Capítulo

$\boxed{5}$

Fracciones Continuas

5.1 Introducción

Las fracciones continuas son uno de los temas más interesantes dentro de la teoría de números, así como también uno de los más antiguos. Su origen se remonta a la antigua Grecia, específicamente **Euclides** estudió por primera vez este tipo particular de fracciones en el Libro 8 de *los Elementos*. Euclides vivió en el siglo 3 a.c. y enseñó matemáticas en Alejandría.

En la Edad Moderna la teoría fue retomada por el matemático italiano **Bombelli**, en su libro *L'Algebra parte maggiore dell' aritmetica.* Bologna 1572, en donde se utilizan fracciones continuas para calcular raíces cuadradas.

Por ejemplo

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}$$

Posteriormente **Leonhard Euler** en su memoria *De fractionibus continuis. 1737* , dio los primeros pasos en la teoría, tal como se conoce en la actualidad.

Finalmente, fue el célebre matemático francés **Joseph Louis Lagrange** quien en 1768 formalizó esta teoría en su memoria *Solution d'un problème d'arithmétique.* Lagrange resolvió completamente la famosa ecuación de Fermat

$$x^2 - dy^2 = 1$$

para lo cual usó de manera esencial las fracciones continuas.

5.2 Fracciones Continuas

Definición 5.2.1 *Sean* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *números reales no nulos. Una expresión del tipo*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

se llama **Fracción Continua**

Notación Para denotar la expresión de arriba, usaremos el símbolo:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots].$$

Definición 5.2.2 *Sean* $a_1, \ldots, a_n$ *números reales. Entonces la expresión*

$$[a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

se llama **Fracción Continua Finita** .

Observación : Usualmente los a_i, en la descomposición de una fracción continua son números enteros positivos. En tal caso diremos que la fracción continua es **simple**.

Podemos representar una fracción continua infinita, como el límite de una fracción continua finita. Esto es

$$[a_0, \ldots, a_n, \ldots] = \lim_{n \to \infty} [a_0, \ldots, a_n]$$

Estudiaremos para cada n, el número racional generado por la expansión de $[a_0, \ldots, a_n]$. Así pues tenemos

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_2a_1a_0 + a_2 + a_0}{a_2a_1 + 1}$$

etc...

En general sea

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Entonces p_n y q_n se llaman las **convergentes n-ésimas** de la fracción continua dada. Es claro que tanto p_n como q_n son polinomios que dependen de $a_0, \ldots, a_n$. Tenemos entonces las siguientes expresiones para estos polinomios

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1a_0 + 1, \quad , p_2 = a_2a_1a_0 + a_2 + a_0, \quad \ldots$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_2 = a_2a_1 + 1, \quad \ldots$$

Teorema 5.2.1 *Para todo $n \geq 2$ se tiene*

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$$

Demostración:

Usaremos inducción sobre n. Para $n = 2$, el resultado es cierto. Supongamos que el resultado es válido para n. Entonces

$$[a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1/a_{n+1}]$$

Es claro que la (n+1)-ésima convergente de la fracción de la izquierda es igual a la n-ésima convergente de la fracción de la derecha. Luego

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}a_n p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1}p_{n-2}}{a_{n+1}a_n q_n + q_{n-1} + a_{n+1}q_{n-2}}\end{aligned}$$

Usando ahora la hipótesis de inducción se tiene

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{a_{n+1}(p_n - p_{n-2}) + p_{n-1} + a_{n+1}p_{n-2}}{a_{n+1}(q_n - q_{n-2}) + q_{n-1} + a_{n+1}q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}\end{aligned}$$

Con esto termina la demostración. ♠

Podemos construir un algoritmo para generar las convergentes de una fracción continua, mediante una tabla

n	a_{n+1}	p_n	q_n
0	a_1	a_0	1
1	a_2	p_1	q_1
2	a_3	p_2	q_2

Iniciamos la tabla colocando los valores de $a_0, a_1, a_2, p_0, p_1, q_0$ y q_1. Luego a partir de $n = 2$, para hallar el valor de p_n procedemos de la forma siguiente: Se toma el elemento en la casilla superior, éste se multiplica por el de la casilla de la izquierda y luego se le suma el de la casilla de arriba. Los q_n se hallan de la misma forma.

Ejemplo: Hallar la décima convergente de la fracción continua

$$[2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$$

Tenemos entonces la tabla

n	a_{n+1}	p_n	q_n
0	1	2	1
1	2	3	1
2	1	8	3
3	2	11	4
4	1	30	11
5	2	41	15
6	1	112	41
7	2	153	56
8	1	418	153
9	2	571	209
10	1	1560	571

Calcularemos los valores de las fracciones $x_n = p_n/q_n$ cuando n toma los valores: $0, \cdots, 10$. Esto nos da el siguiente resultado:

x_0	2
x_1	3
x_2	2.66667
x_3	2.75
x_4	2.7272
x_5	2.7333
x_6	2.73171
x_7	2.73214
x_8	2.73202
x_9	2.73206
x_{10}	2.73205

Mirando la última tabla se puede intuir que las fracciones p_n/q_n convergen a un límite. La demostración de este hecho en general no es fácil y requiere de una serie de resultados previos que daremos a continuación.

Proposición 5.2.1 *Para todo $n \geq 1$ se tiene*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \tag{5.1}$$

Demostración:

Usando el teorema 5.2.1 se tiene

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \end{aligned}$$

Si aceptamos la hipótesis de inducción para $n-1$, la cual establece

$$(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^{n-2}$$

se tendrá entonces

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

♠

Si en la ecuación anterior dividimos ambos miembros entre $q_n q_{n-1}$, obtenemos

Proposición 5.2.2 *Para todo $n \geq 1$ se tiene*

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \tag{5.2}$$

Proposición 5.2.3 *Para todo $n \geq 1$ se tiene*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \tag{5.3}$$

Demostración:

Usando el Teorema 5.2.1 se tiene

$$\begin{aligned}
p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\
&= a_n(-1)^{n-2} \quad \textit{por} \quad (5.1) \\
&= (-1)^n a_n
\end{aligned}$$

♠

Observación: En lo sucesivo sólo consideramos fracciones continuas en donde los elementos $a_0, \ldots a_n, \ldots$ son números enteros positivos. Estas se llaman **Fracciones continuas simples**.

Teorema 5.2.2 *Toda fracción continua simple es convergente a un número real.*

Demostración:

Sea $x = [a_0, a_1, \ldots]$ y para $n \geq 1$ sea

$$x_n = [a_0, \ldots a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

Probaremos que la sucesión x_n converge a un límite L, lo cual será hecho en varias etapas.

1. *La subsucesión x_{2n} de términos pares es monótona estrictamente creciente. La subsucesión x_{2n+1} de términos impares es monótona estrictamente decreciente.*

   En efecto, de (5.3) obtenemos

   $$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^n a_n$$

   luego si n es par

$$\frac{p_n}{q_n} > \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$$

y si n es impar

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}.$$

Por lo tanto la subsucesión $\{x_{2n}\}$ es creciente y la subsucesión $\{x_{2n-1}\}$ es decreciente.

2. *Las subsucesiones de términos pares e impares, respectivamente, son convergentes*

   De la relación (5.2) deducimos

$$x_{2n} - x_{2n-1} < 0$$

luego

$$x_{2n} < x_{2n-1}$$

Como $\{x_{2n}\}$ es creciente y $\{x_{2n-1}\}$ es decreciente, se obtiene la interesante relación

$$x_2 < x_{2n} < x_{2n-1} < x_1 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como consecuencia de todo esto se obtiene que $\{x_{2n}\}$ es monótona creciente acotada, luego es convergente.

Sea

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = L_1$$

De igual forma, $\{x_{2n-1}\}$ es monótona decreciente acotada y por lo tanto convergente.

Sea

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = L_2$$

3. *La sucesión* $\{x_n\}$ *es convergente .*

   De la relación (5.2) se obtiene

   $$| x_n - x_{n-1} | = \frac{1}{q_n q_{n-1}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

   Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Esto es, a medida que n crece, la distancia entre los términos se hace más pequeña. Luego la sucesión es convergente a un límite L, y además toda subsucesión convergente de ella, converge al mismo límite. Por lo tanto $L_1 = L_2 = L$, y

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

♠

Teorema 5.2.3 *Toda fracción continua simple finita* $[a_0, \ldots a_n]$ *representa un número racional.*

Demostración:

Basta observar que

$$[a_0, \ldots a_n]$$

se puede escribir como

$$a_0 + 1/[a_1, \ldots a_n].$$

Luego, aplíquese inducción sobre n.

♠

Teorema 5.2.4 *Toda fracción racional $\alpha = p/q$ se expresa como una fracción continua simple finita.*

Nota: No hay unicidad en esta representación, pues

$$[a_0, \dots a_n] = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

Sin embargo éstas son las dos únicas representaciones posibles de α.

Demostración:

Usaremos la notación: $[x]$ para indicar la parte entera de un número real x. Comenzamos por hacer

$$r_0 = \alpha \quad r_1 = \frac{1}{r_0 - [r_0]}, \dots r_n = \frac{1}{r_{n-1} - [r_{n-1}]} \tag{5.4}$$

De aquí se obtiene

$$r_n = [r_n] + \frac{1}{r_{n+1}} \quad \text{para todo } \ n \geq 0$$

Nótese que para todo i, se tiene que $r_i > 1$, luego $1/r_i < 1$ y por lo tanto, los coeficientes a_i de la expansión de α como una fracción continua vienen dados por

$$a_0 = [\alpha], a_1 = [r_1], \dots, a_n = [r_n] \tag{5.5}$$

Por otro lado, usando el algoritmo de división para p y q, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} p & = & a_0 q + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q \\ q & = & a_1 r_1 + r_2, \quad r_2 < r_1 < q \\ r_1 & = & a_2 r_2 + r_3, \quad r_3 < r_2 \\ & = & \vdots \\ r_i & = & a_{i+1} r_{i+1} + r_{i+2}, \quad r_{i+2} < r_{i+1} \end{array}$$

Como $\{r_i\}$ es una sucesión decreciente de enteros positivos, se debe tener eventualmente, $r_{n+1} = 0$ para algún n. Luego el proceso de formación de los a_i se detiene en a_n.

Por lo tanto

$$\alpha = \frac{p}{q} = [a_0, \ldots, a_n]$$

♠

Observación: Si α es un número irracional , entonces la fracción continua asociada a él, se obtiene usando el algoritmo dado en (5.5)

Proposición 5.2.4 *Sea* $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *y sean*

$$r_0 = \alpha, \quad r_1 = \frac{1}{r_0 - [r_0]}, \ldots, r_n = \frac{1}{r_{n-1} - [r_{n-1}]}$$

Entonces

$$r_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$$

Demostración:

Usaremos inducción sobre n. Para $n = 1$, tenemos

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}}$$

de aquí se concluye que $r_1 = [a_1, a_2, \ldots]$.

Supongamos que el resultado es cierto para n, luego

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1}{r_n - a_n} \\ &= \frac{1}{[a_n, a_{n+1}, \ldots] - a_n} \\ &= [a_{n+1}, \ldots] \end{aligned}$$

Luego el resultado es cierto para $n+1$. Con esto damos fin a la demostración.

♠

Proposición 5.2.5 *Sea α un número real y r_n la siguiente sucesión de números*

$$r_0 = [\alpha], r_0 = [r_0] + \frac{1}{r_1}, \ldots, r_n = [r_n] + \frac{1}{r_{n+1}}, \quad n \geq 1$$

entonces

$$\alpha = \frac{r_{n+1}p_n + p_{n-1}}{r_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Demostración:

De acuerdo a la demostración del teorema anterior se sigue que $[r_n] = a_n$ para todo n, luego usamos inducción sobre n para probar este resultado.

Si $n = 1$, se tendrá

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_2}} \\
&= a_0 + \frac{r_2}{r_2 a_1 + 1} \\
&= \frac{(r_2 a_1 + 1)a_0 + r_2}{r_2 a_1 + 1} \\
&= \frac{r_2 a_1 a_0 + a_0 + r_2}{r_2 a_1 + 1} \\
&= \frac{r_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{r_2 a_1 + 1} \\
&= \frac{r_2 p_1 + p_0}{r_2 q_1 + q_0}
\end{aligned}$$

Supongamos que el teorema es cierto para n, y probaremos que se cumple para $n+1$.

Luego

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + \dfrac{p_{n-1}}{r_{n+1}}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + \dfrac{q_{n-1}}{r_{n+1}}} \\ &= \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{r_{n+1}}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{r_{n+1}}} \\ &= \frac{r_{n+1} p_n + p_{n-1}}{r_{n+1} q_n + q_{n-1}}\end{aligned}$$

♠

Seguidamente daremos una serie de ejemplos en donde calcularemos los elementos de una fracción continua de algunos números.

Ejemplo: Sea $\alpha = \sqrt{2}$, entonces mediante la aplicación del algoritmo dado en la demostración del teorema 5.2.4, calculamos los a_i en la descomposición

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$$

En primer lugar, notamos que

$$\alpha = \frac{2}{\alpha} = 1 + \frac{2-\alpha}{\alpha}, \qquad \text{y} \qquad 0 < \frac{2-\alpha}{\alpha} < 1$$

luego $[a_0] = 1$. Para calcular a_1 hacemos

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{1}{2/\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Multiplicando numerador y denominador por $(\alpha + 1)$ se tiene

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2-1} = 1 + \alpha$$

de donde $a_1 = [1 + \alpha] = 2$.

Para calcular el siguiente elemento, hacemos

$$\frac{1}{(1+\alpha)-2} = \frac{1}{\alpha - 1} = 1 + \alpha$$

y por lo tanto $a_2 = [1 + \alpha] = 2$.

Continuando de esta manera, vemos que $a_i = 2$, para todo $i \geq 1$.

Luego

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots]$$

Ejemplo: *Una aplicación en la astronomía: Eclipses lunares.*

Un eclipse lunar se produce cuando la luna penetra en el cono de sombra creado por la tierra, al interponerse ésta entre el sol y la luna.

Los eclipses sólo se producen cuando la luna nueva o llena se encuentra en los llamados nodos ascendentes o descendentes de la órbita que describe alrededor de la Tierra.

Por lo tanto el eclipse depende

1. Del intervalo entre dos fases iguales consecutivas de La Luna, el cual es llamado *Mes Sinódico* y tiene una duración de 29,5306 días.

2. Del intervalo de tiempo entre el paso de la luna por dos nodos consecutivos, el cual se llama *Mes Draconítico* y tiene una duración de 27,2122 días

Luego el intervalo de tiempo entre dos eclipses consecutivos debe ser igual a una cantidad entera de meses sinódicos, que a su vez contenga una cantidad entera de meses draconíticos.

Es decir si

$$x = 29,5306 \quad y \quad z = 27,2123$$

se desea obtener una relación del tipo

$$qx = pz$$

con p y q números enteros positivos.

Esto es, si hacemos

$$\alpha = \frac{x}{z} = 1,08519$$

entonces la pregunta es ¿Cuál es la fracción p/q con menor denominador que está más cercana a 1,08519? Para resolver este problema, usamos fracciones continuas.

En primer lugar, hallamos los coeficientes a_i de la expansión

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$$

usando el algoritmo del teorema 5.2.4.

En segundo lugar, hallamos las convergentes de esta fracción continua por intemedio del algoritmo del teorema 5.2.1.

Colocando toda esta información en una tabla nos da

n	a_{n+1}	p_n	q_n	p_n/q_n
0	11	1	1	1
1	1	12	11	1.09091
2	2	13	12	1.08333
3	1	38	35	1.08571
4	4	51	47	1.08511
5	2	242	223	1.08520
6	9	535	493	1.08519
7	1	5057	4660	1.08519

Las distintas aproximaciones a α vendrán dadas por los cocientes p_n/q_n . Vemos que el valor 242/223 es aceptable pues difiere de α en 10^{-5} días, lo cual es

$$3600x24x10^{-5}\ sg. = 0.864\ sg.$$

lo cual es depreciable, pues los eclipses tienen una duración promedio de 50 minutos.

Luego se tiene la relación fundamental.

223 meses sinódicos = 242 meses draconíticos

Esta relación, conocida como **Ciclo de Saros**, fue descubierta por los astrónomos de la antigua Mesopotamia.

Finalmente, para calcular el período entre dos eclipses multiplicamos: $223 \times 29.5306 = 6585{,}3238$ días = 18 años y 14 días. Por lo tanto, los eclipses de luna ocurren cada 19 años aproximadamente.

Ejemplo: *El número* π
Podemos hallar algunas aproximaciones de π mediante fracciones continuas. A tal fin tomamos el siguiente valor de este número, el cual es correcto hasta la octava cifra decimal

$$\pi = 3.14159265$$

Luego se tiene

$$\begin{array}{ll}
a_0 = [\pi] = 3 & r_1 = 1/(\pi - 3) = 7.0625 \\
a_1 = [r_1] = 7 & r_2 = 1/(r_1 - a_1) = 15.99660 \\
a_2 = [r_2] = 15 & r_3 = 1/(r_2 - a_2) = 1.00341 \\
a_3 = [r_3] = 1 & r_4 = 1/(r_3 - a_3) = 293.09689 \\
a_4 = [r_4] = 293 & r_5 = 1/(r_4 - a_4) = 10.32056 \\
a_5 = [r_5] = 10 &
\end{array}$$

Empleamos ahora el algoritmo del Teorema 5.2.1 para hallar las cuatro primeras convergentes de π.

n	a_{n+1}	p_n	q_n	p_n/q_n
0	7	3	1	3
1	15	22	7	3.14285714
2	1	333	106	3.14150943
3	293	355	113	3.14159292
4	10	104348	33215	3.14159265

El valor aproximado de π dado por la quinta convergente es bastante bueno, dado que se aproxima al valor correcto en ocho cifras decimales.

El valor 355/113 fue descubierto por el matemático chino Tsu-Chung-Chi, en el siglo 430 d.c. Durante la Edad Media en Europa, se tomaba 22/7 como el valor correcto de π. Otros autores, en Europa y en la India, usaban la expresión $\sqrt{10}$.

A partir del Renacimiento, con el gran impulso que se le dio a la ciencia, comenzaron a aparecer mejores aproximaciones, e inclusive series de sumas o productos en donde se puede calcular π. Por ejemplo, el matemático francés Vieta, a mediados del siglo XVI, descubrió la fórmula

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

A fines del siglo XVII ya se conocía el valor de π con las primeras 50 cifras exactas.

5.3 Facciones continuas periódicas

Definición 5.3.1 *Una fracción continua simple de la forma*

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k, b_1, \ldots, b_k, \ldots] \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_n, \overline{b_1, \ldots, b_k}\ ] \end{aligned}$$

se dice **Periódica**.

La sucesión de números $b_1, \ldots, b_k$ se llama **el Período de** α . La sucesión de enteros $a_1, \ldots, a_n$ se llama **el Preperíodo de** α. El entero k, se le llama también el período de la fracción continua α.

Definición 5.3.2 *Una fracción continua de la forma*

$$\alpha = [\ \overline{b_1, \ldots, b_k}\ ]$$

se llama **Periódica pura**.

Proposición 5.3.1 *Si el número real α se representa mediante una fracción continua simple períodica, entonces α es solución de una ecuación del tipo*

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{5.6}$$

con A, B y C enteros.

También se dice que α es un **irracional cuadrático**.

Demostración:

Sea

$$\alpha = [\ \overline{b_1, \ldots, b_k}\ ] = [b_1, \ldots, b_k, \alpha]$$

Entonces usando la proposición 5.2.5, se tiene

$$\alpha = \frac{\alpha p_k + p_{k-1}}{\alpha q_k + q_{k-1}}$$

Por lo tanto α satisface una ecuación cuadrática con coeficientes enteros (Ver ejercicio 1).

II) Si α no es periódica pura, entonces

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \overline{b_1, \ldots, b_k}\ ]$$

Sea $\beta = [\ \overline{b_1, \ldots, b_k}\ ]$. Entonces por la proposición 5.2.5 se tiene

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \beta] = \frac{\beta p_n + p_{n-1}}{\beta q_n + q_{n-1}}$$

Entonces es claro que, de acuerdo a la parte I, α es solución de una ecuación cuadrática del tipo (5.6).

♠

Sea α un número irracional cuadrático, entonces

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$$

donde a, b y c son enteros.

Entonces si $c > 0$, podemos multiplicar por c el numerador y denominador para obtener

$$\alpha = \frac{ac + \sqrt{bc^2}}{c^2} = \frac{m_0 + \sqrt{d}}{k_0} \tag{5.7}$$

donde k_0 divide a $m_0^2 - d$.

Teorema 5.3.1 *Sean α, m_0 y k_0 como en (5.7). Definimos*

$$\alpha_i = \frac{m_i + \sqrt{d}}{k_i}, \quad a_i = [\alpha_i],$$

donde:

$$m_{i+1} = a_i k_i - m_i, \quad k_{i+1} = \frac{d - m_{i+1}^2}{k_i}$$

Entonces k_i y m_i son enteros, para todo $i \geq 0$, k_i divide a $d - m_i^2$ y

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots].$$

Demostración:

En primer lugar, k_0 y m_0 están en $\mathbb{Z}$, y k_0 divide a $d - m_0^2$. Luego la proposición vale para $i = 0$. Supongamos que el resultado es cierto para un i cualquiera. Luego definimos

$$m_{i+1} = a_i k_i - m_i \in \mathbb{Z}$$

Además, podemos hacer

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= \frac{d - (a_i k_i - m_i)^2}{k_i} \\ &= \frac{d - a_{i^2} k_i^2 + 2a_i k_i m_i - m_i^2}{k_i} \\ &= \frac{d - m_i^2}{k_i} + 2a_i m_i - a_i^2 k_i \end{aligned}$$

Luego, es claro que $k_{i+1} \in \mathbb{Z}$, por hipótesis de inducción.

Además:

$$k_i = \frac{d - m_{i+1}^2}{k_{i+1}} \in \mathbb{Z}$$

luego k_{i+1} divide a $d - m_{i+1}^2$.

Finalmente, tenemos que, para todo i

$$\begin{aligned}
\alpha_i - a_i &= \frac{m_i + \sqrt{d} - a_i k_i}{k_i} \\
&= \frac{\sqrt{d} - m_{i+1}}{k_i} \\
&= \frac{d - m_{i+1}^2}{k_i\sqrt{d} + k_i m_{i+1}} \\
&= \frac{k_{i+1}}{m_{i+1} + \sqrt{d}} \\
&= \frac{1}{\alpha_{i+1}}
\end{aligned}$$

Luego $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$.

♠

Definición 5.3.3 *Sea $x = a + b\sqrt{d}$, con a y b números racionales, entonces* **el conjugado** *de x, es el número real*

$$x' = a - b\sqrt{d}$$

Teorema 5.3.2 *Sea $\alpha = (m_0 + \sqrt{d})/k_0$ como en 5.7. Entonces α viene representado por una fracción continua simple periódica.*

Demostración:

De acuerdo a la proposición 5.2.5, se tiene

$$\alpha = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Sustituyendo α_n en función de α, tenemos

$$\begin{aligned}\alpha_n &= -\left(\frac{\alpha q_{n-2} - p_{n-2}}{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}\right)\\ &= -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\left(\frac{\alpha - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\alpha - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)\end{aligned}$$

Tomando conjugados en ambos miembros se obtiene

$$\alpha'_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\left(\frac{\alpha' - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\alpha' - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right)$$

Entonces cuando $n \to \infty$ se tiene:

$$\left(\frac{\alpha' - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\alpha' - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}\right) \to 1$$

Luego existe un $N > 0$ tal que $\alpha'_n < 0$, para todo $n \geq N$. Como $\alpha_n > 0$, se tiene

$$\alpha_n - \alpha'_n = \frac{2\sqrt{d}}{k_n} > 0 \quad \text{para todo } \ n \geq N.$$

Luego $k_n > 0$, y por lo tanto:

$$0 < k_{n+1}k_n = d - m_{n+1}^2 \leq d, \quad \text{para todo } \ n \geq N.$$

De esta última desigualdad se obtiene que: $0 < k_n < d$, para todo $n \geq N$. También:

$$m_{n+1}^2 < m_{n+1}^2 + k_{n+1}k_n = d$$

lo cual implica:

$$| \, m_{n+1} \, | < \sqrt{d}, \quad \text{para todo } \ n \geq N.$$

Luego las sucesiones de enteros $\{k_n\}$ y $\{m_n\}$ son finitas, y por lo tanto existe un $j > n$ tal que

$$k_n = k_j \quad y \quad m_n = m_j$$

Por lo tanto: $\alpha_n = \alpha_j$, y esto implica

$$\begin{aligned}\alpha &= [a_0, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] \\ &= [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, a_{j-1}, \alpha_j] \\ &= [a_0, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{j-1}}]\end{aligned}$$

Luego α es periódica. ♠

Ejemplo: Hallar la expansión de $\sqrt{7}$ como fracción continua. Sabemos que $2 < \sqrt{7} < 3$, luego $a_0 = 2$. Sea

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} \\ &= \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} \\ &= \frac{\sqrt{7}+2}{3}\end{aligned}$$

luego $a_1 = [r_1] = 1$. De igual manera

$$\begin{aligned}r_2 &= \frac{1}{r_1 - a_1} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{7}+2)/3 - 1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{7}-1} \\ &= \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6} \\ &= \frac{\sqrt{7}+1}{2}\end{aligned}$$

Luego $a_2 = [r_2] = 1$. Continuando este proceso, calculamos el siguiente a_i, para lo cual hacemos

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{1}{(\sqrt{7}+1)/2-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} \\ &= \frac{\sqrt{7}+1}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto $a_3 = [r_3] = 1$. De igual forma sea

$$\begin{aligned} r_4 &= \frac{1}{(\sqrt{7}+1)/3-1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{7}-2} \\ &= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3} \\ &= \sqrt{7}+2 \end{aligned}$$

Luego $a_4 = [r_4] = 4$. Sea

$$\begin{aligned} r_5 &= \frac{1}{(\sqrt{7}+2)-4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} \\ &= r_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_5 = a_1 = 1$, y a partir de esta posición comienzan a repetirse los valores de a_i. Por lo tanto

$$\sqrt{7} = [\ 2, \overline{1, 1, 1, 4}\ ]$$

Ejercicios

1) Sean $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{d}$ y $\beta = a_2 + b_2\sqrt{d}$, con a_1, a_2, b_1, b_2 números racionales. Probar:
   a) $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$
   b) $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$
   c) Para todo racional c: $(c\alpha)' = c\alpha'$.

2) Probar que si α es un irracional cuadrático, y a, b, c y d son números enteros, entonces

$$\theta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

es también un irracional cuadrático.

3) Sean $\{m_i\}$, $\{k_i\}$ como en el teorema 5.3.1 Probar que existe un n, tal que:

$$m_{nj} = m_n, \quad y \quad k_{nj} = k_n, \quad \text{para todo } \ j \geq 1.$$

4) Expresar como fracción continuas los números reales:
   a) $e \cong 2.7182818$,
   b) $\pi/2$.

5) Sea $\alpha = \pi$. Hallar una fracción p/q, que no sea convergente de α y tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

5.4 La Ecuación de Fermat

Consideramos ahora la ecuación

$$x^2 - dy^2 = 1$$

la cual se denomina **Ecuación de Fermat**.

Estamos interesados en hallar soluciones enteras de esta ecuación, distintas de las soluciones triviales $x = 1, x = -1, y = 0$.

Teorema 5.4.1 *Si α es un número irracional, entonces para todo $n \geq 1$ se tiene:*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

donde p_n, q_n son las n-ésimas convergentes de α.

Demostración:

Se tiene de acuerdo a la proposición 5.2.5

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

donde $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$, luego $\alpha_n > 1$. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\alpha - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{-(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})} \\
&= \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})}
\end{aligned}$$

Usando $\alpha_{n+1} \geq 1$, $q_n \geq 1$ se tiene

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

♠

Teorema 5.4.2 *Si $\frac{p}{q}$ es una convergente de α, entonces*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Proposición 5.4.1 *Si* $\dfrac{p}{q}$ *es una convergente de* α*, entonces*

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon\theta}{q^2} \tag{5.8}$$

donde $\varepsilon = \pm 1, \;\; 0 < \theta < 1.$

Observación: Si p/q es una fracción que satisface (5.8) entonces no se puede afirmar que p/q sea una convergente de α. Sin embargo, es posible dar una condición adicional, como veremos más adelante, de tal forma que se tenga un resultado recíproco del teorema anterior.

La siguiente condición se debe a Legendre:

Teorema 5.4.3 *Sea* α *un número irracional. Si* $\dfrac{p}{q}$ *es un número racional tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

entonces $\dfrac{p}{q}$ *es una convergente de* α*.*

Demostración:

Sea

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

De la hipótesis se deduce que

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon\theta}{q^2}$$

con $\varepsilon = \pm 1$, y $0 < \theta < 1/2$.

Entonces podemos elegir n, sin pérdida de generalidad, de tal forma que $\varepsilon = (-1)^n$.

Definamos el número racional β mediante la fórmula

$$\alpha = \frac{\beta p_n + p_{n-1}}{\beta q_n + q_{n-1}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} - \alpha &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{\beta p_n + p_{n-1}}{\beta q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n(\beta q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^n}{q_n(\beta q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

Si resolvemos esta ecuación para β tendremos

$$\beta = \frac{q_n - \theta q_{n-1}}{q_n \theta}$$

De donde se deduce $\beta > 1$, pues $0 < \theta < 1/2$ y $q_{n-1} < q_n$.

Podemos entonces representar a β como una fracción continua

$$\beta = [a_{n+1}, \ldots]$$

luego definimos:

$$\begin{aligned} \gamma &= [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots] \\ &= [a_0, \ldots, a_n, \beta] \end{aligned}$$

Luego

$$\gamma = \frac{p_n \beta + p_{n-1}}{q_n \beta + q_{n-1}} = \alpha$$

Por lo tanto $p/q = p_n/q_n$ es una convergente de α. ♠

Teorema 5.4.4 *Sea* $\alpha = \sqrt{d}$ *y*

$$\alpha_n = \frac{m_n + \sqrt{d}}{k_n}$$

entonces la ecuación

$$x^2 - dy^2 = (-1)^n k_n$$

posee solución.

Demostración:

Usando la proposición 5.2.5 se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{d} &= \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{(\sqrt{d} + m_n)p_{n-1} + p_{n-2}k_n}{(\sqrt{d} + m_n)q_{n-1} + q_{n-2}k_n} \end{aligned}$$

de donde:

$$\sqrt{d}\left\{(\sqrt{d} + m_n)q_{n-1} + q_{n-2}k_n\right\} = (\sqrt{d} + m_n)p_{n-1} + p_{n-2}k_n$$

Igualando coeficientes racionales e irracionales nos da:

$$p_{n-1} = m_n q_{n-1} + k_n q_{n-2} \tag{5.9}$$

$$dq_{n-1} = m_n p_{n-1} + k_n p_{n-2} \tag{5.10}$$

Multiplicando la primera ecuación por p_{n-1}, la segunda por q_{n-1} y luego restando nos da

$$\begin{aligned} p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 &= k_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\ &= (-1)^n k_n. \end{aligned}$$

♠

Proposición 5.4.2 *Sea n el período de $\sqrt{d}$ como fracción continua. Entonces $k_n = 1$*

Demostración:

Sea

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{m_0 + \sqrt{d}}{k_0}$$

Entonces $m_0 = 1$ y $k_0 = 1$ De acuerdo a la definición de período, se debe cumplir:

$$\alpha_n = \frac{m_n + \sqrt{d}}{k_n} = \sqrt{d}$$

por lo tanto:

$$(k_n - 1)\sqrt{d} = m_n$$

de donde se obtiene $k_n = 1$. ♠

Teorema 5.4.5 *Sea d un entero positivo libre de cuadrados, entonces la ecuación:*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

posee infinitas soluciones

Demostración:

Nuevamente, sea n el período de la descomposición de $\sqrt{d}$ en fracción continua.

Si n es par, tomamos:

$$x = p_{nj-1} \quad y = q_{nj-1}$$

donde j es cualquier entero positivo. En virtud de la proposición anterior se tiene:

$$(p_{nj-1})^2 - (q_{nj-1})^2 d = (-1)^{nj} k_{nj} = 1.$$

Si n es impar, tomamos

$$x = p_{2nj-1} \quad y = q_{2nj-1}$$

Luego:

$$(p_{2nj-1})^2 - d(q_{2nj-1})^2 = (-1)^{2nj} k_{2nj} = 1$$

♠

Ejemplo:
Resolver:

$$x^2 - 7y^2 = 1$$

Solución:

Hemos visto que la expansión de $\sqrt{7}$ en fracción continua viene dada por:

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}\ ]$$

Podemos usar el algoritmo dado al comienzo para calcular las convergentes. Esto lo expresamos mediante la siguiente tabla:

n	a_{n+1}	p_n	q_n
0	1	2	1
1	1	3	1
2	1	5	2
3	4	8	3
4	1	37	14
5	1	45	17
6	1	82	31
7	1	127	48

Vemos que $(8, 3)$ es solución , al igual que $(127, 48)$. Podemos continuar generando más soluciones por intermedio de la tabla. Claramente, ellas aparecen entre las convergentes con un período de 4.

Teorema 5.4.6 *Si el par* (p, q) *es una solución de*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

con $d \geq 5$*, entonces la fracción* p/q *es una convergente de* $\sqrt{d}$*.*

Demostración:

Tenemos:

$$\begin{aligned} p^2 - dq^2 &= (p - \sqrt{d}q)(p + \sqrt{d}q) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left| \frac{p}{q} - \sqrt{d} \right| &= \frac{1}{q(p + \sqrt{d}q)} \\ &< \frac{1}{q^2\sqrt{d}} \\ &< \frac{1}{2q^2} \end{aligned}$$

Luego por el teorema, concluimos que p/q es una convergente de $\sqrt{d}$.

♠

Ejercicios

1) Resolver

$$x^2 - 11y^2 = 1$$

2) En la ecuación de Fermat

$$x^2 - y^2 = 1,$$

el lado izquierdo se puede factorizar

$$x^2 - y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

Los números complejos de la forma $x + iy$ se denominan **enteros de Gauss**

a) Investigue todo lo concerniente a los enteros de Gauss.
b) Resuelva la ecuación dada.

3) Sean x_1, y_1, x_2, y_2 números enteros. Probar la identidad

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

4) Usando la identidad anterior, probar que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son ambos solución de la ecuación

$$x^2 - dy^2 = 1$$

entonces también lo es (x_3, y_3), donde

$$x_3 = x_1x_2 - dy_1y_2, \quad y_3 = x_1y_2 - y_1x_2.$$

5) Resolver:
a) $x^2 - 3y^2 = 1$
b) $x^2 - 15y^2 = 1$
c) $x^2 - 6y^2 = -1$

6) Investigue bajo que condiciones sobre f y d se puede resolver

$$x^2 - dy^2 = f$$