

# Pattern Behavior for Trajectories of Complex Dynamic System

**Hernando Castañeda Marín**

Universidad de Pamplona, Doctorado Ciencias Aplicadas ULA,  
Mérida, Venezuela, 5101  
hcastaneda@ula.ve

**Wladimir Rodríguez Graterol**

Universidad de los Andes, Departamento de Computación,  
Mérida, Venezuela, 5101  
Wladimir@ula.ve

**Y**

**Eliézer Colina Morles**

Universidad de los Andes, Departamento de Automatización y Control,  
Mérida, Venezuela, 5101  
ecolina@ula.ve

## Abstract

This work proposes fuzzy logic based procedures for determining similarities between complex temporal dynamic system trajectories. These types of problems may be often found in the data mining area, where it is important to establish similarities between time series.

The proposed procedure is based upon using different scale and translation functions and uses the theory of fuzzy sets in order to model a gradual representation of similarities, incorporating analog elements to human judgment and geometrical computational methods. The work contemplates fuzzy equivalence relation algorithms for computing a similarity notion for both one-dimensional and multidimensional trajectories. Finally, the work includes some computer simulation examples in order to find pattern behavior in temporal data.

**Keywords**— Artificial intelligent, fuzzy sets theory, Dynamic system

## Resumen

Este documento propone procedimientos basados en lógica difusa para determinar similitudes entre trayectorias temporales de sistemas dinámicos complejos. Estos tipos de problemas pueden encontrarse frecuentemente en el área de minería de datos, donde es importante establecer similitudes entre series de tiempo.

El procedimiento propuesto esta basado en funciones que utilizan diferentes escalas y traslaciones y utilizan también la teoría de los conjuntos difusos para modelar una representación gradual de las similitudes, incorporada como elementos análogos en los juicios humanos y métodos computacionales geométricos. El trabajo contempla algoritmo de relaciones de equivalencia difusa para computar la noción de similitud Para trayectorias unidimensional y multidimensionales. Finalmente incluye algunas simulaciones para encontrar patrones de comportamiento en datos temporales.

**Palabras clave:** Inteligencia Artificial, Teoría de Conjuntos Difusos, Sistemas Dinámicos.

## 1 Introducción

Toda relación de equivalencia difusa (una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva máx.-min.) induce una partición crisp en cada uno de los *cortes*  $\alpha$ . El problema de conglomeración (clustering) difuso puede verse así, como un problema de identificación mediante una apropiada relación de equivalencia difusa a partir los datos dados [Klir, 1995]. Aunque esto no se puede hacer directamente, se puede fácilmente determinar las relaciones de compatibilidad difusa (reflexiva y simétrica) en términos de una apropiada función de distancia aplicada a los datos dados, entonces una relación equivalente difusa significativa es definida como una clausura transitiva de esta relación de compatibilidad difusa.

Muchos métodos de Reconocimiento de Patrones estudian el comportamiento de los objetos en condiciones estáticas, sin tener en cuenta la evolución temporal de los mismos. Existe una proporción de aplicaciones en la cual los cambios de estado de un objeto en el tiempo son determinantes en la forma de membresía para determinados patrones. En estos casos para un reconocimiento correcto de los objetos es importante no considerar solamente sus propiedades en un instante de tiempo sino también analizar las características de su comportamiento temporal. Esto significa que la historia temporal del objeto tiene un fuerte efecto sobre el proceso de reconocimiento.

Los métodos clásicos de reconocimiento de patrones no se presentan disponibles para procesar objetos que describen secuencias temporales de observaciones.

Es obvio que el concepto de conjuntos difusos enriquece las ideas básicas del reconocimiento de patrones y le da crecimiento para complementar nuevos conceptos. Las razones principales para las aplicaciones de la teoría de los conjuntos difusos en reconocimiento de patrones se pueden resumir así:

Los conjuntos difusos establecen una interfase entre las características formuladas lingüísticamente y las medidas cuantitativas. Las características son representadas como un arreglo de funciones de membresía determinadas por el grado de posición de ciertas propiedades. El diseño de clasificadores en tal forma es orientado lógicamente y reflejan el nivel conceptual de los problemas de clasificación.

Las técnicas difusas mencionadas son particularmente disponibles para reconocimientos de patrones dinámicos cuando es necesario reconocer cambios temporales graduales en los estados del objeto.

Considerando la evolución temporal de los objetos es difícil asignar objetos a clases en forma fraccionaria y precisa. Se puede imaginar, por ejemplo un sistema con dos estados como clases: operaciones apropiadas o propiedades culpables. Cuando el estado del sistema esta cambiando los valores medidos, expresando que las operaciones del sistema no son las más apropiadas pero no se presenta error todavía en la operación.

Esto significa que el objeto observado no pertenece a cualquiera de esas clases o pertenece en menos grado a las dos clases. El uso de la teoría de los conjuntos difusos provee una posibilidad de producir regiones de decisión difusa entre clases y permite una membresía gradual (cambios temporales) de los objetos a la clase. Esta ventaja primaria de la teoría de conjuntos difusos es crucial para el reconocimiento de patrones en general para aproximaciones dinámicas en particular, teniendo en cuenta diferentes cambios de transición de los objetos entre clases y cambios intraclases.

## 2 Formulación Matemática y Modelamiento de Sistemas Dinámicos.

En ciencias, medicina, economía, teoría de control y en otras áreas un proceso o un sistema es llamada dinámico, si alguna de las variables es independiente del tiempo [Ströpler, 1980],[Rosember, 1986], el comportamiento del sistema demuestra como es su desempeño con respecto al tiempo.

El análisis en el dominio del tiempo y el diseño del sistema dinámico utiliza el concepto de estados de un sistema. La dinámica de un sistema es usualmente modelada mediante una ecuación diferencial. Estas ecuaciones son normalmente formuladas, basadas en leyes físicas describiendo el comportamiento del sistema.

Un sistema dinámico o proceso esta definido por variables de entradas  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$  que son utilizadas para influenciar el sistema y unas variables de salida, cuyo comportamiento dinámico es el más prioritario [Föllinger, Franke, 1982], en orden de obtener una sistema de ecuaciones diferenciales que representen las relaciones entre las variables de entrada y salida, las variables intermedias que reciben el nombre de variables de estado  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  son considerado. Un conjunto de variables  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  en cualquier tiempo  $t_0$  determina el estado del sistema en este tiempo. Si el estado actual del sistema y los valores de las variables de entrada para  $t \succ t_0$  están dadas, el comportamiento del sistema para  $t \succ t_0$  puede ser descrito claramente.

El espacio multidimensional inducido por las variables de estado reciben el nombre de espacio de estados. La solución de un sistema de ecuaciones diferenciales puede ser representada mediante un vector  $x(t)$ . Corresponde a un punto en le espacio de estados en un instante en el tiempo. Este punto se mueve en el espacio de estados como paso de tiempo. La traza, o camino de este punto en el espacio de estados es llamado una trayectoria del sistema. Para un estado inicial  $x_0 = x(t_0)$  y un estado final dado  $x_e = x(t_e)$  se presenta un número infinito de vectores de entrada y corresponden a trayectorias con los mismos puntos iniciales y finales. De otra forma, considerando cualquier punto en el espacio de estados hay exactamente una trayectoria que contiene ese punto.

### 3 Terminología del Reconocimiento de Patrones a Sistemas Dinámicos.

Considérese un sistema dinámico complejo que puede asumir diferentes estados al transcurrir el tiempo. Cada estado del sistema en un instante representa un objeto para clasificación. Un sistema dinámico es descrito mediante un conjunto de variables de estado que caracterizan su comportamiento dinámico. Si un sistema dinámico es observado en el tiempo, la variación de los valores característicos constituye funciones dependientes del tiempo. Sin embargo cada objeto es descrito no solo por un vector característico en el momento actual pero también por la historia de los valores característicos en la evolución del tiempo.

Los objetos reciben el nombre de dinámicos si ellos presentan mediciones u observaciones de un sistema dinámico que contiene historia de su evolución temporal. En otras palabras, cada objeto dinámico es una secuencia temporal de observaciones y es descrito mediante una función discreta en el tiempo. Esta función de dependencia en el tiempo recibe el nombre de trayectoria. En contraste con los objetos estáticos, los objetos dinámicos no son representados por puntos sino por trayectorias multidimensionales en el espacio característico ampliado por una dimensión adicional el tiempo.

Desde el punto de vista dinámico los estados de un objeto son caracterizados no solo por su localización instantánea, también por su histórico desarrollo temporal, la cual es representada mediante una traza o trayectoria de cada objeto desde el estado inicial hasta el estado actual en un espacio característico tridimensional. La figura 1.2 muestra las proyecciones de las trayectorias tridimensionales de objetos en un espacio característico bidimensionales (sin la dimensión del tiempo). Si la forma de trayectorias es seleccionada como un criterio de similaridad entre trayectorias, entonces tres clúster de objetos dinámicos pueden distinguirse  $\{A, C\}$ ,  $\{B, D, E, G\}$  y  $\{F, H\}$  ver figura 1 . Obviamente, estos clúster son diferentes si son reconocidos como objetos estáticos en los momentos actuales. Si la forma y la orientación de las trayectorias en el espacio característico son seleccionada como criterios de similaridad, entonces los objetos dinámicos  $B, D, E, G$  no pueden ser considerados similares y más bien ellos pueden ser separados en dos clúster  $\{B, D\}$  y  $\{E, G\}$ . Así que basado en este criterio de similaridad, serian cuatro clúster de trayectorias ha considerar.

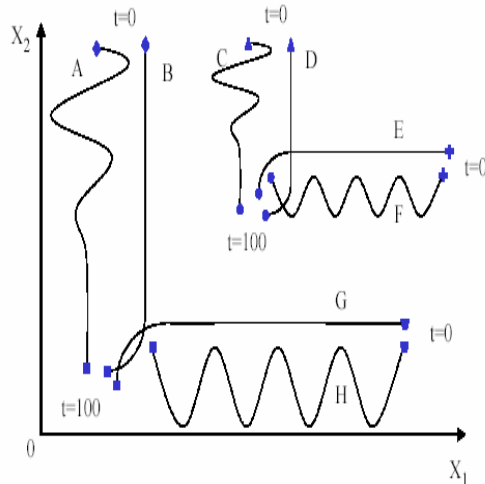


Figura 1. Proyección de trayectorias tridimensionales en un espacio característico bidimensional

En el tercer caso, si la forma y la orientación de las trayectorias son irrelevante pero su proximidad puntual, es base para la definición de similaridad entonces otros cuatro cluster pueden ser reconocidos  $\{A, B\}$ ,  $\{C, D\}$ ,  $\{E, F\}$ ,  $\{G, H\}$ .

En general existen dos posibilidades para tratar con objetos dinámicos en reconocimiento de patrones.

Preprocesar las trayectorias de los objetos dinámicos mediante la extracción de algunos valores característicos (características temporales, tendencias) que pueden representar componentes de vectores característicos convencionales y la modificación de métodos clásicos o desarrollar nuevos métodos que pueda procesar las trayectorias directamente.

En el primer caso, se requiere métodos para extracción de características de las trayectorias. El segundo caso es de principal interés porque concierne con una nueva área de investigación. Aunque muchos métodos de reconocimiento de patrones utilizan distancias o disimilaridades que son medidas para clasificar los objetos, La partición de las trayectorias requiere en reconocimiento de patrones una definición de medida de similaridad de las trayectorias. Sin embargo desde los dos puntos de vista, la similaridad de trayectorias puede distinguirse de todas estas posibles definiciones.

- **Similaridad estructural.** Dos trayectorias tiene más similaridad si tienen la mejor forma de emparejamiento con respecto a la evolución de las características.
- **Similaridad punto a punto.** Dos trayectorias tienen mayor similaridad, si la distancia puntual es la más pequeña en el espacio característico.

En el ejemplo de la Fig. 1.2 se ilustra la diferencia entre la similaridad estructural y la similaridad punto a punto. En términos de la similaridad estructural, especialmente si la forma de la trayectoria es relevante, tres clúster pueden ser reconocidos  $\{A, C\}$ ,  $\{B, D, E, G\}$  y  $\{F, H\}$ . En términos de la similaridad punto a punto, cuatro clúster  $\{A, B\}$ ,  $\{C, D\}$ ,  $\{E, F\}$ ,  $\{G, H\}$ , viéndose más natural.

Así que la definición de la medida de similaridad es un punto crucial en reconocimiento de patrones y es una tarea nada trivial en el caso de objetos dinámicos porque existe una fuerte dependencia en las aplicaciones manuales.

Debido a la llegada de nuevos objetos y a la descarga de datos irrelevantes, los siguiente cambios en la estructura de los clúster se pueden presentar [man, 1983]

**1.2.1 Formación de nuevos clúster.** Si los datos no pueden ser claramente asignados para la existencia de clúster. Uno o más nuevos clúster puede ser formados, ya sea consecutivamente (uno detrás de otros) y en paralelo (a partir del primer clúster, para varios clúster, diferentes) (ver figura 2).

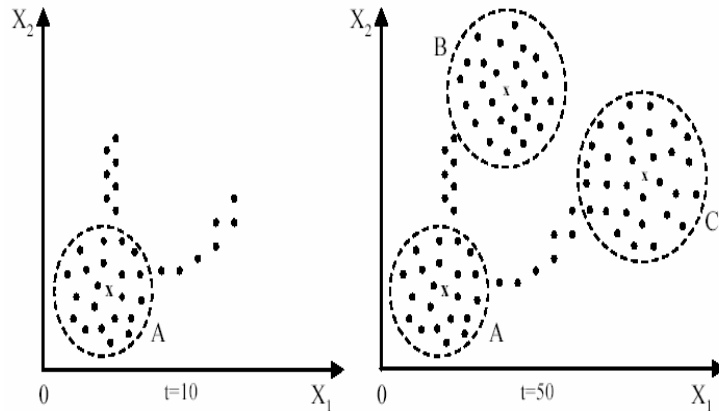


Figura 2. Formación de Nuevos Clusters

**1.2.2 Mezcla de clúster.** Dos o más clúster pueden ser mezclados en un clúster como se muestra en la Fig. 3 a) Si un gran número de nuevos datos tienen igualmente alto grado de membresía ( $> 0.5$ ) para dos clúster, por ejemplo, estos dos clúster no pueden ser considerados como más heterogéneos, en contraste son considerados como similares y pueden ser mezclados.

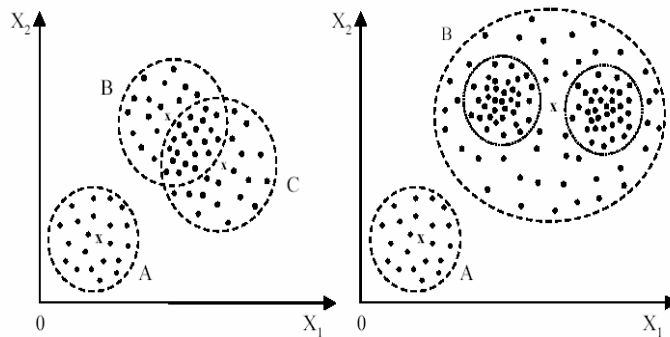


Figure 3. Cambios Estructurales dinámicos de los clústeres

**1.2.3 División de clúster.** Un clúster puede aparecer como dos o más clúster Ver Figura 3 b), si un gran número de nuevos datos ha sido absorbidos, grupos distintos, con alta densidad en un clúster pueden ser formados, mientras que el centro del clúster puede estar localizado en una área de baja densidad. Un clúster no puede ser considerado, como más homogéneo y puede ser dividido para encontrar la mejor partición.

**1.2.4 Destrucción del Clúster.** Uno o más cluster pueden desaparecer sino hay datos asignados a estos clúster y los datos viejos descargados. El centro del clúster puede ser guardado para preservar el conocimiento descubierto. Puede suceder que este clúster aparezca en el futuro. En este caso un clúster puede ser reconocido y rápidamente identificado, si el conocimiento de este clúster ya existe y no tiene que ser aprendido nuevamente.

**1.2.5 Derivaciones de los clusters.** La localización de los clusters (centro de clúster) en el espacio característico puede ser cambiada levemente en el tiempo.

Los primeros cuatro cambios estructurales representan abruptos cambios en la estructura del clúster. El quinto tipo de cambio estructural se refiere a un cambio gradual, que puede ser útil para predecir la ocurrencia de cambios abruptos. Son usualmente pequeños y difíciles de detectar, pero pueden llegar a ser de mayor relevancia en algunas aplicaciones.

#### 4 El Problema de Agrupamiento Dinámico.

El problema de clustering estático se utiliza como base para la formulación de un problema de clustering dinámico.

Considérese un conjunto de objetos dinámicos  $X(t) = \{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)\}, t = 1, \dots, t_p$  dado como una secuencia temporal de observaciones. El intervalo de tiempo de las observaciones puede ser generalmente ilimitado  $t \in [1, \infty)$ . Cada objeto es representado mediante una trayectoria M-dimensional en el espacio característico, que contiene la historia del desarrollo temporal de cada característica. Sin embargo supóngase que los objetos dinámicos son observados en instantes de tiempo discreto, una trayectoria puede estar dada como una función valorada de vector discreto de la forma:

$$X_j(t) = \{\mathbf{x}_j(t_1), \mathbf{x}_j(t_2), \dots, \mathbf{x}_j(t_p)\}, j = 1, \dots, N \quad (01)$$

Donde  $p$  es el número de observaciones en la trayectoria y  $X_j(t_k), k = 1, \dots, p$  es una observación de un vector característico en el instante  $t_k$ . Sustituyendo el vector característico M-dimensional dentro de las componentes de esta función, La representación matricial de una trayectoria de un sistema dinámico es de la forma:

$$X_j(t) = \begin{bmatrix} X_{j1}(t_1) & X_{j2}(t_1) & \dots & X_{jM}(t_1) \\ X_{j1}(t_2) & X_{j2}(t_2) & \dots & X_{jM}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{j1}(t_p) & X_{j2}(t_p) & X_{j1}(t_1) & X_{jM}(t_{p1}) \end{bmatrix} \quad (02)$$

Donde las columnas corresponden a trayectorias de características sencillas y las filas corresponden vectores característicos en instantes de tiempo. Una trayectoria puede explícitamente contener el tiempo como una característica adicional, así que las características sencillas son dependientes del tiempo y pueden ser llamadas series de tiempo. El conjunto de datos dinámicos  $X(t)$  puede ser visto como una matriz tridimensional cuyas dimensiones son objetos, características y tiempo. Ver Figura 4.

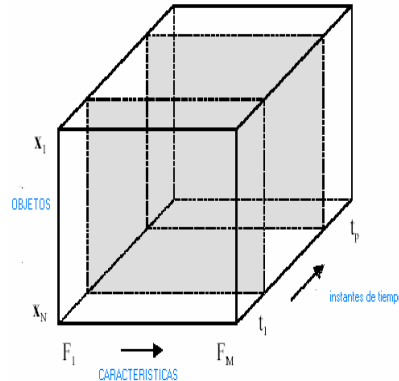


Figura 4. Representación del conjunto dinámico de datos como una matriz tridimensional

La tarea del clustering difuso es la de determinar el número de clústeres  $c(t)$ , la partición del conjunto de datos en  $c(t)$  clústeres y estimar el conjunto de clústeres prototipo  $V(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_{c(t)}(t)\}$  para aproximar la estructura de datos en el instante de tiempo  $t$ , tomando en cuenta la historia del desarrollo temporal del vector característico. Se tiene que hacer énfasis en que la matriz de partición difusa  $\mathbf{u}(t) = [u_{ij}(t)]$ , o bien como clústeres prototipos  $V(t)$ , involucra temporalmente como nuevas observaciones que llegan a hacerse disponibles.

El desarrollo temporal de los clústeres prototipo puede ser representado por el siguiente modelo.

$$V(t) = \alpha(t)\Gamma_1[V(t-1)] + (1-\alpha(t))\Gamma_2[V(t-1)], \alpha(t) \in [0,1] \quad (03)$$

Donde  $\Gamma_1$  es una transformación debido a los cambios abruptos en la estructura de los clústeres (formación, mezcla, división o destrucción de clústeres) y  $\Gamma_2$  es una transformación debido a los cambios temporales graduales en la estructura de los clústeres.

La transformación  $\Gamma_1$  consiste de dos transformaciones más, una transformación  $\Gamma_3$  que considera cambios en el número de clústeres y una transformación  $\Gamma_4$  que considera los cambios en la localización de los clústeres prototipo.

La transformación  $\Gamma_3$  se puede modelar mediante una función lineal de la forma:

$$\Gamma_3(t) = c(t-1) + \beta(t), \beta(t) \in I \quad (04)$$

La transformación  $\Gamma_2$  se obtiene a partir de una ecuación recursiva utilizada en el cálculo de los clústeres prototipos. Supóngase que los clústeres prototipo. Supóngase que el cluster prototipo  $V(t_k), k = 1, \dots, p$  esta determinado en cada instante del tiempo  $t_k$  de acuerdo a la ecuación representada por la relación:

$$V(t_k) = \frac{VN(t_k)}{VD(t_k)} \quad (05)$$

Donde  $VN(t_k)$  y  $VD(t_k)$  son componentes calculados con base a los objetos  $X(t), t = 1, \dots, t_k$  obtenido hasta el instante de tiempo  $t_k$ . Estos componentes se pueden calcular recursivamente para cada instante de tiempo  $t_k$  usando los valores de las componentes en los instantes de tiempo previos.

$$\begin{aligned} VN(t_k) &= VN(t_k - 1) + \delta(t_k), \\ VD(t_k) &= VD(t_k - 1) + \gamma(t_k) \end{aligned} \quad (06)$$

Donde  $VN(t_k - 1)$  y  $VD(t_k - 1)$  son componentes calculados con base a los objetos  $X(t), t = 1, \dots, t_k - 1$  obtenido hasta el instante de tiempo  $t_k - 1$ ,  $\delta(t_k)$  y  $\gamma(t_k)$  son parámetros vectores cuyos cálculos están basados en nuevas observaciones en el instante de tiempo  $t_k$  y formalizados así:  $X(t_k) = [x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_N(t_k)]$ , y el grado de membresía  $u_{ij}(t_k)$  de objetos  $x(t_k)$  en los clústeres, cuyas componentes están dadas mediante:

$$\begin{aligned}\delta_i(t_k) &= \sum_{j=1}^N u_{ij}(t_k)^m \mathbf{X}_j(t_k), \\ \gamma_i(t_k) &= \sum_{j=1}^N u_{ij}(t_k)^m, i = 1, \dots, c\end{aligned}\quad (07)$$

Así que la transformación  $\Gamma_2$  para el cálculo de los clústeres prototipos puede escribirse así:

$$\Gamma_2(V(t-1)) = \frac{VN(t-1) + \delta(t)}{VD(t-1) + \gamma(t)}, t = 1, \dots, t_p \quad (08)$$

La ley de adaptación para los clústeres prototipo consiste de una combinación de transformaciones  $\Gamma_2$  para el caso de cambios graduales en la estructura de los clústeres, con número de técnicas heurísticas en el caso de cambios abruptos.

## 5 Clustering Basado en Relaciones de Equivalencia Difusa

Esta sección describe una técnica clustering en la cual los datos multivariados son usados para formar una matriz de relación de equivalencia difusa. Diferentes niveles  $\alpha$  de este conjunto difuso se producen en número diferentes de clústeres a partir de los datos originales. Dado un conjunto de datos  $\{(x_{11} \dots x_{1p}) \dots (x_{n1} \dots x_{np})\}$  con  $n$  muestras sobre un espacio  $p$ -dimensional de rasgos  $P$ , una matriz de relaciones de equivalencia difusa  $Q$  con dimensiones  $n \times n$  es determinada. Defínase  $M_k$  y  $m_k$  el valor máximo y mínimo respectivamente de  $x_{jk}$  para cada rasgo  $k$  en  $P$  como:

$$M_k = \frac{\max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} x_{jk}}{x_{jk}} \quad Y \quad m_k = \frac{\min_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} x_{jk}}{x_{jk}} \quad (09)$$

Definiendo el término  $i, j$  enésimo de la matriz  $Q$  como:

$$Q_{ij} = 1 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left( \left| \frac{x_{ik} - x_{jk}}{M_k - m_k} \right|^s \right)^{1/s} \quad (10)$$

Para formar la matriz relacional de compatibilidad difusa  $Q$ . Cada  $q_{ij}$  representa la composición de la relación  $Q$  de la forma  $Q \circ Q$ . La clausura  $T$ , de  $Q$  puede ser computada mediante el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned}& \text{Haga} \\ & T' = Q \\ & Q = T' \circ T' \\ & \text{hasta } Q(Q \neq T') \\ & T = T'\end{aligned}$$

Desde la matriz de clausura transitiva  $T$  con elementos  $t_{ij}$ , una colección de clústeres  $C$ , es formado para un grado de membresía específico  $\alpha$ . Sea  $C_k \in C$  tal que  $\forall i, j \in C_k, t_{ij} \geq \alpha$  forman una clase de equivalencia difusa. Se define un cluster de equivalencia difusa  $W_i$  mediante  $\{(x_{w1}, \dots, x_{wp}) \mid w \in C_i\}$ .

### 5.1 Conjuntos de Múltiples clusters.

Definamos el centroide del cluster  $W_i$  como:

$$a_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{j \in C_i} x_j \quad (11)$$

Donde  $|C_i|$  denota la cardinalidad del conjunto de clústeres  $C_i$ . Sea  $A_\alpha = \{a_1, \dots, a_m\}$  el conjunto de centroides de clusters difusos resultado de coleccionar datos durante un intervalo de tiempo,  $\Delta t_{k1}$  y  $B_\alpha = \{B_1, \dots, B_m\}$  un segundo conjunto de centroides de clusters difusos resultado de coleccionar datos durante un intervalo  $\Delta t_{k2}$  donde  $k2 > k1$  con máximos y mínimos acumulativos para cada rasgo  $\max_{A_k}, \max_{B_k}, \min_{A_k}, \min_{B_k}$  donde se obtienen los términos sin perdida de generalidad:

$$\max_{A_k} = \frac{\max_i \max_{j \in C_i} x_{jk}}{i} \quad \text{Y} \quad \min_{A_k} = \frac{\min_i \min_{j \in C_i} x_{jk}}{i}$$

los vectores de peso  $w_{A\alpha} = \{w_{a1}, \dots, w_{am}\}$  y  $w_{B\alpha} = \{w_{b1}, \dots, w_{bm}\}$  formalizados sin perdida de generalidad mediante  $W_{\alpha\alpha} = \{w_{ai} \mid w_{ai} = |C_i|\}$ .

Defínase el rango global como:  $r_k = \max(\max_{A_k}, \max_{B_k}) - \min(\min_{A_k}, \min_{B_k})$ , la matriz relacional difusa será de la forma:

$$Z_{ij} = 1 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left( \left| \frac{a_{jk} - b_{ik}}{r_k} \right|^s \right)^{1/s} \quad (12)$$

Donde  $p$  es la dimensión del espacio de rasgos y  $s = 1$  para la distancia de Hamming y  $s = 2$  para la distancia Euclidiana. Con las proyecciones  $\rho_i^A = \frac{\max_j z_{ij}}{i}$  y  $\rho_i^B = \frac{\max_j z_{ij}}{j}$

### 5.2 Conjunto de Mezcla de Clusters.

Usando la matriz de relación centroide  $Z$  y  $\rho_i^B$ , una nueva colección de clústeres  $N_{t+1}$  es construida con un umbral  $\beta$  que satisface  $\forall \rho_i^B > \beta, a_j$  es remplazado así:

$$\frac{w_{aj} a_j + w_{bi} b_i}{w_{aj} + w_{bi}} \Big|_{z_{ij} = \rho_i^B} \quad (13)$$

Donde en consecuencia  $w_{aj}$  es remplazado por  $w_{bi} + w_{aj}$ . Finalmente la forma:

$$N_{t+1} = \{b_i \mid \rho_i^B \leq \beta\} \cup A_\alpha \quad (14)$$

Para una nueva colección de clústeres representando series de tiempo  $\Delta t_{k1}$  y  $\Delta t_{k2}$ . Este método debe ser repetido para cada sucesivo intervalo de tiempo.

### 5.3 Medida de Similitud en el Cluster.

Sea  $A_\alpha$  el conjunto de clústeres formados mediante adición o mezcla de conjuntos de clústeres en un número de intervalos de tiempo. Sea  $B_\alpha$  el conjunto de clusters durante un nuevo intervalo de tiempo  $\Delta t_n$ . una matriz de relación difusa  $Z$  puede ser computada y la proyección  $\beta_i^B$ . La medida de similitud  $q$  es definida como el grado en la cual el conjunto de clústeres  $B_\alpha$  es similar al conjunto de clusters  $A_\alpha$  y formalizada así:

$$q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i^B \quad (15)$$

Ejemplos del uso de la medida de similaridad en sistemas dinámicos se dará en la siguiente sección:

## 6 Resultados Experimentales.

En la tabla a continuación se muestra el comportamiento de cuatro sistemas dinámicos, específicamente un sistema de primer orden con retroalimentación negativa, un sistema de primer orden con retroalimentación positiva, un sistema de primer orden con retroalimentación positiva y retroalimentación negativa y finalmente un sistema de segundo orden.

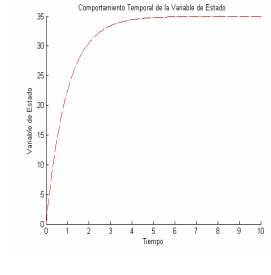
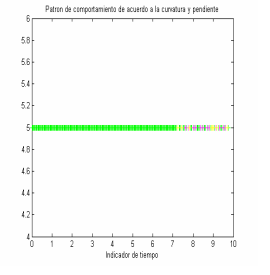
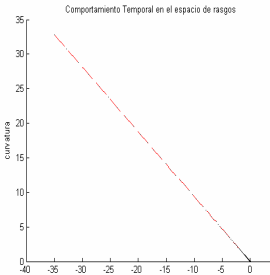
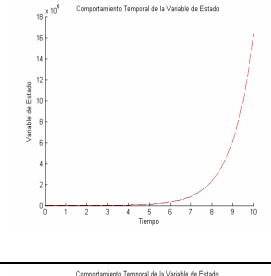
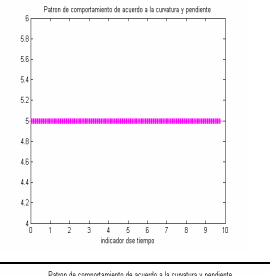
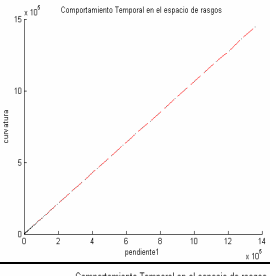
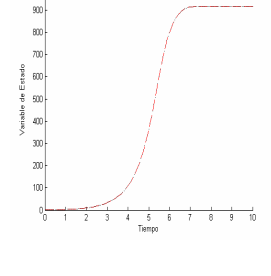
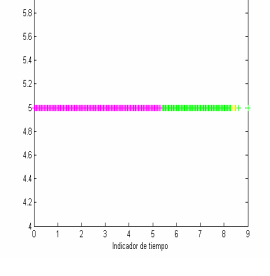
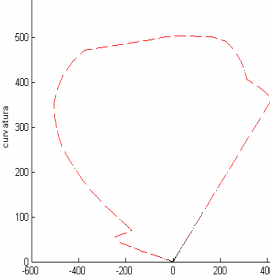
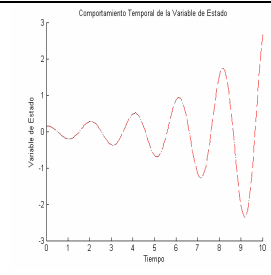
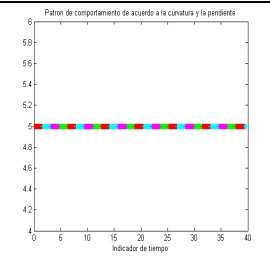
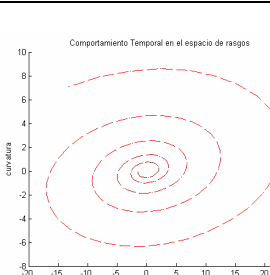
Sistemas Dinámicos	Variables de estado	Patrones de curvatura y pendiente	Espacio de Rasgos
Primer orden con retroalimentación negativa.			
Primer orden con retroalimentación positiva			
Sistema de primer orden con retroalimentación positiva y negativa (sigmoidal)			
Sistema oscilatorio			

Tabla No 1 Comportamiento de los diferentes sistemas dinámicos

En la tercera columna se ilustra patrones de comportamiento para cada uno de los sistemas con base a criterios de divergencia y convergencia de los dos rasgos más importantes como son la pendiente y la curvatura. . En la cuarta columna se ilustra los valores de estos rasgos en el llamado espacio de rasgos.

Sistemas Dinámicos	Dendograma para primer y segundo segmento	Dendograma para el tercer y cuarto segmento.	Dendograma resultante
Primer orden con retroalimentación negativa			
Primer orden con retroalimentación positiva			
Sistema de Primer Orden de crecimiento en S (sigmoidal)			
Sistema oscilatorio			

Tabla 2 Esquemas de clustering temporal basado en relaciones de equivalencia difusas

En la tabla No 2 se ilustra los resultados de clustering para cada uno de los segmentos especificados en la columna tercera de la tabla No 1 y en la columna final se ilustra el dendograma de la matriz de clausura resultante de la llegada de nuevos objetos, representados en los rasgos de los nuevos. Segmentos.

### **Reconocimientos**

Este artículo será expuesto en la XXXIII Conferencia Latinoamericana de Informática (CLEI) 2007 a celebrarse en San José de Costa Rica, 9-12 de octubre, agradecemos a la Universidad de Pamplona (Colombia) y la Universidad de los Andes (Venezuela) por sus políticas investigativas.

### **Conclusiones.**

En la ilustración de la tabla 1 columna 3, se puede observar que el comportamiento del sistema sigmoidal tiene un comportamiento transitorio formado por dos fases perfectamente diferenciable un crecimiento exponencial y crecimiento asintótico. Al aplicar el clustering basado en relaciones de equivalencia difusa se observa el agrupamiento de las dos fases y su resultado final al mezclar estos clústeres.

Para el caso del sistema oscilatorio (variable de posición en un péndulo con dos variables de estado) donde se ilustra que no solo tiene comportamientos exponenciales (color púrpura caracterizados por pendientes  $> 0$  y curvatura  $> 0$ ) o asintóticos (color verde pendientes  $> 0$  y curvatura  $< 0$ ) presenta dos nuevas fases una de color rojo (caracterizada por pendientes  $< 0$  y curvatura  $< 0$ ) y otra de color azul claro (caracterizada por pendientes  $< 0$  y curvatura  $> 0$ ) que tienen su esquema de clustering por segmento y resultante en la tabla 2. Este comportamiento de la variable posición en el sistema oscilatorio esta formado por dos fases con comportamientos y asintótico-exponencial. (Colores rojo, azul claro) y exponencial-asintótico (colores púrpura verde, rojo) en forma consecutiva.

### **Referencias**

- [1] Bakshi, B., R., Locher, G., Stephanopoulos, G., (1994), Analysis of operating data for Evaluation, diagnosis and control of Batch operation. Journal of process control, Vol 4, 1994, Butterworth-Heinemann, 179-194.
- [2] Das, G., Gunopulos, D., Manilla, H. (1997), Finding Similar Times Series. In: Komorowski, J., Zytkow, J. (Eds) Principles of Data Mining and Knowledge Discovery. Proceedings of the First European Symposium PKDD '97, Trondheim, Norway 1997, Springer, 1997 .pp 80-100.
- [3] Joentgen., Mikenina. Weber, R., Zimmerman, H.-J., (1998), Dynamic Fuzzy Data Analysis: Similarity between Trajectories. In: Bauer. (Ed.) Fuzzy Neuro System' 98, computational intelligence, Sankt, augusting, p 98-105.
- [4] Nemirko, A.P., Manilo, LA., Kalinichenko, A.N. (1995) Waveform Classification for Dynamic Analysis of ECG. Pattern recognition and Image, Analysis, Vol. 5 (1), 1995, p. 131-134
- [5] Pedrycz, W. (1990) Fuzzy Sets in Pattern Recognition: Methodology and Methods. Pattern Recognition, Vol. 23, 1990, p. 121-146
- [6] Pedrycz, W. (1990) Fuzzy Sets in Pattern Recognition: Accomplishments and Challenges. Fuzzy Sets and Systems, 90, 1997, p. 171-176
- [7] Ruger. (1989) Induktive Statistik, Einführung für wirtschafts –und Sozialwissenschaftler. R Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1989
- [9] Schreiber, T., Schmitz, A. (1997) Classification of Time Series Data with Nonlinear Similarity Measures. Physical Review Letters, Vol. 79 (8), 1997, p. 1475-1478
- [10] Setnes, M., Kaymak, U. (1998) Extended Fuzzy c-Means with Volume Prototypes and Cluster Merging. Proceedings of the 6th European Conference on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT'98), Aachen, Germany, September 7-10, 1998, p. 1360-1364
- [11] Taylor, C. Nakhaeizadeh, G., Lanquillon, C. (1997) Structural Change and Classification. In G. Nakhaeizadeh, I. Bruha, C. Taylor (Eds.) Workshop Notes on Dynamically Changing Domains: Theory Revision and Context Dependence Issues, 9th European Conference on Machine Learning (ECML'97), Prague, Czech Republic, p. 67-78