\bar{p}) = \varphi^a_{g(t)}(x(p)) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B\right)^N x^a(p)$$

y por tanto, y siempre que tenga sentido

$$x^a(\bar{p}) = \left(e^{\vec{X}_p}\right) x^a(p) \tag{2.38}$$

donde

$$\vec{X}_p = \sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B = \sum_{B=1}^{r} t_B\left[\frac{\partial\Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \tag{2.39}$$

Claramente, esto se puede hacer para todo elemento g idel grupo y su correspondiente difeomorfismo φ_g; también vemos que si se considera la cura prametrizada por t,

$$x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p) \tag{2.40}$$

tenemos $x^a(t=0) = x^a(p)$, $x^a(t=1) = x^a(q)$, $x^a(0 < t < 1)$ coordenadas de los puntos entre p y q, y $x^a(t > 1)$ si está definido, describe puntos a lo largo de la curva que pueden ser alcanzados a partir de p aplicando los difeomorfismos $\varphi_{g(tt_1,\cdots,tt_r)}$ siempre y cuando esto tenga sentido, es decir, si $g(tt_1, \cdots, tt_r)$ existe (esto dependerá de cómo estén definidos los elementos del grupo en térmonos de los parámetros $t_1, \cdots, t_r$, o en otras palabras, de cuál sea el rago de estos parámetros). Se tiene además que $\vec{X} = \sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B$ con $\vec{X}(t=0) = \vec{X}_p$ es el campo de velocidades de esta curva. Estamos pues, en una situación análoga a la del caso de los grupos uniparamétricos y de hecho, se puede decir que $\vec{X}$ es el generador infinitesimal de un subgrupo uniparamétrico del grupo G.
Notemos que para un elemento dado del grupo, $g(t_A)$, siempre podemos pensar en el subgrupo uniparamétrico que genera de la manera que hemos descrito:

1. Consideramos $\varphi_g(t_A)$ y el punto transformado $\bar{p}$; i.e.: $x^a(\bar{p}) = \varphi^a_g(t_A)(x(p))$.
2. Escribimos $\varphi^a_g(t_A)$ como $\varphi^a_g(t_A) = e^{\vec{X}_p}$ para $\vec{X}_p = \sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B$ y $\vec{X}_B$ dados por la ecuación (2.35).
3. Consideramos $x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(0)$, o $\varphi_{g(tt_1,\cdots,tt_r)} = \left(e^{t\vec{X}_P}\right)$.
4. El campo vectorial $\vec{X} = \sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B$, para valores fijos de $t_1, \cdots, t_r$ es el campo de velocidades de la curva anterior (i.e.: da el vector tangente a esa curva en uno cualquiera de sus puntos).

De aquí se sigue que las curvas $x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}}\right) x^a(0)$ para todos los posibles $\vec{X}$ están contenidas dentro de la órbita y por tanto $\vec{X}(q) = \vec{X}_q$ es tangente a la órbita para cada punto q de ésta (ya que $\vec{X}_q$ es simplemente el vector velocidad de la curva en q), y en particular esto también se sigue para los generadores infinitesimales $\vec{X}_B,\ B = 1, \cdots, r$. De hecho, uno puede imaginarse (localmente) la órbita O_p del modo siguiente:

- Calculamos $\vec{X}_B$ en p (vectores).
- Consideramos $\Delta(p) = \text{span}\{\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r\}$.
- Consideramos todas las curvas de la forma $x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p)$ para $\vec{X}_p \in \Delta(p)$. Los puntos sobre esas curvas forman la órbita O_p.

Esto implica que los vectores generadores infinitesimales del grupo son tangentes a las órbitas en cada punto de éstas y por tanto, los campos de generadores infinitesimales son campos vectoriales tangentes a estas órbitas.

Si la dimensión de las órbitas no es constante entonces hay que ir con un cierto cuidado: supongamos que existen puntos $p, p' \in M$ (en órbitas diferentes) tales que $\dim O_{p'} < \dim O_p$, esto implica que alguno(s) de los generadores se hace cero en p' (punto fijo) y las afirmaciones sobre sistemas de coordenadas, etc. ya no son necesariamente válidas, aunque dependiendo de la naturaleza de las transformaciones que G implementa existen técnicas especiales que permiten establecer sistemas de coordenadas bien adaptados en entornos de tales puntos.
La aproximación que hemos presentado aquí es la 'standard' en la cual la acción del grupo es *global*; i.e.: the difeomorfismos φ_g son globales: aplican toda M biyectivamente sobre si misma (los dominios y rangos de todos los difeomorfismos son M). Los generadores infinitesimales $\vec{X}_A$ son entonces *globales* (definidos en todos los puntos de M) y *completos* como campos vectoriales (sus curvas integrales, parametrizadas por un parámetro arbitrario s, están definidas para todos los valores de dicho parámetro: $s \in (-\infty, +\infty)$).
Se puede también empezar con un álgebra de Lie de dimensión finita de campos de vectores globales y completos. Cada uno de ellos da lugar entonces a un grupo uniparamétrico de difeomorfismos globales tal y como ocurre en el caso de los grupos uniparamétricos (i.e.: $\varphi_t(p)$ mueve a lo largo de la curva integral de ese campo de vectores una distancia t empezando desde p). En este caso el segundo teorema fundamental de Lie asegura que estos campos vectoriales son los generadores infinitesimales de un grupo de Lie que actúa sobre M globalmente; véase M Crampin, F.A.E. Pirani, *Applicable Differential Geometry", London Mathematical Society Lecture Note Series 59* Cambridge University Press (1986) para una demostración.
Esta aproximación: acción global de un grupo de Lie (difeomorfismos globales que implican a su vez generadores infinitesimales completos y definidos globalmente), o equivalentemente un álgebra de Lie de campos vectoriales globales y completos que da lugar a un grupo de Lie que actúa globalmente sobre M, es muy elegante y clara, pero relativamente restrictiva en lo que respecta a las situaciones de interés en Relatividad General. Habitualmente se trabaja con la versión *local* de esto: el dominio y el rango de los difeomorfismos φ_g no son necesariamente toda la variedad M, sino subconjuntos abiertos de ésta que la recubren totalmente; lo cual concuerda mucho más con el espíritu de la Física en que todas las observaciones, medidas, etc. son necesariamente locales.
Un campo vectorial dado, $\vec{X}$, definido globalmente (aunque no necesariamente completo) define un grupo uniparamétrico local de difeomorfismos de modo natural (véase el final de la sección sobre grupos uniparamétricos en este mismo capítulo).
Un **campo vectorial *local*** es tal que sólo está definido sobre alguna región abierta $U \subset M$, y da lugar a lo que se conoce como **grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos locales** $\{\varphi_t,\ t \in (a,b)\}$ cuyos dominios son U y cuyos rangos para cada t son $\varphi_t(U) \subset M$, también abiertos. Desde el punto de vista de la 'mecánica' de las transformaciones de puntos y transformaciones inducidas, etc. todo funciona igual que en lo expuesto más arriba, pero de be tenerse cuidado puesto que $\varphi_t(p)$ puede no estar definido pra determinados valores de t y/o ciertos puntos $p \in M$, y lo mismo vale para las funciones diferencial y pull-back.

Véase, G. S. Hall, Class. and Quantum Grav. **20**, 4067-4084 (2003) y G. S. Hall, Gen. Rel. and Grav. **30**, 1099-1110 (1998) para discusiones rigurosas de éste y otros tópicos.

En lo sucesivo, y cuando no sea preciso hacer ninguna referencia a la estructura de grupo de de un determinado conjunto de tranformaciones, haremos todas nuestras afirmaciones con respecto a grupos uniparamétricos de transformaciones por motivos de simplicidad.

Capítulo 3

El caso de la Cosmología Relativista.

3.1. Los espaciotiempos como variedades.

Com es bien conocida, la teoría de la Relatividad General describe la interacción gravitatoria de modo geométrico basándose para ello en el Principio de Equivalencia y el de Covariancia General.

Básicamente y a nivel muy rudimentario, la situación puede describirse como sigue: todos los puntos de una determinada región del espacio donde existe un campo gravitatorio, y sus historias a lo largo del tiempo, tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión 4 (3 dimensiones de espacio y 1 de tiempo) sobre la que hay definida una métrica g tal que, en cada punto, la matriz que la representa se puede reducir, mediante un cambio de base, a la forma de Minkowski; esto es: $g(p) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Dicha variedad se llama **espaciotiempo** y sus puntos **sucesos**. Las partículas que se mueven sometidas tan sólo a la influencia del campo gravitatorio se mueven a lo largo de geodésicas causales (i.e.: tipo tiempo si son partículas con masa diferente de cero y tipo nulo o luz si son partículas de masa nula), esto es: en unas coordenadas arbitrarias x^a y siendo s la longitud a lo largo de la curva en el caso de las partículas con masa

$$\frac{d^2x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds} = 0, \qquad u^a = \frac{dx^a}{ds} \ : \ u^a u_a = -1, 0 \tag{3.1}$$

donde $\vec{u} = u^a \partial_a$ es el campo de velocidades a lo largo de la curva. La interpretación clásica es que el campo gravitatorio (consecuencia de la existencia de materia-energía en alguna región del espaciotiempo) *curva* dicho espaciotiempo alejándolo del de Minkowski que se llama *plano*. La medida de dicha curvatura la da el **tensor de Riemann** (o **de curvatura**), $R^a_{\ bcd}$, que se calcula a partir de las primeras y segundas derivadas de la métrica (véase cualquier texto de Relatividad General), si resulta que $R^a_{\ bcd} = 0$ en una región abierta del espaciotiempo, entonces existen coordenadas en las cuales la métrica g se escribe como la métrica de Minkowski (espaciotiempo plano). El tensor de Riemann se puede descomponenr como

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2}\left(g_{ac}R_{bd} - g_{bc}R_{ad} + g_{bd}R_{ac} - g_{ad}R_{bc}\right) - \frac{R}{12}\left(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}\right) \tag{3.2}$$

siendo $C^a_{\ bcd}$ el llamado **tensor de Weyl**, $R_{ab} \equiv g^{mn}R_{manb}$ el **tensor de Ricci** y $R = g^{mn}R_{mn}$ el **escalar de Ricci**. La relación entre el contenido material del espaciotiempo, representado por su **tensor**

impulso-energía T_{ab} y la curvatura viene dada a través del tensor de Ricci mediante las **ecuaciones de Einstein**

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ab} \tag{3.3}$$

donde el primer miembro $R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} \equiv G_{ab}$ constituye el llamado **tensor de Einstein**, y G y c representan respectivamente la constante de la gravitación universal y la velocidad de la luz en el vacío. Nosotros utilizaremos en lo que sigue unidades geometrizadas en las que $8\pi G/c^2 = 1$.

Una **solución de las ecuaciones de Einstein** es cualquier métrica g que verifica dichas ecuaciones para un cierto contenido material (i.e.: un cierto T_{ab}), que en particular puede ser el vacío $T_{ab} = 0$, lo cual a su vez implica $R_{ab} = R = 0$. Obviamente, si $g = \eta$ (métrica de Minkowski) se tiene $R_{ab} = R = 0$, pero como es bien conocido el recíproco no es cierto, i.e.: existen soluciones del vacío que no son planas, como por ejemplo la solución de Schwarzschild.

En general, encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein es difícil, por lo que se hacen determinadas suposiciones simplificadoras. Históricamente, el tipo de hipótesis simplificadoras que más se han empleado han sido sobre la simetría; esto es: se ha supuesto que la métrica (u otros tensores relevantes) tienen determinadas simetrías en el sentido explicado en el capítulo anterior. Así por ejemplo, de suponer que la métrica es esféricamente simétrica, se sigue muy rápidamente que existen coordenadas $\{t, r, \theta, \phi\}$ en las que ésta se puede escribir como

$$ds^2 = -A^2(t,r)dt^2 + B^2(t,r)dr^2 + Y^2(t,r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3.4}$$

y aún más: las coordenadas t, r se pueden definir de modo que $A = B$ o que $Y = rB$, o aún $Y = r$ si $Y^{,a}Y_{,a} > 0$.

En lo que sigue nos interesarán principalmente soluciones tales que la región del espaciotiempo que describen sea el Universo entero y como un todo aunque descrito a gran escala (i.e.: los 'puntos' de la variedad son del tamaño de cúmulos o supercúmulos de galaxias). Ni que decir tiene que obtener una solución tal es imposible a menos que se hagan grandes hipótesis simplificadoras. Cuando estas hipótesis simplificadoras tiene que ver con la simetría, se llaman *Principios Cosmológicos*, y las métricas que de ellos resultan para determinados contenidos materiales (que a veces vienen determinados por las propias restricciones de simetría, tan fuertes pueden éstas llegar a ser) *modelos cosmológicos*. En la sección que sigue veremos estos conceptos con un poco más de detalle.

3.2. Modelos Cosmológicos, Principios Cosmológicos y Prejuícios Geométricos.

Resulta interesante tratar de definir que entendemos por modelo cosmológico. Sorprendentemente, no existen en los textos clásicos de Relatividad, definiciones de este concepto. Aquí utilizaremos la siguiente definición[1]

[1] JMM Senovilla (1996). In *Recent Developments in Gravitation and Mathematical Physics*, Proceedings of the 1st Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, A Macías, T Matos, O Obregón and H Quevedo eds. (World Scientific, Singapore).

Definición 28 *Un modelo cosmológico es cualquier espaciotiempo que contiene materia adecuada en todos sus puntos, que se está expandiendo en alguna región durante algún periodo de tiempo y que explica la mayor cantidad posible de evidencias experimentales.*

Como ya hemos indicado en la sección anterior, la mayor parte de estos modelos cosmológicos provienen de asumir determinadas restricciones geométricas, en gran parte en forma de hipótesis sobre las simetrías que tiene la métrica, junto con otras hipótesis relativas al tipo de materia que contiene el Universo.

La primera parte, esto es: las restricciones geométricas es lo que en general llamamos **Principios Cosmológicos**, aunque bien podríamos llamarlos también *prejuícios geométricos.*

En la sección describimos y analizamos con un cierto detalle las hipótesis geométricas que subyacen en el denominado *Principio Cosmológico estándar* que conduce directamente al llamado *modelo cosmológico estándar* cuya métrica se llama de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

3.3. Isometrías en primera aproximación.

Recordemos que dado un grupo G que actúa sobre una variedad M como grupo de Lie de transformaciones, se dice que G es el grupo de simetría de un determinado campo tensorial T si $\mathcal{L}_{\vec{X}_A}T = 0$ siendo $\vec{X}_A,\ A = 1, \cdots, r$ los generadores infinitesimales del grupo. Alternativamente, si $\varphi_g^* T = T$ para todos los difeomorfismos $\varphi_g : M \to M$ asociados a todos los elementos $g \in G$. Recordemos que el conjunto de todos estos difeomorfismos formaban un grupo con la operación composición de funciones, que era idéntico (isomorfo) a G y normalmente llamábamos también G.

A partir de ahora llamaremos S a dicho grupo; es decir:

$$S = \{\varphi_{t_A} : M \to M, \text{ tales que } g(t_A) \in G\}$$

y llamaremos igualmente a los campos $\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r$ generadores infinitesimales de S y las referencias al grupo original G serán prácticamente inexistentes. Fijémonos que hemos puesto φ_{t_A} en lugar de φ_g puesto que nos interesará esencialmente la dependencia en los parámetros t_A del difeomorfismo φ_g, y no el elemento g del cual proviene; es más, en lo sucesivo prescindiremos incluso de la referencia a los parámetros t_A siempre y cuando no sea preciso referirnos a ellos, y así hablaremos en general del **grupo de simetría** S **del tensor** T como el conjunto

$$S = \{\varphi : M \to M \text{ tales que } \varphi^* T = T\}$$

entendiendo que tiene estructura de grupo con la operación composición. Alternativamente:

$$S = \{\varphi : M \to M \text{ tales que } \mathcal{L}_{\vec{X}_A}T = 0\}, \qquad \vec{X}_A, A = 1, \cdots, r \quad \text{generadores infinitesimales de } S.$$

En el caso de la cosmología, las simetrías que nos interesarán son las simetrías de la métrica g o **isometrías**, esto es: el conjunto S de transformaciones (difeomorfismos)

$$S = \{\varphi : M \to M \ \text{ tales que } \ \varphi^* g = g\} \tag{3.5}$$

o bien, si $\vec{X}_A,\ A = 1, \cdots, r$ son los generadores infinitesimales de S

$$\mathcal{L}_{\vec{X}_A} g = 0$$

la cual se escribe, en unas coordenadas cualesquiera x^a y abusando de la notación

$$\mathcal{L}_{\vec{X}_A} g_{ab} = 0 \tag{3.6}$$

Se dice entonces que los campos $\vec{X}_A$ son los **Vectores de Killing (de la métrica** g**)**, que **generan** el **grupo de isometrías** S **de la métrica** g. Utilizaremos la abreviatura KV para referirnos a uno o varios vectores de Killing. Hablaremos también del **álgebra de Lie de KV**, esto es, el espacio vectorial generado por los $\vec{X}_A,\ A = 1, \cdots, r$ junto con el paréntesis de Lie: $[\vec{X}_A, \vec{X}_B] = C^M_{AB}\vec{X}_M$, y C^M_{AB} son las constantes de estructura.

Si $\vec{X}$ es un KV entonces se tiene, en unas coordenadas cualesquiera:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0 \Leftrightarrow X_{a;b} + X_{b;a} = 0 \tag{3.7}$$

donde el punto y coma representa la derivada covariante. La ecuación anterior recibe el nombre **ecuación de Killing**. Recordemos que en coordenadas adaptadas al KV $\vec{X}$, esto es, coordenadas tales que $\vec{X} = \partial_1$ la ecuación anterior es simplemente $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = \partial_1 g_{ab} = 0$, esto es la isometría generada por $\vec{X}$ implica que la métrica no depende de la coordenada x^1.

> **Ejemplo 1:** Sea M el plano euclideo con su métrica habitual en coordenadas cartesianas: $ds^2 = dx^2 + dy^2$; esta métrica admite tres KV: $\vec{X}_1 = \partial_x,\ \vec{X}_2 = \partial_y,\ \vec{X}_3 = x\partial_y - y\partial_x$, invariancia bajo traslaciones en la dirección x, invariancia bajo traslaciones en la dirección y e invariancia bajo rotaciones alrededor de cualquier punto respectivamente. Notemos que en coordenadas polares $\vec{X}_3 = \partial_\phi$; i.e.: son coordenadas adaptadas a $\vec{X}_3$, la métrica es entonces $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$.

Recordando de capítulos anteriores la definición de pull-back, diferencial, etc. se tiene que $\varphi^* g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\varphi_*\vec{u}, \varphi_*\vec{v})$ y entonces, si $\varphi \in S$ es una isometría

$$\varphi^* g = g \Leftrightarrow (\varphi^* g)(\vec{u}, \vec{v}) = g(\varphi_*\vec{u}, \varphi_*\vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v}) \tag{3.8}$$

de donde se tiene inmediatamente que las isometrías conservan módulos y ángulos entre vectores, esto es:

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\varphi_*\vec{u}, \varphi_*\vec{v}) \qquad \text{para cualesquiera } \vec{u}, \vec{v} \tag{3.9}$$

y en particular si un vector es espacial, temporal o nulo, su carácter no cambia bajo φ_*.

Aunque ya se discutió en capítulos anteriores, no está de más recordar que, a pesar de lo compleja que pueda parecer la notación, las funciones φ_* son funciones lineales de un espacio vectorial T_pM en otro $T_{\varphi(p)}M$ y por lo tanto vienen representadas por matrices:

$$(\varphi_*)^a_b = \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^b}\right]_p .$$

Lo mismo se puede decir de $\varphi^* : T_{\varphi(p)}M^* \to T_pM^*$, con $(\varphi^*)_c^{\ a} = (\varphi_*^t)^a_{\ c}$, donde t indica transpuesta. Para el caso $\varphi^* g \equiv g'$, también se tiene, utilizando matrices (véase la ecuación (2.19)):

$$g'_{cd}(p) = g_{ab}(\varphi(p))\,(\varphi^*)_c^{\ a}\,(\varphi^*)_d^{\ b} \qquad \text{siendo} \qquad (\varphi^*)_c^{\ a} = \left(\varphi_*^t\right)^a_{\ c} .$$

3.4. El caso estándar.

La historia del Principio Cosmológico estándar es interesante aunque aquí no podemos entrar en los detalles. Resumiendo muy crudamente los aspectos esenciales, podemos decir que el primer Principio Cosmológico (en el mundo científico-filosófico occidental) se debe a Copérnico, y podría enunciarse más o menos como sigue:

> El Universo, a gran escala, es siempre igual en todos sus puntos y en todas las épocas o instantes de tiempo,

lo cual traducido a lenguaje matemático más actual significa que es **homogéneo** (ausencia de puntos privilegiados) e **isótropo** (ausencia de direcciones privilegiadas) en el espacio y en el tiempo.

Hubble, a principios del siglo XX, muestra mediante observaciones que el Universo se está expandiendo. Lemaitre concluye que si se está expandiendo, entonces no puede ser igual en todas las épocas y debe de haberse originado en un punto, sin embargo, sí es posible decir que

> El Universo, a gran escala, y para cada instante de tiempo fijo, es igual en todos sus puntos espaciales,

que traducido al lenguaje matemático se expresa diciendo que es homogéneo e isótropo espacialmente; esto es: si congelamos el tiempo (como si tomáramos una fotografía), el Universo que observamos (en el sentido más amplio; i.e.: tomando todas las medidas posibles de todas las magnitudes posibles, físicas y geométricas) es igual en todos sus puntos y en todas las direcciones (por ejemplo: la densidad de materia es la misma en cada punto, la intensidad de luz que llega a cada punto es la misma en cualquier dirección, no hay puntos o direcciones con propiedades geométricas especiales, etc.).

Lo anterior viene a ser el Principio Cosmológico estándar en su forma habitual, sólo que la formulación está más afinada, de modo que se evitan problemas como el de definir qué entendemos por instante fijo de tiempo (concepto que, como es bien sabido, resulta ambiguo en relatividad), y se refiere únicamente a homogeneidad e isotropía en las magnitudes geométricas. La homgeneidad e isotropía de las magnitudes físicas (y de hecho el tipo de contenido material mismo) *se deduce* de la geometría. El resto de la historia se debe a Friedmann, que en 1917 se dió cuenta que las ecuaciones de Einstein admitían soluciones con expansión y que tenían una determinada forma; finalmente Robertson y Walker demostraron que la isotropía alrededor de cada punto implicaba necesariamente homogeneidad espacial y llegaron a la forma de la métrica que se conoce hoy en día como la de Friedmann-Robertson-Walker.

Así se tiene:

Pricipio Cosmológico Estándar El Universo, a gran escala, es un espaciotiempo (M, g) tal que es espacialmente homogéneo e isótropo.

Definamos a continuación de forma precisa los conceptos de homogeneidad e isotropía espaciales.

Definición 29 *Un espaciotiempo se dice que es* ***espacialmente homogéneo*** *si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies (3-dimensionales), que notaremos* $\{\Sigma_t\}$*, de tipo espacio*[2] *foliando*[3] *el espaciotiempo, de modo que para dos puntos cualesquiera sobre una misma hipersuperficie (hoja),* $p, q \in \Sigma_t$*, existe una isometría* φ *tal que* $\varphi(p) = q$*. Como hay tres direcciones espaciales independientes, las isometrías que implementan la homogeneidad estarán generadas por tres KV linealmente independientes.*

Se dice que es ***espacialmente isótropo*** *si existe una familia de curvas de tipo tiempo, que no se cortan y que llenan todo* M^4*, cuyo vector velocidad en cada punto designamos* $\vec{u}$ *y tal que, dado un punto cualquiera* $p \in M$ *y dos vectores unitarios cualesquiera de tipo espacio* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_pM$ *y ortogonales a* $\vec{u} \in T_pM$*, existe una isometría* ψ *tal que:* $\psi(p) = p$*,* $\psi_*(\vec{u}) = \vec{u}$ *y* $\psi_*(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$*. Como podemos rotar alrededor de tres direcciones espaciales independientes, se sigue que las isometrías que implementan la isotropía estarán generadas por tres KV linealmente independientes.*

N 1 Notemos que la condición de que para dos vectores cualesquiera de tipo espacio $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_pM$ y ortogonales a $\vec{u} \in T_pM$, exista una isometría ψ tal que: $\psi(p) = p$, $\psi_*(\vec{u}) = \vec{u}$ y $\psi_*(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$ significa exactamente que no haya direcciones espaciales privilegiadas alrededor del punto p; esto es: que la variedad sea esféricamente simétrica alrededor de ese punto. Una hipersuperficie Σ que sea espacialmente isótropa alrededor de todos sus puntos se dice que es **globalmente isótropa**. Se puede demostrar que una hipersuperficie que es globalmente isótropa es necesariamente homogénea.

N 2 Es fácil ver que si un espaciotiempo es isótropo y homogéneo espacialmente, entonces necesariamente los vectores $\vec{u}$ son ortogonales a las hipersuperficies Σ_t en todo punto $p \in M$ (véase más abajo). Además se puede demostrar que entonces las curvas tangentes a $\vec{u}$ en cada punto son geodésicas; i.e.: se pueden parametrizar mediante un parámetro, que llamaremos t, de modo que

$$\frac{d^2x^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{dt}\frac{dx^c}{dt} = 0, \qquad u^a = \frac{dx^a}{dt} \;:\; u^a u_a = -1 \tag{3.10}$$

este parámetro define el **tiempo cósmico** y fijémonos que que las superficies de la foliación corresponden precisamente a t = constante de ahí que podamos identificar el parámetro que parametriza las hojas de la foliación con el tiempo cósmico t sin pérdida de generalidad (ya le dimos el mismo nombre para no introducir notación redundante e innecesaria).

N 3 De las dos notas anteriores se sigue que el grupo S de isometrías viene generado por 6 KV y que las órbitas del grupo son precisamente las hipersuperficies Σ_t (y se sabe que éste es el número máximo de KV que puede existir sobre una órbita 3-dimensional y que entonces ésta es de curvatura constante).

[2]Los vectores tangentes a ellas son todos de tipo espacio; i.e.: para todo $\vec{v}$ tangente a una de esas hipersuperficies, se tiene que $g_{ab}v^a v^b > 0$.

[3]Todo punto del espaciotiempo M está sobre una y sólo una de esas hipersuperficies; esto es: las hipersuperficies llenan todo el espaciotiempo M y no se cotan nunca entre ellas.

[4]Esto se llama una congruencia de curvas temporales y es exactamente la definición de **observador** en relatividad.

A partir de todo lo anterior se puede demostrar que existen coordenadas $x^a = \{t, x^k\} = \{t, x, y, z\},\ a = 0, 1, 2, 3,\ k = 1, 2, 3$ tales que

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[1 + \frac{k}{4}r^2\right]^{-2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{3.11}$$

donde k es una constante que puede tomar los valores $k = 0, -1, +1$ y $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$. La función $R(t)$ es el llamado **Radio del Universo**.

En cuanto a las hojas de la foliación Σ_t y el vector normal a ellas, $\vec{u}$ se tiene:

$$\Sigma_t = \{(t, x, y, z) \in M\ :\ t = \text{constante}\}, \qquad \vec{u} = \partial_t \tag{3.12}$$

Los vectores de Killing se pueden escribir en estas coordenadas como:

$$\vec{X}_1 = \left[\left(1 - \frac{k}{4}r^2\right)\delta_1^a + \frac{k}{2}x^a x^1\right]\partial_a, \quad \vec{X}_2 = \left[\left(1 - \frac{k}{4}r^2\right)\delta_2^a + \frac{k}{2}x^a x^2\right]\partial_a,$$
$$\vec{X}_3 = \left[\left(1 - \frac{k}{4}r^2\right)\delta_3^a + \frac{k}{2}x^a x^3\right]\partial_a \tag{3.13}$$

$$\vec{X}_4 = x^3\partial_2 - x^2\partial_3, \quad \vec{X}_5 = x^1\partial_3 - x^3\partial_1, \quad \vec{X}_6 = x^2\partial_1 - x^1\partial_2 \tag{3.14}$$

donde los tres primeros implementan la homogeneidad y los tres últimos la isotropía.

A menudo en lugar de las coordenadas anteriores se utilizan otras en las que el elemento de linea toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{3.15}$$

siendo θ y ϕ coordenadas esféricas, aunque la coordenada r aquí no es la función definida anteriormente (i.e.: $r^2 \neq x^2 + y^2 + z^2$).

Veamos a continuación los resultados mencionados en la nota **N 2** con detalle:

Proposición 3 *En la notación establecida se tiene*

1. *Si un espaciotiempo es isótropo y homogéneo espacialmente, entonces necesariamente los vectores $\vec{u}$ son ortogonales a las hipersuperficies Σ_t en todo punto $p \in M$.*
2. *Las curvas tangentes a $\vec{u}$ en cada punto son geodésicas.*

Demostración. Sea $p \in M$ y consideremos la hoja Σ_t sobre la cual está p. Consideremos el espacio tangente en p a la variedad, T_pM y el subespacio de éste formado por los vectores tangentes en p a la hoja, i.e.: $T_p\Sigma_t$. Todos los vectores que consideraremos serán vectores de T_pM, pero prescindiremos del índice p que hace referencia al punto para mayor simplicidad.

Sea $\vec{n}$ el vector unitario (necesariamente temporal: $g(\vec{n},\vec{n}) = -1$) ortogonal a Σ_t, y supongamos que $\vec{u} \neq \vec{n}$, entonces se tendrá, para algún vector unitario $\vec{s}$ ortogonal a $\vec{n}$ (por tanto $\vec{s} \in T_p\Sigma_t$):

$$\vec{u} = \cosh\gamma\ \vec{n} + \sinh\gamma\ \vec{s}, \qquad g(\vec{n},\vec{s}) = 0,\ g(\vec{s},\vec{s}) = 1,\ g(\vec{u},\vec{u}) = g(\vec{n},\vec{n}) = -1$$

y sea ψ una de las isometrías que deja invariantes p y $\vec{u}$; i.e.: $\psi(p) = p$ y $\psi_*(\vec{u}) = \vec{u}$; se tiene entonces, aplicando ψ_* a la ecuación anterior:

$$\vec{u} = \cosh\gamma\psi_*(\vec{n}) + \sinh\gamma\psi_*(\vec{s})$$

y puesto que las isometrías mantiene ángulos entre vectores y módulos de vectores, se tendrá que $\psi_*(\vec{n}) = \vec{n}'$, $\psi_*(\vec{s}) = \vec{s}'$, son tales que

$$g(\vec{n}',\vec{s}') = 0,\ g(\vec{s}',\vec{s}') = 1,\ 'g(\vec{n}',\vec{n}') = -1$$

de donde $\vec{n}' = \cosh\alpha\ \vec{n} + \sinh\alpha\ \vec{s}_1$ con $\vec{s}_1 \in T_p\Sigma_t$ (i.e.: $g(\vec{n},\vec{s}_1) = 0$) y sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\cosh\gamma\ \vec{n} + \sinh\gamma\ \vec{s} = \cosh\gamma(\cosh\alpha\ \vec{n} + \sinh\alpha\ \vec{s}_1) + \sinh\gamma\ \vec{s}'$$

contrayendo con $\vec{n}$ se tiene inmediatamente que

$$\vec{n}' = \psi_*(\vec{n}) = \vec{n}, \qquad \vec{s}' = \psi_*(\vec{s}) = \vec{s}$$

esto es: $\vec{n}$ y $\vec{s}$ son invariantes por la isometría ψ que por hipótesis deja invariante $\vec{u}$ y aplica cualquier vector (unitario) tipo espacio ortogonal a $\vec{u}$ en otro vector previamente fijado tambien tipo espacio y ortogonal a $\vec{u}$. Fijémonos que esto de momento no contradice nada porque $\vec{s}$ no es ortogonal a $\vec{u}$, pero si consideramos ahora

$$\vec{t} = \frac{1}{\sinh\gamma}\left(\vec{n} - \cosh\gamma\ \vec{u}\right), \quad g(\vec{t},\vec{t}) = 1, \quad g(\vec{t},\vec{u}) = 0$$

se tiene $\psi_*(\vec{t}) = t$ en contra de la hipótesis de isotropía espacial (dicho de otro modo: el vector $\vec{t}$ es un vector espacial ortogonal a $\vec{u}$ que señalaría una dirección espacial privilegiada); por lo tanto debe tenerse $\vec{u} = \vec{n}$ ortogonal a Σ_t.

Por otro lado, y dado que $\vec{u}$ es ortogonal a Σ_t, se tiene que si $\Sigma_t = \{(x^a)\ :\ f(x^a) = \text{constante}\}$ en unas coordenadas cualesquiera, entonces $u_a = \lambda f_{,a}$ para alguna función λ; esto implica que si descomponemos $u_{a;b}$ del modo habitual;

$$u_{a;b} = -\dot{u}_a u_b + \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{\theta}{3}(g_{ab} + u_a u_b)$$

se tiene inmediatamente

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\left(u_{a;b} - u_{b;a} + \dot{u}_a u_b - \dot{u}_b u_a\right) = 0.$$

Ahora bien: u^a es ortogonal a todos los vectores tangentes Σ_t y por lo tanto, en particular, a los seis KV que generan las isometrías, para uno cualquiera de ellos, $\vec{X}$, tendremos pues $X^a u_a = 0$ y derivando covariantemente:

$$X^a u_{a;b} + u^a X_{a;b} = 0 \Leftrightarrow X^a u_{a;b} - u^a X_{b;a} = 0, \quad \text{ya que} \quad X_{a;b} + X_{b;a} = 0.$$

Por otro lado $\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{u} = [\vec{X}, \vec{u}] = 0$ para cualquiera de los KV (para los que implementan la isotropía: $\psi_*(\vec{u}_p) = \vec{u}_p$ y para los que implementan la homogeneidad $\psi_*(\vec{u}_p) = \vec{u}_{\psi(p)}$), esto es:

$$u^a_{\;;b} X^b - X^a_{\;;b} u^b = 0$$

y combinando ambas expresiones se tiene

$$\left(u_{a;b} - u_{b;a}\right) X^b = 0 \;\Rightarrow\; u_a \dot{u}_b X^b = 0 \qquad \text{para todo KV } \vec{X}$$

donde hemos utilizado la expresión de ω_{ab} y el hecho que $X^a u_a = 0$. Dado que cualquier vector en $T_p\Sigma_t$ se puede poner como combinación lineal de los seis KV y que $\dot{u}_a u^a = 0$ (i.e.: $\dot{u}^a$ es un vector necesariamente tangente a Σ_t), la expresión anterior implica que $\dot{u}^a = 0$; i.e.: $\vec{u}$ es geodésico además de ortogonal a una hipersuperficie; lo cual a su vez implica que se pueden escoger coordenadas $\{t, x^k\}$ de modo que

$$\vec{u} = \partial_t, \;\; \text{i.e.}: \; u^a = (1,0,0,0), \quad u_a = (-1,0,0,0),$$
$$ds^2 = -dt^2 + h_{ij}(t, x^k) dx^i dx^j$$

la forma de $h_{ij}(t, x^k)$ viene de imponer que admita seis KV independientes. □

3.4.1. Lo que se puede deducir de la simetría.

A partir de la expresión de la métrica (3.15), (o equivalentemente (3.11)) se puede calcular muy fácilmente el tensor de Einstein, por ejemplo, utilizando la aplicación grtensor en Maple se obtiene inmediatamente para el tensor de Einstein:

$$G^a_{\;b} = \begin{bmatrix} -3\,\frac{\dot{R}^2+k}{R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R\ddot{R}+\dot{R}^2+k}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2R\ddot{R}+\dot{R}^2+k}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2R\ddot{R}+\dot{R}^2+k}{R^2} \end{bmatrix}$$

y de esta expresión se puede ver directamente que $\vec{u}$ es un vector propio (unitario y de tipo tiempo) de $G^a_{\ b}$ y, a través de las ecuaciones de Einstein, también lo es de $T^a_{\ b}$ y que un observador que se moviera a lo largo de las curvas integrales de dicho campo (y por lo tanto perpendicularmente a las órbitas/hipersuperficies de homogeneidad e isotropía Σ_t), mediría una densidad de energía y una presión isotrópica dadas respectivamente por:

$$\mu = 3\,\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}, \qquad p = -\frac{2\,R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} \tag{3.16}$$

esto es: el contenido material para este observador es el de un fluído perfecto con la presión y densidad anteriores. Además este observador es geodésico y no experimenta rotación ni distorsión, aunque sí experimenta expansión:

$$\omega_{ab} = \sigma_{ab} = \dot{u}^a = 0, \quad \Theta = 3\frac{\dot{R}}{R}. \tag{3.17}$$

A menudo se denomina $H \equiv \dot{R}/R = \Theta/3$ **parámetro de Hubble**.

De las ecuaciones de campo se puede seguir entonces el análisis estándar de estas soluciones y derivarse todos los tópicos habituales: Big-bang, universos abiertos o cerrados según el valor de k, etc. etc.

Como comentario final, queremos enfatizar el que todo lo que aquí se expone se deduce *directamente* de las hipótesis de simetría que hemos llamad Principio Cosmológico Estándar.

3.5. Otros modelos cosmológicos.

El modelo estándar no está exento de dificultades en el sentido de que no explica todas las observaciones actuales, lo cual ha hecho que los cosmólogs busquen otros tipos de modelos, menos simétricos, esto es: modelos anisotrópicos e inhomogéneos. Básicamente, hay tres tipos de razones para ello:

1. Cálculos de fluctuaciones estadísticas en modelos FRW sugieren que dichas fluctuaciones no pueden colapsar lo suficientemente rápido como para formar las galáxias observadas.
2. Aunque hay buenas razones para creer en el Big-Bang, no parece que la singularidad inicial tuviera que ser esféricamente simétrica y con estructura de punto, como lo es la de los modelos FRW.
3. La idea de que el Universo pueda haber sido inhomogéneo y anisótropo en el pasado, pero que estas divergencias se suavizaron durante su evolución.

Relajando las exigencias de simetría (i.e.: adoptando otros principios cosmológicos menos restrictivos) se obtienen otros modelos cosmológicos. Así, si obviamos la isotropía pero mantenemos la homogeneidad espacial, se tienen los modelos de Bianchi: modelos en que existe un grupo de tres parámetros actuando sobre órbitas 3-dimensionales (hipersuperficies) de tipo espacio que son espacialmente homogeneas. Se subdividen en nueve clases numeradas con numerales romanos: I, II, ..., IX.

El siguiente paso es relajar la condición de homogeneidad, y así se tiene.

1. Modelos esféricamente simétricos: son isotrópicos pero inhomogeneos, un G_3 actuando sobre órbitas 2-dimensionales cuya topología es la de una esfera.

2. Modelos con dos coordenadas espaciales ignorables, un grupo G_2 actuando sobre órbitas espaciales de dimensión 2. Entre éstos, los que admiten una homotecia (véase el capítulo siguiente), juegan un papel especial.

3. Modelos aún con menos simetría.

Capítulo 4

Tópicos Avanzados.

En este capítulo veremos algunos desarrollos un tanto más avanzados y definiremos algunos tipos de simetría nuevos, aunque nuestro interés principal seguirá estando centrado en las isometrías.

Todas nuestras consideraciones se referirán a un espaciotiempo, esto es: una variedad 4-dimensional dotada de una métrica de tipo Lorentz, pero la mayor parte de nuestros resultados son directamente generalizables a una variedad n-dimensional cualquiera dotada de una métrica (no singular) arbitraria.

4.1. La aplicación exponencial y las coordenadas normales.

Consideremos un punto $p \in M$ y el espacio tangente en ese punto T_pM.

Se define la **Aplicación Exponencial** como:

$$\begin{array}{rccc} \chi: & T_pM & \rightarrow & M \\ & \vec{v} & \rightarrow & \chi(\vec{v}) \equiv q \end{array}$$

donde q es el punto sobre la geodésica $\gamma_{\vec{v}}(s)$ que pasa por p y tiene velocidad $\vec{v}$ en p, y está situado a distancia paramétrica $s = 1$ de P.

La imagen de un vector $\vec{v} \in T_pM$ por la aplicación exponencial χ se puede calcular siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

1. Sea $\vec{v} \in T_pM$, esto es: $\vec{v} = \left(v^1, ..., v^n\right) \in \mathbb{R}^n$
2. Resolver, en unas coordenadas cualesquiera y^a definidas en un entorno de p, la ecuación de las geodésicas (que es una ecuación de segundo orden) sujeta a las dos condiciones iniciales:

$$\frac{d^2y^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dy^b}{ds}\frac{dy^c}{ds} = 0$$

$$y^a(s=0) = y^a(p) \quad \text{y} \quad \frac{dy^a}{dt}(s=0) = v^a$$

Esta ecuación tiene una solución única que depende de s y de las condiciones iniciales:

$$y^a = y^a(s, y^a(p), v^a) \tag{4.1}$$

3. El punto $q \equiv \chi(\vec{v})$ es, de acuerdo con la definición, tal que $y^a(q) = y^a(s = 1, y^a(p), v^a)$.

A partir de lo anterior se definen las **coordenadas normales** x^a para el punto q como: $x^a(q) = v^a$.

Notemos que $x^a(p) = 0$ y también que χ es un difeomorfismo de un cierto conjunto abierto de vectores alrededor de $\vec{0} \in T_pM$, $W_{\vec{0}}$ en una región abierta (adecuadamente pequeña) de puntos alrededor de $p \in M$, U_p que se llama **entorno normal (de p)**. Las coordenadas normales estén definidas en ese entorno.

Además, se puede demostrar muy fácilmente que si $\vec{v} \in W_{\vec{0}}$, entonces $t\vec{v} \in W_{\vec{0}}$ también para cualquier valor de $t \in [0, 1]$ (se dice entonces que $W_{\vec{0}}$ tiene forma de estrella: *star-shaped*); por lo tanto, todos los puntos a lo largo de la geodésica que une p y q están contenidos en el entorno normal U_p y tienen coordenadas normales $x^a = tv^a$ para algún valor de t entre 0 y 1 ($0 < t < 1$).

Notemos que, en general, no todos los vectores de T_pM estarán en $W_{\vec{0}}$ ya que, por ejemplo, puede ocurrir que para algún vector $\vec{u} \in T_pM$ la geodésica $\gamma_{\vec{u}}(s)$ no exista para $s = 1$ y entonces $\vec{u} \notin W_{\vec{0}}$; sin embargo, y dado que las geodésicas siempre existen para un determinado rango de valores de su parámetro $s \in (-\delta, \delta)$ para algún $\delta > 0$ (teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales), se tiene que siempre existe algún múltiplo de $\vec{u}$, pongamos $\vec{u}' = \alpha\vec{u}$ con $\alpha =$ constant, tal que $\vec{u}' \in W_{\vec{0}}$ (es decir: $W_{\vec{0}}$ *contiene* todas las direcciones posibles en $\mathbb{R}^n$). También puede ocurrir que $q = \gamma_{\vec{v}}(1) = \gamma_{\vec{v}'}(1)$ con $\vec{v} \neq \vec{v}'$, una función así no sería un difeomorfismo (ya que no es inyectiva). Los puntos en que esto ocurre se llaman **puntos focales**, es decir: puntos en los que las geodésicas se cortan; para evitar esto y seguir teniendo un difeomorfismo, basta reducir U_p. Todo esto está relacionado con los tópicos referentes a *completitud geodésica* y a la *teoría de singularidades*, ambos de especial relevancia en Relatividad General. *geodesic completeness* and *singularities* which are specially relevant to the general relativity theory.
Los entornos normales, y por ende las coordenads normales, existen alrededor de todos y cada uno de los puntos de M, además, en las coordenadas normales se tiene $\Gamma^a_{bc}(p) = 0$.
Restringiendo todavía más el entorno normal U_p se obtiene lo que se llama un **entorno normal convexo** $V_p \subseteq U_p$, que también existe en alrdedor de cada punto de la variedad y es tal que dados dos puntos cualesquiera de él, siempre existe una geodésica que los une, y ésta es única y está enteramente contenida en V_p. Para más información, véase M Crampin, F.A.E. Pirani, *Applicable Differential Geometry", London Mathematical Society Lecture Note Series 59* Cambridge University Press (1986).

4.2. Transformaciones Afines.

Sea $S = \{\varphi\}$ un grupo de difeomorfismos (transformaciones) de la variedad M. Se dice que $\{\varphi\}$ son **Transformaciones Afines** si y sólo sí la imágen de una geodésica es otra geodésica y se preserva el parámetro.

Son casos particulares importantes de transformaciones afines las isometrías y las homotecias. Las isometrías fueron consideradas en primera aproximación en el capítulo **??** y se tratarán en detalle en la sección siguiente, veamos pues brevemente la definición y algunas características de las homotecias.

Homotecias son transformaciones tales que $\varphi_t^* g = e^{2kt} g$, o equivalentemente $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 2kg_{ab}$, donde nuevamente, g es la métrica y $\vec{X}$ generador infinitesimal o **Vector Homotético** (HV), y k es una constante (**constante homotética**). Las homotecias son también casos particulares de transformaciones afines y, claramente, los KV son caso especiales de HV (aquéllos para los que $k = 0$). Un HV que no sea KV se llama **HV propio**. Un espaciotiempo que admita un HV propio se dice que es **autosimilar**.

El conjunto de todos los HV que admite M es también un álgebra de Lie (**álgebra homotética**), la demostración es idéntica a la anterior y además se tiene, también trivialmente:

1. El conmutador de un KV $\vec{X}$ y un HV $\vec{Y}$ es un KV necesariamente:

$$\mathcal{L}_{[\vec{X},\vec{Y}]} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}}(\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab}) - \mathcal{L}_{\vec{Y}}(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = \mathcal{L}_{\vec{X}}(2kg_{ab}) = 2k\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0$$

2. Si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son dos HV con constantes k y k' respectivamente, entonces $\vec{Y} = (k'/k)\vec{X} + \vec{Z}$ siendo $\vec{Z}$ un KV, en otras palabras: si M admite un HV, éste es único en el sentido de que cualquier otro HV será una combinación lineal de éste con KV. Para demostrarlo basta considerar el vector $k\vec{Y} - k'\vec{X}$ y tomar la derivada de Lie de g conrespecto a él: se obtiene inmediatamente que es cero.

La ecuación $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 2kg_{ab}$ se puede escribir como

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 2kg_{ab} \Leftrightarrow X_{a;b} = kg_{ab} + F_{ab} \tag{4.2}$$

donde $F_{ab} = -F_{ba}$ es un tensor antisimétrico (o bivector) que se llama **bivector homotético**.

Las homotecias son importantes en cosmología porque parece que algunas familias destacadas de modelos cosmológicos que describen estados asintóticos del Universo (a tiempos muy tempranos o cuando el tiempo tiende a infinito)corresponden a métricas que admiten HV.

Una transformación afín que no sea KV o HV se llama **transformación afín propia**.

4.2.1. Transformaciones afines y puntos ordinarios.

Consideremos un grupo uniparamétrico de transformaciones afines $\{\varphi_t\}$ (que puede ser un subgrupo del grupo total S o coincidir con él). Sea $p \in M$ y $\varphi_t(p) = \bar{p}$, con $\bar{p} \neq p$ para todo $t \neq 0$. Se dice entonces que p es un **punto ordinario** de las transformaciones φ_t; además, dado que $x^a(\bar{p}) = (\exp t\vec{X})_p x^a(p)$ se tiene inmediatamente que $\vec{X}_p \neq 0$.

Se puede ver entonces muy fácilmente que $\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*}$.

Dado que para un punto ordinario p $\vec{X}_p \neq 0$ siempre existe un sistema de coordenadas en el que

$$\vec{X} = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{esto es} \quad X^a = \delta_1^a$$

es decir X^a son funciones lineales de las coordenadas en algún sistema de coordenadas (esto es cierto para un campo vectorial cualquiera, no necesariamente el generador de una transformación afín).

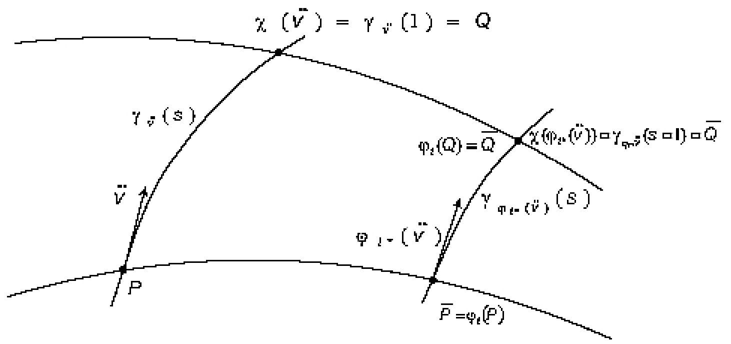

Figura 4.1: Órbitas, generadores infinitesimales y transformaciones.

4.2.2. Transformaciones afines y puntos fijos.

Sea ahora $p \in M$ un punto fijo de un grupo uniparamétrico de transformaciones afines; esto es $\varphi_t(p) = p$ para todo t, o equivalentemente y a partir de $x^a(\bar{p}) = (\exp t\vec{X})_p x^a(p)$ con $\bar{p} = p$ se tiene inmediatamente que $\vec{X}_p = 0$, esto es: los puntos fijos de una transformación son aquéllos en que $\vec{X}$, el generador infinitesimal de dicha transformación, se anula.

Para el caso de transformaciones afines (y en particular para isometrías y homotecias) sigue siendo cierto que:

$$\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*} \tag{4.3}$$

Recordemos que

$$\left(\varphi_{t*}\vec{Y}\right)(x) = \left(e^{-t\mathcal{L}_{\vec{X}}}\right)_x \vec{Y}(x)$$

y calculémoslo en un punto fijo p (i.e.: cuando el argumento x en la fórmula corresponde a p). Expandiendo en serie de potencias y recordando que $X^a(p) = 0$ es fácil ver que

$$\varphi_{t*} = e^{tA}, \qquad A = \left[X^a{}_{,b}(p)\right]$$

donde A es una matriz cuyos elementos son simplemente $A^a_b = X^a{}_{,b}(p) = X^a{}_{;b}(p)$ y la segunda igualdad se sigue de que $X^a{}_{;b}(p) = X^a{}_{,b}(p) + \Gamma^a_{bc}(p)X^c(p)$ y el término que contiene los símbolos de Christoffel es cero porque $X^c(p) = 0$.

Ahora bien, para un punto $p' \neq p$, $p' \in U_p$ entorno normal de p, se tiene que $p' = \chi(\vec{v})$, para algún $\vec{v} \in T_pM$. Usando coordenadas normales x^a ($x^a(p') = v^a$) y aplicando la expresión (4.3) al vector $\vec{v} \in T_PM$ tenemos:

$$x^a(\varphi_t(p')) = \left(e^{tA}\right)^a{}_b v^b = \left(e^{tA}\right)^a{}_b x^b(p') \tag{4.4}$$

para puntos sobre la órbita de la transformación afín, de donde:

$$X^a(p') = \left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\left(e^{tA}\right)^a{}_b x^b(p')\right]_{t=0} = A^a{}_b x^b(p')$$

es decir:

$$X^a = A^a{}_b x^b \tag{4.5}$$

para un punto cualquiera de coordenadas x^a en un entorno normal del punto fijo p, y entonces $\vec{X}$ es una función lineal de las coordenadas normales en todo ese entorno.

Se dice entonces que los generadores infinitesimales de las transformaciones son siempre linealizables.

4.3. Las isometrías en detalle.

Recordemos que las isometrías son transformaciones tales que $\varphi^* g = g$ o equivalentemente: $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0$, donde g es la métrica y $\vec{X}$ el generador infinitesimal de la isometría, que llamábamos Vector de Killing (KV).

Esta ecuación se puede escribir también como la ecuación de Killing, esto es:

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 0$$

una forma particularmente útil de la cual es:

$$X_{a;b} = F_{ab}, \qquad F_{ab} = -F_{ba} \tag{4.6}$$

donde F_{ab} es un tensor antisimétrico (o bivector) llamado **bivector de Killing**, y de la identidad de Ricci se puede ver fácilmente que

$$F_{ab;c} = R_{abcd} X^d.$$

Si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son dos KV, entonces $a\vec{X} + b\vec{Y}$ es un KV para constantes cualesquiera a, b:

$$\mathcal{L}_{a\vec{X}+b\vec{Y}} g_{ab} = a\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} + b\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab} = 0 \tag{4.7}$$

y también lo es $[\vec{X}, \vec{Y}]$ ya que

$$\mathcal{L}_{[\vec{X},\vec{Y}]} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}}(\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab}) - \mathcal{L}_{\vec{Y}}(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = 0 \tag{4.8}$$

por lo tanto, el conjunto de todos los vectores de Killing sobre M tiene estructura de álgebra de Lie y se llama **álgebra de Killing** $\mathcal{K}(M)$.

Veamos a continuación algunos resultados clásicos e importantes:

Teorema 5 *Sea M una variedad n-dimensional y $\mathcal{K}(M)$su álgebra de Killing, se tiene entonces:*

1. *Para un KV $\vec{X} \in \mathcal{K}(M)$, $\vec{X}$ está totalmente determinado sobre M especificando $X^a(p)$ y $F_{ab}(p)$ en un punto cualquiera de M.*
2. $\dim \mathcal{K}(M) \leq n(n+1)/2$, *en el caso de la Relatividad General,* $\dim \mathcal{K}(M) \leq 10$, *y en particular se tiene que dicha álgebra es finita.*
3. *Si* $\dim \mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$, *entonces M es de curvatura constante, es decir: $R_{abcd} = k\,(g_{ac}g_{cd} - g_{ad}g_{bc})$, siendo k constante.*
4. *Si M tiene curvatura constante entonces* localmente dim $\mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$.
5. *Si $\vec{X}$ es un KV entonces*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} R_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} R = \mathcal{L}_{\vec{X}} G_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} T_{ab} = 0,$$
$$\mathcal{L}_{\vec{X}} R^a{}_{bcd} = \mathcal{L}_{\vec{X}} C^a{}_{bcd} = 0, \quad \mathcal{L}_{\vec{X}}\left(\nabla_{a_1}...\nabla_{a_n} R^a_{bcd}\right) = 0, \;\; n = 1, 2, ...$$

Demostración. No daremos la demostración en detalle sino que sólo la indicaremos a grandes rasgos. El primer resultado que se enuncia, viene de expandir en serie de potencias las componentes X_a alrededor de p, así en unas coordenadas cualesquiera x^a y poniendo $x^a(p) = x^a_p$ se tendrá para un punto cualquiera

$$X_a(x) = X_a(p) + X_{a,b}(p)(x^b - x^b_p) + \frac{1}{2!} X_{a,bc}(p)(x^b - x^b_p)(x^c - x^c_p) + \cdots$$

pero $X_{a,b} = X_{a;b} + \Gamma^c_{ab} X_c$; i.e.: $X_{a,b} = F_{ab} + \Gamma^c_{ab} X_c$; es decir: $X_{a,b}(p)$ se puede expresar en términos de $X_a(p)$ y de $F_{ab}(p)$, y lo mismo se tiene para las derivadas de orden superior que involucran $F_{ab;c} = R_{abcd} X^d$, $F_{ab;cd}(p) = R_{abcd;e} X^d + R_{abcd} F^d_{\ e}$, etc. Fijémonos que $R_{abcd}(p)$, $R_{abcd;e}(p)$, etc. son *datos*, es decir: son conocidos. Asimismo, notemos también $X^a(x)$ depende linealmente de $X_a(p)$ y $F_{ab}(p)$.

En cuanto al segundo resultado, deriva directamente del primero, puesto que equivale a decir, en un punto p fijado y conocidos por tanto $R_{abcd}(p)$, $R_{abcd;e}(p)$, etc., cuántas condiciones inciales $X_a(p)$ y $F_{ab}(p)$ independientes podemos dar: n para $X_a(p)$, y $n(n-1)/2$ para $F_{ab}(p)$, lo que en total hace $n(n+1)/2$. Como $X^a(x)$ depende linealmente de estas condiciones, se tiene que como máximo podremos construir $n(n+1)/2$ campos de Killing linealmente independientes.

Los resultados siguientes son estándar y pueden encontrarse en muchos libros[1], en particular el último se deduce derivando la ecuación de Killing repetidamente (lo cual impone condiciones de integración) y utilizando las identidades de Bianchi y de Ricci, una manera rápida de verlo es en el caso en que $\vec{X}(p) \neq 0$, tomando un sistema de coordenadas adaptado a él se tiene $\vec{X} = \partial_1$ en una región alrededor de p, entonces $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = g_{ab,1} = 0$, esto es: la métrica no depende de x^1 y por lo tanto, tampoco podrán depender de esa coordenada ninguno de los tensores construídos a partir de la métrica: el de Riemann, Ricci, etc., con lo que su derivada de Lie respecto a $\vec{X}$ será cero. □

Otro resultado que se deduce directamente del teorema anterior es:

Proposición 4 *Si el rango del sistema lineal de ecuaciones algebraicas $\mathcal{L}_{\vec{X}} R^a{}_{bcd} = 0$, $\mathcal{L}_{\vec{X}}\left(\nabla_{a_1}...\nabla_{a_n} R^a{}_{bcd}\right) = 0$ en las incógnitas X_a y $X_{a;b}$ es q, entonces la dimensión del álgebra de Killing es $r = \dfrac{n(n+1)}{2} - q$.*

[1] Véase H Stephani, General Relativity 2nd edition, Cambridge University Press 1990.

En este punto conviene recordar todo lo dicho sobre órbitas, coordenadas adaptadas, etc. Véase el capítulo **??** para más detalles. A efectos de consistencia, recordemos brevemente los conceptos principales adaptados ya al caso de las isometrías.

Sea $S = \{\varphi : M \to M \ : \ \varphi^* g = g\}$ el grupo de isometrías de M y sea $\mathcal{K}(M)$ su álgebra de Killing asociada. Supongamos que $\dim \mathcal{K}(M) = r$ y que $\{\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r\}$ son KV que forman una base de $\mathcal{K}(M)$ (esto es: cualquier otro KV es una combinación lineal, con coeficientes constantes, de éstos).

Recordemos que la órbita de S (o abusando del lenguaje, la órbita de $\mathcal{K}(M)$) a través de p es

$$O_p = \{q \in M \ : \ \text{existe} \varphi \in S \ \text{ tal que } \ q = \varphi(p)\}$$

y que los campos de Killing (KV) son siempre tangentes a las órbitas. Recordemos asimismo que las órbitas son disjuntas o coinciden totalmente; i.e.: dados $p, p' \in M$ o bien $O_p = O_{p'}$ o bien $O_p \cap O_{p'} = \emptyset$.

Dado $p \in M$, consideremos ahora

$$\triangle(p) = \mathcal{K}_p(M) \equiv \{\vec{X}(p) : \vec{X} \in \mathcal{K}(M)\} \subseteq T_p M \qquad (4.9)$$

Tenemos entonces el resultado siguiente:

Teorema 6 *Si* $\dim \triangle(p) \equiv S_p$ *es la misma para todo punto* $p \in M$ *(i.e.:* $S_p \equiv s \in \mathbb{R}, s \leq n$*) entonces*

1. *Cada órbita de* $\mathcal{K}(M)$ *es una subvariedad de* M*.*
2. *Si* O *es una órbita de* $\mathcal{K}(M)$ *y* $q \in O$*, entonces* $T_q O \equiv \triangle(q)$

N 1 Si se verifican las condiciones del teorema, significa que podemos escoger coordenadas adaptadas a las órbitas; i.e.: si $\dim M = n$ y $\dim O = d$ $(d \leq n)$, entonces existen coordenadas $x^1, \cdots, x^d, x^{d+1}, \cdots, x^n$ tales que las órbitas son precisamente las subvariedades dadas por $x^{d+1} = c_{d+1}, \cdots, x^n = c_n$ $(c_{d+1}, \cdots, c_n \in \mathbb{R})$, y entonces $\vec{X}_A = \sum_{k=1}^{d} X_A^k(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^k}$, $A = 1...r$.

N 2 Dado $p \in M$, $\dim O_p \equiv \text{rango}[\vec{X}_1 ... \vec{X}_r]_p$, ya que la dimensión de una variedad es igual a la de su espacio tangente.

N 3 Dado que las órbitas son subvariedades, y que los KV son tangentes a ellas, del teorema anterior se tendrá que la dimensión de $K(M)$ actuando sobre una órbita de dimensión d es $r \leq d(d+1)/2$, y si $r = d(d+1)/2$ entonces las órbitas son de curvatura constante y la métrica toma sobre ellas formas bien conocidas. Se sabe además que $r \neq d(d+1)/2 - 1$ (*Teorema de Fubini*). Esto permite enumerar los grupos que pueden actuar sobre órbitas de determinada dimensión; así si $d = 1$ entonces $r = 1$, $d = 2$ entonces $r = 2$ o $r = 3$, $d = 3$ entonces $r = 3, 4$ o $r = 6$ (y entonces son de curvatura constante), y finalmente, en el caso de un espaciotiempo, si $d = 4$, i.e.: $O_p = M$ entonces $r = 4, 5, 6, 7, 8, 10$ y todos estos casos están profusamente estudiados.

4.3.1. Grupo de isotropía y otros resultados.

Dado el grupo de isometrías S y un punto $p \in M$; consideremos $I_p \equiv \{f \in S \ : \ f(p) = p\}$; esto es el conjunto de isometrías que dejan el punto p fijo; I_p se llama el **grupo de isotropía de** p[2]. Notemos

[2]Para transformaciones generales (no isometrías) se llama **grupo de estabilidad**.

que $I_p \neq \emptyset$ ya que $I_p \ni e$ siempre.

Es muy fácil demostrar que

Teorema 7 *I_P es un subgrupo de S.*

N 3 Si $q \in O_p$ entonces existe una isometría $\varphi \in S$ tal que $q = \varphi(p)$. Dada $f \in I_p$ se sigue $\varphi f \varphi^{-1} = \varphi\left(f(p)\right) = \varphi(p) = q$, que significa: $\varphi f \varphi^{-1} \in I_q$ esto es $I_p, I_q (p, q \in O_p)$ son subgrupos conjugados de S y por lo tanto tiene la misma dimensión s y a menudo nos referimos a ellos como **grupo de isotropía de la órbita**, I_s.

Sea $h \in I_P$ entonces $h(p) = p$, esto es: p es un punto fijo de h. Como para cualquier isometría $\varphi \in S$ existe un KV que la genera, esto es: $\vec{X} \in \mathcal{K}(M)$ tal que $x^a(\bar{p}) = \varphi^a(p) = \left(e^{\vec{X}}\right)_p (x^a(p))$, se tiene que para $h \in I_p$, existe $\vec{X} \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$ such that $x^a(P) = h^a(P) = \left(e^{\vec{X}}\right)_p (x^a(p))$; que implica $\vec{X}(p) = \vec{0}$ (de nuevo la condición de punto fijo). El conjunto de todos estos KV, esto es: todos los KV que generan isometrías que dejan el punto p fijo se nota $\hat{I}_p$; i.e.:

$$\hat{I}_p = \{\vec{X} \in \mathcal{K}(M)) \quad \vec{X}(p) = \vec{0}\}$$

y es trivial ver que $\hat{I}_p \subseteq \mathcal{K}(M)$ es una subálgebra del álgebra de Killing $\mathcal{K}(M)$, ya que $\vec{X}, \vec{Y} \in \hat{I}_p$ implica $\vec{X}(p) = \vec{Y}(p) = \vec{0}$ y entonces $a\vec{X}(p) + b\vec{Y}(p) = [\vec{X}, \vec{Y}](p) = \vec{0}$, y se llama **álgebra de isotropía**. Su dimensión es $\dim \hat{I}_p = s \leq r = \dim \mathcal{K}(M))$ y como hemos visto genera el grupo de isotropía I_p.

Sea ahora O_p la órbita de $\mathcal{K}(M)$ a través de p, entonces, del álgebra elemental se tiene

$$\dim \mathcal{K}(M) = \dim O_p + \dim \hat{I}_p \tag{4.10}$$

Se dice que S **actúa simple-transitivamente sobre sus órbitas** si y sólo si $\varphi(p) = \varphi'(p)$, implica $\varphi = \varphi'$ en cuyo caso $\dim \mathcal{K}(M) = \dim O_p$; i.e.: $\dim \hat{I}_p = 0$ y $I_p = \{e\}$. En caso contrario se dice que S **actúa multi-transitivamente sobre sus órbitas** ($\dim \mathcal{K}(M) > \dim O_p$; es decir $\dim \hat{I}_p \neq 0$).

Finalmente, consideremos I_p y su álgebra generadora (algebra de isotropía) $\hat{I}_p \subseteq \mathcal{K}(M)$. Definamos $\hat{I}'_p = \{h_*, \quad \text{para todo } \ h \in I_p\}$. Como p es un punto fijo para todas las transformaciones de I_p se tiene que $h_* : T_pM \to T_pM$ para todas las funciones $h_* \in \hat{I}'_p$; esto es: los elementos de $\hat{I}'_p$ son endomorfismos del epacio tangente en p, T_pM, los cuales forman grupo con la operación composición de funciones y se llama **grupo lineal de isotropía**. Dado que h es una isometría $(h^*g) = g$, y recordando la ecuación (2.19)) y teniendo en cuenta ahora que $h(p) = p$ se tiene:

$$(h^*g)_{cd}(p) = g_{cd}(p) = g_{ab}(p)\, (h^*)^a_{\ c}\, (h^*)^b_{\ d} \qquad \text{siendo} \qquad (h^*)^a_{\ c} = \left(h^t_*\right)^a_{\ c}.$$

esto es: las matrices que representan h_*, $(h_*)^a_{\ c}$, deben ser necesariamente un subgrupo del grupo ortogonal generalizado, o sea, del grupo de Lorentz en el caso en que (M, g) sea un espaciotiempo.