Tercera parte

El fichaje de un jugador con elevados niveles de incertidumbre

Aspectos preliminares

No nos cansaremos de insistir en la vital importancia que el acierto en la adquisición de los servicios de un jugador tiene para un club o sociedad deportiva. Y ello, no sólo desde la perspectiva puramente técnica sino también económica y financiera. Resultados en las competiciones y resultados económicos van muy ligados entre sí, aunque algunas veces de manera inversa, sobre todo a corto plazo.

Hemos estudiado profusamente[1] el problema de la selección óptima de un jugador y hasta ahora se ha conseguido establecer un orden de preferencia entre varios de ellos para ocupar una posición en el equipo, tomando como base la descripción del "perfil ideal" del mismo y de cada uno de los jugadores que a él postulan, mediante subconjuntos borrosos del referencial de las cualidades, características o singularidades exigidas. Con estos descriptores y a partir de las nociones de distancia o adecuación se ha podido llegar a resultados que consideramos satisfactorios. Pero sería poco ético detenernos aquí, cuando disponemos, hoy, de elementos teóricos y técnicos para enriquecer la gama de instrumentos ya elaborados con otros surgidos de la nueva teoría de la decisión para el tratamiento de la incertidumbre, sustentada por la matemática no numérica[2].

Nos proponemos, en esta parte de nuestro trabajo, desarrollar unos modelos que permitan optimizar el fichaje de un deportista, cuando las informaciones disponibles no permiten ni la medición ni la valuación de las magnitudes que se consideran significativos para su rendimiento técnico. Para ello será necesario recurrir a elementos de carácter subjetivo no numérico desviando, así, nuestra atención hacia el nuevo núcleo de conocimientos adscritos a la llamada teoría de la ordenación.

Establecimiento de una ordenación por pares

Hecho este breve preámbulo, vamos a proceder al desarrollo de nuestros esquemas empezando por identificar a cada jugador susceptible de ocupar una posición en el equipo (es decir a cada candidato) por una letra minúscula. De esta manera la agrupación de todos ellos formará un conjunto:

$$\{a, b, c, \ldots, m\}$$

Por otra parte, el interés de un Club en cubrir un puesto en el equipo viene dado por cuanto espera conseguir aquel deportista que posee, en grado más adecuado que otros, ciertas cualidades, características o singularidades, que pueden, también, reunirse en otro conjunto, expresadas mediante letras mayúsculas:

$$\{A, B, C, \ldots, N\}$$

Estas cualidades, características o singularidades, recordémoslo, pueden pertenecer a ámbitos distintos: psico-social, técnico, físico, ambiental, etc., y son susceptibles de variar de un club a otro, y lo hacen normalmente de una posición del equipo a otra (en el fútbol, guardameta, defensores, centrocampistas, … por ejemplo).

En este modelo no nos planteamos las hipótesis establecidas anteriormente, cuando se utilizaron como base de comparación la "distancia de Hamming" o el "coeficiente de adecuación", en las cuales se penaliza, en relación con los demás, tanto al jugador que no llega al nivel demandado como al que posee niveles superiores al exigido (distancia de Hamming) o bien se castiga no alcanzar el nivel deseado pero ni se premia ni se sanciona cuando sobrepasa el nivel considerado óptimo (coeficiente de adecuación). A partir de ahora, se van a establecer las comparaciones, para cada criterio, entre los deportistas, señalando cuál es preferido al otro o si existe equivalencia o indiferencia. De esta manera se resuelve automáticamente la cuestión planteada: cuando un jugador es mejor que otro, en una determinada cualidad, no importa si la posee en un grado superior o inferior, es simplemente mejor. Con ello basta. Pero continuemos con la descripción de los modelos propuestos.

Una vez que se dispone de deportistas por una parte y de "criterios" (cualidades, características o singularidades) por otra parte, se puede iniciar el proceso con el análisis, para cada criterio, de la valía relativa (en relación con los demás) de cada jugador.

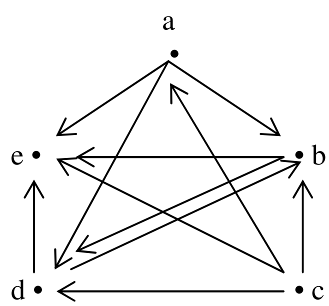
Veamos, para empezar, un ejemplo sencillo. Se dispone de 5 deportistas a, b, c, d, e para ocupar una posición en el equipo. Los responsables técnicos consideran significativos 6 criterios A, B, C, D, E, F.

Para <u>cada</u> criterio A, B, C, D, E, F, establecen una comparación entre jugadores, en el sentido de determinar si uno es mejor (posee un nivel más adecuado) o peor (tiene un nivel menos adecuado) que los demás. Es posible que dos deportistas sean igualmente adecuados en relación a un criterio.

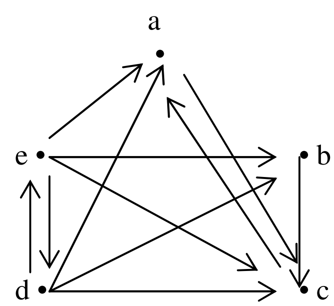
Con el objeto de visualizar mejor esta primera fase del modelo recurriremos a presentar estas preferencias mediante grafos sagitados. Para ello, uniremos los vértices (deportistas) por unos arcos de tal manera que, cuando un deportista sea superior a otro, el arco saldrá del mejor jugador y llegará al menos adecuado. Si dos deportistas son equivalentes (indiferentes) se trazaran dos arcos en sentido inverso, formando un circuito.

Nos hallamos, ahora, en disposición de elaborar los grafos relativos a cada criterio. A título de ilustración, y por tanto de manera arbitraria, supondremos que los responsables técnicos han proporcionado las informaciones a partir de las cuales se han elaborado los grafos siguientes:

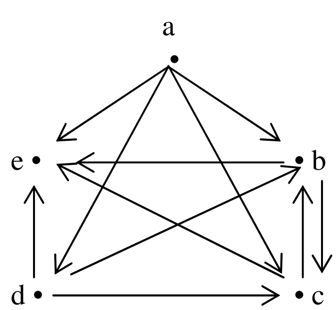
<u>Criterio A</u>



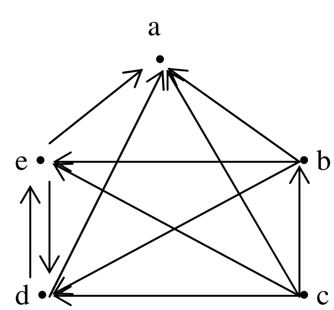
<u>Criterio B</u>



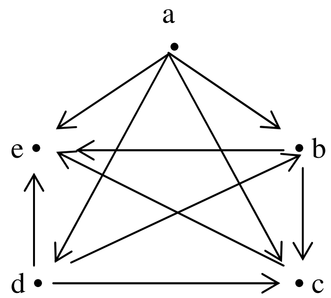
<u>Criterio C</u>



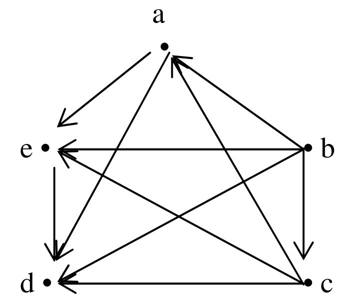
<u>Criterio D</u>



Criterio E



Criterio F



Estos seis grafos sagitados pueden ser representados en forma de matrices booleanas. Para ello basta con colocar un 1 en la casilla correspondiente al arco que une el vértice de partida (fila) y el vértice de llegada (columna). En nuestro caso, se tienen las matrices siguientes:

Criterio A

	a	b	c	d	e
a		1		1	1
b				1	1
c	1	1		1	1
d		1			1
e					

Criterio B

	a	b	c	d	e
a			1		
b			1		
c	1				
d	1	1	1		1
e	1	1	1	1	

Criterio C

	a	b	c	d	e
a		1	1	1	1
b			1		1
c		1			1
d		1	1		1
e					

Criterio D

	a	b	c	d	e
a					
b	1			1	1
c	1	1		1	1
d	1				1
e	1			1	

Criterio E

	a	B	c	d	e
a		1	1	1	1
b			1		1
c					1
d		1	1		1
e					

Criterio F

	a	b	c	d	e
a				1	1
b	1		1	1	1
c	1			1	1
d					
e				1	

En general, dado un conjunto de criterio A, B, …, N y un número de deportistas a, b, …, m se construirían N matrices booleanas, que pueden expresarse de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a & b & & m \\
\hline
a & x & \beta_a^{(b)} & \ldots & \beta_a^{(m)} \\
\hline
b & \beta_b^{(a)} & x & \ldots & \beta_b^{(m)} \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
m & \beta_m^{(a)} & \beta_m^{(b)} & \ldots & x \\
\hline
\end{array}
$$

$\beta_i^{(j)} \in \{0, 1\}$

$i, j = a, b, \ldots, m$

Se puede observar que en la diagonal principal hemos colocado una x en todas las casillas en lugar de poner $\beta^{(i)}_i = 0$, para indicar la falta de sentido lógico-operativo que tendría comparar para un mismo jugador, el nivel que posee de un criterio.

Estas matrices muestran el orden de preferencia de los jugadores tomados de dos en dos, para cada criterio de manera independiente. Es necesario, pues, realizar de alguna manera un proceso de agregación para conseguir un orden de preferencia global (teniendo en cuenta todos los criterios).

Ahora bien, parece razonable pensar que no todos los criterios tienen la misma importancia en una posición del equipo. También hay que tener en cuenta que el interés de un criterio cambia al considerar posiciones diferentes (parece claro el ejemplo de un defensor o un atacante, en el fútbol).

Con objeto de incorporar en el estudio este importante aspecto de nuestro planteamiento, sugerimos solicitar a los responsables técnicos del club que valúen en el intervalo [0, 1] la importancia de cada criterio, de manera que asignen valores más cercanos a la unidad cuanto más relevante sea el criterio. Supongamos que, en nuestro caso, los "expertos" han dado las valuaciones siguientes:

$$w_A = 0.7 \ , w_B = 1 \ , w_C = 0.3 \ , w_D = 0.6 \ , w_E = 0.9 \ , w_F = 0.5$$

Para una mayor comodidad en los cálculos vamos a reconvertir estos pesos realizando una ponderación convexa. Para ello se hallará la suma de las w_k , k = A, B, …, que constituirá el denominador de unos cocientes v_k, cuyos numeradores será las propias valuaciones en [0, 1]. En un caso general, es:

$$v_k = \frac{w_k}{\sum_{k=A}^{N} w_k} \quad , \ k = A, B, \ldots, N$$

De esta manera la suma de las v_k proporcionará la unidad.

Veámoslo en nuestro ejemplo:

$$\sum_{k=A}^{F} w_k = 4$$

por lo que:

$$v_A = \frac{0.7}{4} = 0.175 \ , \ v_B = \frac{1}{4} = 0.250 \ , \ v_C = \frac{0.3}{4} = 0.075$$

$$v_D = \frac{0.6}{4} = 0.150 \ , \ v_E = \frac{0.9}{4} = 0.225 \ , \ v_F = \frac{0.5}{4} = 0.125$$

Si se aceptan los valores v_k, k = A, B, …, F como niveles de importancia de cada uno de los criterios, basta con multiplicar cada una de las matrices por estos valores, resultando entonces que los 1 de las casillas de cada matriz serán sustituidos por las correspondientes v_k. En efecto:

Criterio A

$$0.175 \cdot \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & D & e \\ \hline a & & 1 & & 1 & 1 \\ \hline b & & & & 1 & 1 \\ \hline c & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \hline d & & 1 & & & 1 \\ \hline e & & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & & .175 & & .175 & .175 \\ \hline b & & & & .175 & .175 \\ \hline c & .175 & .175 & & .175 & .175 \\ \hline d & & .175 & & & .175 \\ \hline e & & & & & \\ \hline \end{array}$$

…………………………………………………………..

Criterio F

$$
0.125\,.\;\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & a & b & c & D & e \\
\hline
a & & & & 1 & 1 \\
\hline
b & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
c & 1 & & & 1 & 1 \\
\hline
d & & & & & \\
\hline
e & & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
a & & & & .125 & .125 \\
\hline
b & .125 & & .125 & .125 & .125 \\
\hline
c & .125 & & & .125 & .125 \\
\hline
d & & & & & \\
\hline
e & & & & .125 & \\
\hline
\end{array}
$$

Y, en general:

$$
v_k\,.\;\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a & b & & m \\
\hline
a & x & \beta_a^{(b)} & \ldots & \beta_a^{(m)} \\
\hline
b & \beta_b^{(a)} & x & \ldots & \beta_b^{(m)} \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
m & \beta_m^{(a)} & \beta_m^{(b)} & \ldots & x \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & A & b & & m \\
\hline
a & X & \int_a^{(b)}(k) & \ldots & \int_a^{(m)}(k) \\
\hline
b & \int_b^{(a)}(k) & x & \ldots & \int_b^{(m)}(k) \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
m & \int_m^{(a)}(k) & \int_m^{(b)}(k) & \ldots & x \\
\hline
\end{array}
$$

$\beta_i^{(j)} \in \{0,1\}$

$\int_i^{(j)}(k) = v_k \,.\, \beta_i^{(j)}$

$i, j = a, b, \ldots, m$

$k = A, B, \ldots, N$

La agregación de los criterios puede ser realizada, por ejemplo, mediante la suma aritmética de estas matrices, representativas de cada criterio. Es, en nuestro caso:

	a	b	c	d	E
a	x	.475	.550	.600	.600
b	.275	x	.675	.450	.750
c	.700	.400	x	.450	.750
d	.400	.725	.550	x	.875
e	.400	.250	.250	.525	X

y, en general:

$$
[S] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & A & b & & M \\
\hline
a & X & \sigma_a^{(b)}(k) & \ldots & \sigma_a^{(m)}(k) \\
\hline
b & \sigma_b^{(a)}(k) & x & \ldots & \sigma_b^{(m)}(k) \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
m & \sigma_m^{(a)}(k) & \sigma_m^{(b)}(k) & \ldots & X \\
\hline
\end{array}
$$

$$\sigma_i^{(j)}(k) = \sum_{k=A}^{N} \int_i^{(j)}(k)$$

$i, j = a, b, \ldots, m$

$k = A, B, \ldots, N$

Los valores que toma $\sigma_i^{(j)}$ (k) representan el nivel de preferencia de cada jugador i en relación al jugador j. Así, pues, la obtención de la relación borrosa [S] permite una ordenación de deportistas, aunque sólo de dos en dos. En nuestro supuesto práctico se puede observar, por ejemplo, que el jugador c es preferible al a, dado que el nivel de preferencia de c sobre a es 0.700 mientras que el de a sobre c es de 0.550. Pero también es cierto que a es preferible a d, y que d lo es a c. Se produce, así, un circuito que incapacita la ordenación. Esta situación no es un caso excepcional sino que sucede con frecuencia, sobre todo cuando los deportistas candidatos son superiores en ciertos criterios y, sin embargo, son inferiores en otros.

En este planteamiento, consideramos poco representativo aceptar valores de las $\sigma_i^{(j)}$ (k) cercanos al 0.5 (tanto por exceso como por defecto), por tratarse de un contexto de incertidumbre tan importante que no permite siquiera la asignación numérica subjetiva de los niveles individuales que se poseen de cada característica por parte de los deportistas. Es por ello que proponemos considerar únicamente aquellos niveles "significativamente" elevados. En el ejemplo que desarrollamos se podrían adoptar valores iguales o superiores a 0.6. Esto equivale a convertir la relación borrosa [S] en una relación booleana [$S_{\alpha\geq 0.6}$].

Quienes se hallan familiarizados en las técnicas habitualmente empleadas en el estudio de la incertidumbre habrán adivinado que nuestra propuesta no es otra que la del estudio de la relación borrosa [S] mediante α-cortes.

Establecimiento de grupos de deportistas equivalentes o indiferentes

Vamos a tomar, pues, como punto de partida la relación borrosa [S] y obtener a partir de los α-cortes las matrices booleanas [$S_{0.6}$], [$S_{0.675}$], [$S_{0.7}$], … con objeto de establecer el orden existente para cada uno de estos niveles.

Se tienen, sucesivamente:

$$[S_{0.6}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & x & & & 1 & 1 \\ \hline b & & x & 1 & & 1 \\ \hline c & 1 & & x & & 1 \\ \hline d & & 1 & & x & 1 \\ \hline e & & & & & x \\ \hline \end{array} \quad , \quad [S_{0.675}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & D & e \\ \hline a & x & & & & \\ \hline b & & x & 1 & & 1 \\ \hline c & 1 & & x & & 1 \\ \hline d & & 1 & & X & 1 \\ \hline e & & & & & x \\ \hline \end{array} \quad , \quad [S_{0.7}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & x & & & & \\ \hline b & & x & & & 1 \\ \hline c & 1 & & x & & 1 \\ \hline d & & 1 & & x & 1 \\ \hline e & & & & & x \\ \hline \end{array}$$

El estudio del orden existente en más de un nivel permite conocer la "sensibilidad" de la preferencia. En efecto, si la ordenación se va manteniendo cuando se varía el nivel α nos hallamos ante un orden poco sensible. Pero si éste cambia con los niveles de α próximos entre sí, su sensibilidad exige un análisis complementario o, en el mejor de los casos, permite una mayor flexibilidad a la hora de negociar las condiciones económicas con uno u otro de los deportistas que ocupan el lugar preferente en las distintas ordenaciones, al no existir un solo orden de elección.

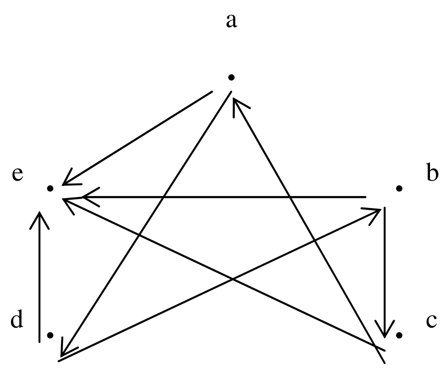
Después de esta reflexión vamos a pasar a la explotación de cada una de estas matrices booleanas. A estos efectos, conviene tener en cuenta que resulta frecuente el caso en el cual dos o más deportistas son equivalentes o indiferentes para ocupar la posición del equipo a cubrir. Es evidente, entonces, que no es factible la ordenación entre ellos. La posibilidad de que se de esta circunstancia aconseja la realización de un paso previo al proceso de ordenación cual es la reunión en un grupo de aquellos jugadores que son equivalentes o indiferentes. Cuando las relaciones por pares vienen representadas en forma matricial, estos grupos toman el nombre de "clases de equivalencia" y cuando la representación es sagitada (mediante grafos con arcos y vértices) se denominan "subgrafos fuertemente conexos". Pues bien, existe, entre otros, un algoritmo muy utilizado para obtener, sin error ni omisión, todas las clases de equivalencia (subgrafos fuertemente conexos).

Este algoritmo se sustenta en el concepto de "cierre transitivo" y "cierre transitivo inverso". Vamos a explicar el sentido de estas dos nociones en el caso que nos ocupa. Para ello escogemos arbitrariamente un jugador, por ejemplo el deportista a. El "cierre transitivo" de a recoge el subconjunto de jugadores formado por el propio deportista y por aquellos que son menos preferidos a él. Por otra parte, el "cierre transitivo inverso" de a reúne a este jugador y al conjunto de jugadores que son más preferidos a a. Si se hallan aquellos deportistas que a la vez son menos preferidos y más preferidos que a se tendrá el conjunto de jugadores "equivalentes" o "indiferentes" a a. Se forma, así, una llamada "clase de equivalencia" o "subgrafo fuertemente conexo".

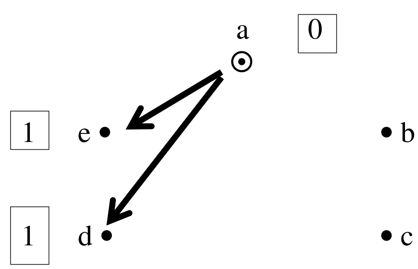
La obtención de "clases de equivalencia" o "subgrafos fuertemente conexos" puede ser realizada bien a partir de la forma matricial o bien tomando como base la forma sagitada.

Para una mejor visualización vamos a considerar, en primer lugar, un ejemplo bajo forma sagitada. Para ello partiremos de la matriz booleana de relaciones binarias [$S_{0.6}$] que será representada mediante un grafo con arcos y flechas.

$$
[S_{0.6}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
a & x & & & 1 & 1 \\
\hline
b & & x & 1 & & 1 \\
\hline
c & 1 & & x & & 1 \\
\hline
d & & 1 & & x & 1 \\
\hline
e & & & & & x \\
\hline
\end{array}
$$



Siguiendo con nuestro ejemplo vamos a escoger un jugador cualquiera, por ejemplo el a. Existen dos arcos que salen de a y van a desembocar en d y en e. Por tanto a es preferido a d y a e. Como a es el deportista escogido para la comparación le asignamos el número 0 (es el origen de un camino que iremos recorriendo). A los jugadores d y e les anotaremos el número 1 (para la comparación sólo hemos recorrido un camino, es decir una relación, un arco). Veamos la representación gráfica:

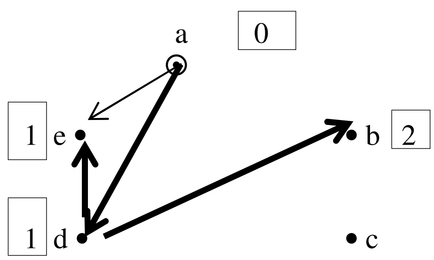


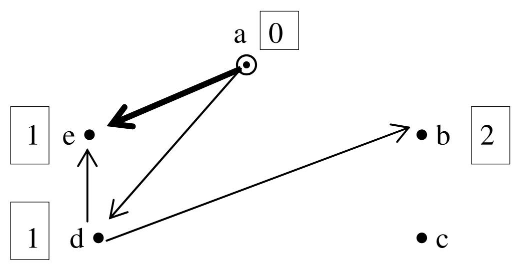
Del vértice (jugador) d salen dos arcos que van a b y a e. El deportista d es, pues, preferido tanto a b como a e.

Para conocer la preferencia de a sobre b es necesario pasar por d (es decir recorrer un camino de longitud 2, dos arcos). Se asigna un 2 al vértice (jugador) b. La preferencia de a sobre e es directa (ya le había sido asignado un 1) y, por tanto, es superflua la que pasa por d.

La relación de preferencia de a respecto a e no tiene continuación, ya que e no es preferido a ningún otro deportista (no sale arco alguno de e).

Vamos a representar todo ello en los dos grafos siguientes:

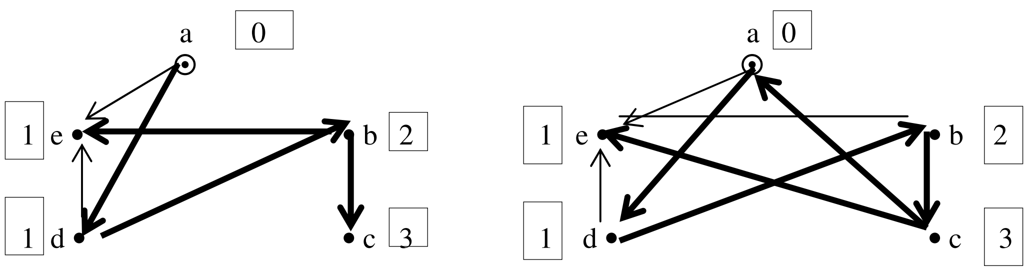




Del vértice (jugador) b parten dos arcos cuyo destino es c y e. El deportista b es preferido al c y al e.

Pero para conocer la preferencia de a sobre c, debemos tomar como jugadores "intermediarios" a d y a b, es decir, reconocer un camino de longitud 3. Este es el número que se asigna al vértice c.

La preferencia de a sobre e no tiene sentido a partir de este recorrido que pasa por d, b y c ya que es palpable de manera directa así como el retorno a a jugador objeto principal de la comparación. Procedemos, seguidamente, a la representación sagitada:

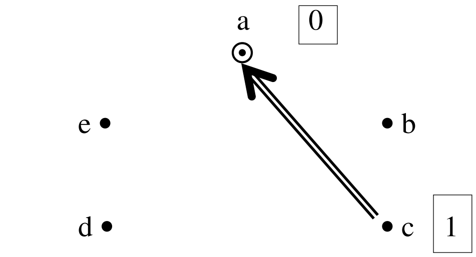


Ha finalizado, así, la primera parte del proceso. Se observa que, al poder llegar a todos los vértices siguiendo el sentido de los arcos, el jugador a es preferible a los demás deportistas: b, c, d, e. Por tanto, el "cierre transitivo" de a es:

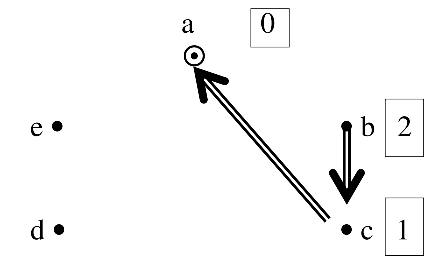
$$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a, b, c, d, e\}$$

Pasemos, seguidamente, a obtener el "cierre transitivo inverso", es decir el conjunto de jugadores preferidos a a. Para ello vamos a poner de manifiesto el o los arcos que llegan a a.

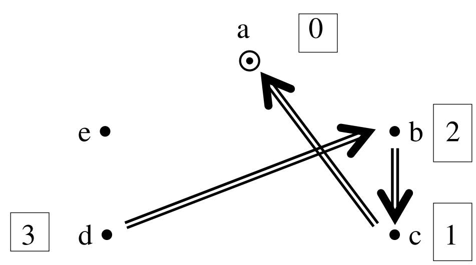
Se observa que, en nuestro caso, sólo hay uno procedente de c. A este vértice le asignaremos el número 1. Así, pues, el jugador c es preferido al a. Veámoslo:



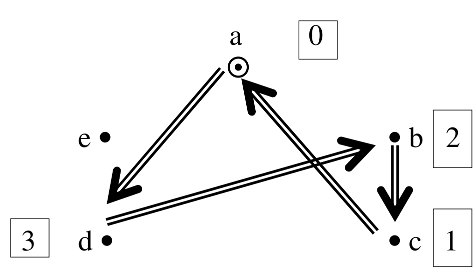
Al vértice (jugador) c le llega un arco procedente de b, lo que indica que el deportista b es preferido al c. Dado que para ir desde b hasta a (jugador elegido para la comparación) es necesario recorrer dos arcos, le asignaremos a b la cota 2. Veámoslo gráficamente.



Continuamos con el proceso buscando el o los arcos que desembocan en b. Uno solo existe en nuestro ejemplo, procedente de d, lo cual indica que d es preferido a b. Al precisar tres arcos para ir desde d hasta a se anota una cota igual a 3 al vértice d. Se tiene:



Finalmente, al mirar el grafo se observa que, en el caso estudiado, sólo hay un arco que termina en d y éste procede de a, que es el vértice tomado arbitrariamente como origen. Al tener asignada una cota (en el ejemplo de 0) no debe asignársele valor alguno. Pasamos a su representación gráfica:



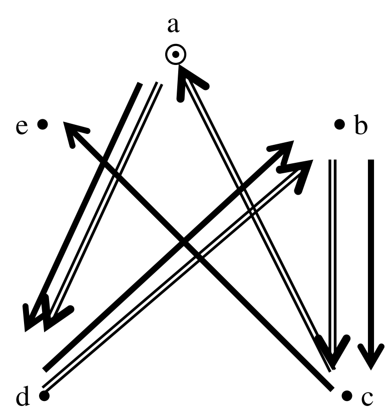
Como a a sólo le llega un arco procedente de c que ya posee cota (un 1) el proceso queda agotado. Se ha llegado, así, a la obtención del cierre transitivo inverso (conjunto formado por los vértices con cota). Se escribe:

$$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d\}$$

Se ha obtenido el cierre transitivo de a, $\hat{\Gamma}\{a\}$ y el cierre transitivo inverso de a, $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$ que indican los jugadores menos y más preferidos, respectivamente, que a. Pues bien, si unos mismos deportistas son a la vez menos preferidos y más preferidos a a, se considera que son equivalentes o indiferentes entre sí (incluyendo evidentemente al jugador a). Conocido es que la intersección y se puede representar por el operador de intersección $\cap$. Así, pues, la intersección de $\hat{\Gamma}\{a\}$ y $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$ proporcionará los deportistas equivalentes o indiferentes a a:

$$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d, \} = \{a, b, c, d, \}$$

Esto se puede resumir en un gráfico. Los jugadores equivalentes o indiferentes entre sí vienen dados por aquellos vértices a los que llegan “y” salen vértices. Se comprueba seguidamente el cumplimiento de este requisito en los deportistas a, b, c, d:



Habida cuenta de la equivalencia o indiferencia entre los jugadores a, b, c, d, se apartan del proceso, así como también dejan de considerarse las relaciones (de preferencia o no preferencia) de éstos con los demás deportistas. Ello se refleja en el grafo quitando los respectivos vértices a, b, c, d así como los arcos que salen de ellos y entran en ellos.

Con los vértices y arcos restantes se reinicia el proceso eligiendo, también de manera arbitraria, un vértice cualquiera. En nuestro caso, dado que únicamente queda el vértice (jugador) e, resulta que este vértice forma, únicamente él solo, una nueva clase de equivalencia.

En definitiva, pues, a partir de las relaciones booleanas establecidas en esta ocasión, existen dos clases de equivalencia, la formada por {a, b, c, d,} y la constituida por {e}. Procederá, en una segunda fase, ordenar estas clases.

Este mismo algoritmo puede ser desarrollado a partir de la forma matricial, es decir, representando las relaciones de preferencia entre deportistas tomados dos a dos mediante una matriz. Los pasos a seguir son los siguientes[3]:

1. Se parte de una matriz booleana que relaciona a los deportistas considerados dos a dos. En nuestro caso de la matriz $[S_\alpha]$.
2. Escogemos arbitrariamente un deportista cualquiera i y se obtiene su cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{i\}$ y su cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{i\}$.
3. Se realiza la intersección $\hat{\Gamma}\{i\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{i\}$ hallándose como resultado el conjunto de deportistas (vértices del grafo) que junto con el deportista (vértice) escogido i forman una clase de equivalencia (subgrafo fuertemente conexo).
4. Se eliminan de la matriz booleana que relaciona deportistas por pares, las filas y columnas correspondientes a la clase ya obtenida (vértices del subgrafo fuertemente conexo hallado). Se obtiene una matriz de orden inferior.
5. De esta matriz de orden inferior se escoge, de nuevo arbitrariamente, un (jugador) j, obteniendo su cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{j\}$ y su cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{j\}$.
6. Se continuará el proceso a partir del punto 3 y así sucesivamente hasta el agotamiento de la matriz.
7. Habremos obtenido, entonces, todas las clases de equivalencia (subgrafos fuertemente conexos), surgidos sin orden alguno, como consecuencia de la elección arbitraria de los deportistas.

Procedemos, seguidamente, al empleo de este algoritmo en una relación que expresa la preferencia de los jugadores considerados por pares.

1) Tomamos como ejemplo la matriz booleana $[S_{0.6}]$, que corresponde al grafo sagitado del que se ha partido en el anterior procedimiento visual.

$[S_{0.6}] =$

	a	b	c	d	e
a	x			1	1
b		x	1		1
c	1		x		1
d		1		x	1
e					x

2) Escogemos arbitrariamente un deportista, por ejemplo a tal como hemos hecho anteriormente y se halla el cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{a\}$ y el cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$. Para ello se coloca al lado de la matriz $[S_{0.6}]$ una columna que recogerá los elementos pertenecientes al cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{a\}$ y debajo una fila que comprenderá los elementos relativos al cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$.

	a	b	C	d	e	$\hat{\Gamma}\{a\}$
a	x			1	1	
b		x	1		1	
c	1		X		1	
d		1		x	1	
e					x	
$\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$						

En la columna $\hat{\Gamma}\{a\}$ se anota un 0 en la casilla a (jugador arbitrariamente escogido) y se mira en qué casillas de la fila a hay 1 (casillas d y e). Se anota en ellas el número 1.

Se busca en la fila d los 1 existentes en sus casillas. Los hay en la b y e. Se anotará en la b un 2 y nada en la e por existir ya un número (el 1) en ella. Pasamos a la fila e. Como no existen 1 hay que estudiar la fila b. En ella existen 1 en las casillas c y e. Se coloca un 3 en c. Analizamos la fila c. Existen 1 en las casillas a y e. Como en ellas ya hay números anotados, se cierra el proceso.

Se sigue el mismo camino para rellenar la fila $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$. Empezamos colocando un 0 en la casilla a. Como en la columna a hay un 1 en la casilla c se coloca un 1 en c. Como en la columna c hay un 1 en la casilla b se anota un 2 en b. Dado que en la columna b hay un 1 en la casilla d se coloca un 3 en d. Como en la columna d hay un 1 en la casilla a y en a ya existe un número (el 0) el proceso queda cerrado.

	a	B	c	d	e	$\hat{\Gamma}\{a\}$
a	x			1	1	0
b		X	1		1	2
c	1		x		1	3
d		1		x	1	1
e					x	1
$\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$	0	2	1	3		

El cierre transitivo de a, $\hat{\Gamma}\{a\}$ viene dado por el conjunto de casillas en las que hay un número. En nuestro caso:

$$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d, e\}$$

El cierre transitivo inverso de a, $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$ vendrá dado también por el conjunto de casillas en las que hay números anotados. Será:

$$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d\}$$

3) La intersección del cierre transitivo de a, $\hat{\Gamma}\{a\}$ y del cierre transitivo inverso de a, $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$, es:

$$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

4) Al eliminar las filas y columnas a, b, c, d sólo queda una matriz de 1 x 1, es decir, el elemento e.

En este caso, el algoritmo ha finalizado con el resultado de que los jugadores a, b, c, d son equivalentes o indiferentes, (si se quiere llamarlos así) y el único deportista diferenciable es e. De esta manera la ordenación en la preferencia sólo puede realizarse entre el grupo de jugadores {a, b, c, d} y el jugador {e}. El resultado coincide, así, con el obtenido al utilizar el procedimiento visual.

Creemos que no resulta demasiado útil la consideración de este nivel $\alpha \geq 0.6$ por cuanto la baja exigencia no separa suficientemente la “calidad” de los deportistas. Veamos lo que sucede cuando se sube el nivel hasta $\alpha \geq 0.675$. Utilizaremos, ahora, en primer lugar el algoritmo basado en la forma matricial.

Para ello vamos a recurrir a la matriz booleana $[S_{0.675}]$.

$$[S_{0.675}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e \\ \hline A & x & & & & \\ \hline B & & x & 1 & & 1 \\ \hline C & 1 & & x & & 1 \\ \hline D & & 1 & & x & 1 \\ \hline E & & & & & x \\ \hline \end{array}$$

La utilización del algoritmo va proporcionando, sucesivamente:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} & a & B & c & d & e & & \hat{\Gamma}\{a\} \\ \hline a & x & & & & & & 0 \\ \hline b & & X & 1 & & 1 & & \\ \hline c & 1 & & x & & 1 & & \\ \hline d & & 1 & & x & 1 & & \\ \hline e & & & & & x & & \\ \hline \hat{\Gamma}^{-}\{a\} & 0 & 2 & 1 & 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d\}$

$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a\}$

Así, pues, el jugador a formará, él sólo, una clase de equivalencia.

Continuamos con el algoritmo eliminando la fila y columna a. Se tiene la siguiente matriz, a la que colocamos una columna y una fila para hallar el nuevo cierre transitivo y cierre transitivo inverso de un jugador elegido arbitrariamente, por ejemplo el b.

	B	c	d	e	$\hat{\Gamma}\{b\}$
b	x	1		1	0
c		x		1	1
d	1		x	1	
e				x	1
$\hat{\Gamma}^{-}\{b\}$	0		1		

$\hat{\Gamma}\{b\} = \{b, c, e\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, d\}$

$\hat{\Gamma}\{b\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, c, e\} \cap \{b, d\} = \{b\}$

Se pone en evidencia que el jugador b forma una clase de equivalencia.

Eliminamos la fila y columna b, y continuamos con el algoritmo eligiendo, arbitrariamente, el jugador c:

	C	d	e	$\hat{\Gamma}\{c\}$
c	X		1	0
d		x	1	
e			x	1
$\hat{\Gamma}^{-}\{c\}$	0			

$\hat{\Gamma}\{c\} = \{c, e\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{c\} = \{c\}$

$\hat{\Gamma}\{c\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{c\} = \{c, e\} \cap \{c\} = \{c\}$

También el jugador c forma, él sólo, una clase de equivalencia. Siguiendo con el algoritmo eliminamos la fila y la columna c. Escogemos, ahora, el jugador d. Resulta:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \hat{\Gamma}\{d\} \\
 & d & e & \\
d & x & 1 & 0 \\
e & & x & 1 \\
\hat{\Gamma}^{-}\{d\} & 0 & &
\end{array}
$$

$$\hat{\Gamma}\{d\} = \{d, e\}$$

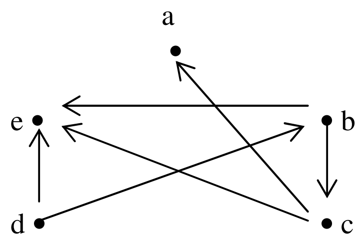
$$\hat{\Gamma}^{-}\{d\} = \{d\}$$

$$\hat{\Gamma}\{d\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{d\} = \{d, e\} \cap \{d\} = \{d\}$$

Al eliminar la fila y la columna d queda únicamente el elemento e, el cual forma, en sí mismo, una clase de equivalencia.

En resumen, se han hallado cinco clases de equivalencia formadas, cada una de ellas, por un solo elemento. Resulta, así, en este caso, que cuando se proceda a la ordenación de clases de equivalencia se ordenarán, automáticamente, elementos (deportistas). Se deduce, pues, que a este nivel $\alpha \geq 0.675$, no existen jugadores equivalentes o indiferentes.

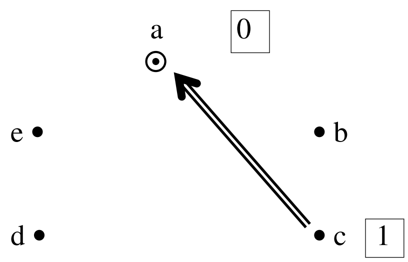
Veamos, a efectos de comprobación y de una manera rápida, el algoritmo visual. Para ello se debe expresar la matriz [$S_{0.675}$] en forma sagitada. Es la siguiente:



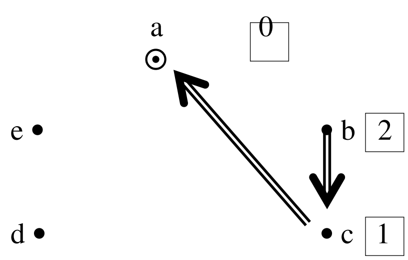
Empezamos escogiendo arbitrariamente un jugador, por ejemplo el a. Como no salen arcos del vértice a, esto indica que su cierre transitivo queda limitado a sí mismo:

$$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a\}$$

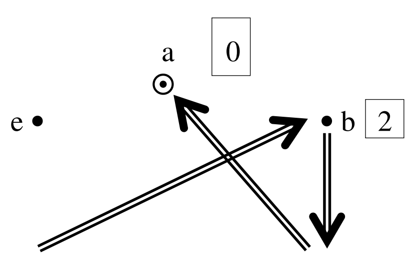
Seguidamente se van buscando los vértices antecesores de a, viendo los arcos que llegan. En nuestro caso, sólo uno es procedente de c. Así, pues, c es preferido a a. Se le asigna una cota igual a 1. Veámoslo de manera gráfica:



En c desemboca un único arco cuyo origen está en b. Entonces b es preferido a c, y su cota será 2. Gráficamente se tiene:



En b llega un arco procedente de d. Resulta, pues, que se prefiere d a b. La cota del vértice d será, ahora, igual a 3. De manera gráfica resulta:



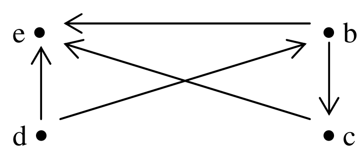
Como en d no llega arco alguno el proceso se detiene, y el cierre transitivo inverso (no hay más jugadores preferidos a a que b, c, d) es:

$$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d\}$$

Al no haber arco alguno que salga de a, aunque lleguen procedentes de b, c, d, no hay vértices que puedan “acompañar” a a como equivalentes o indiferentes (en nuestro caso los demás son preferidos). La clase de equivalencia se halla formada únicamente por el jugador a, sujeto, pues, a comparación con los demás.

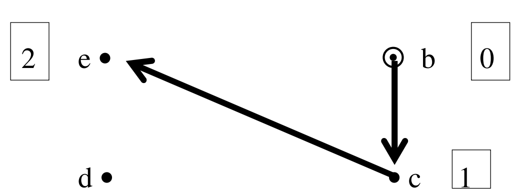
$$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a\}$$

Para continuar el proceso se elimina el vértice a y los arcos que de él salen y entran. En nuestro ejemplo sólo uno, el que procede de c:



Reiniciamos nuestro algoritmo escogiendo, de manera arbitraria, otro vértice (jugador), por ejemplo el b. Le asignamos la cota 0 y observamos los arcos que salen del vértice que lo representa. Uno solo en nuestro caso que llega a c. Vértice al que se asigna una cota 1. El jugador b es, pues, preferido a c:

Continuamos. De c sale un arco en dirección a e por lo que el deportista c es preferido al e. El valor a asignar a este vértice es 2:

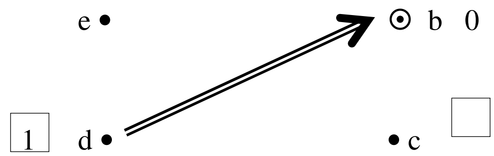


Al no partir arco alguno de e la obtención del cierre transitivo de b ha finalizado y se tiene:

$$\hat{\Gamma}\{b\} = \{b, c, e\}$$

constituido por los deportistas b y los menos preferidos a b, que son c, e.

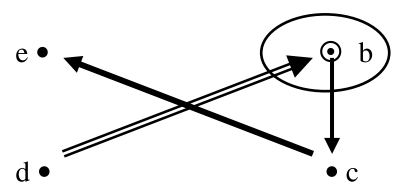
Pasemos a la obtención del cierre transitivo inverso de b y, por tanto, los jugadores b y aquellos que son preferidos a b. Para ello veremos los arcos que llegan a b, en nuestro caso uno solo procedente de d. Después de colocar un cero en b se anota un 1 en d:



Hay que especificar, ahora, los arcos que desembocan en d. Como en el ejemplo desarrollado no existe ninguno, queda cerrada la continuación del proceso y se concluye que el cierre transitivo inverso de b se halla formado por los vértices b, d:

$$\hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, d\}$$

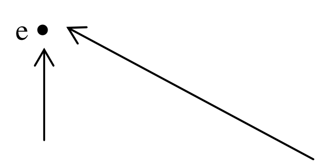
Veamos, ahora, qué jugadores son a la vez preferidos y no preferidos a b, es decir, equivalentes o indiferentes. Para ello basta observar los vértices en los que salen y entran arcos:



Como únicamente en b salen y llegan arcos se concluye que la clase de equivalencia en la cual se halla el deportista b no aparece ningún otro jugador y éste forma su propia clase de equivalencia. Entonces b, en solitario, deberá ser comparado con los otros deportistas. Resulta, así:

$$\hat{\Gamma}\{b\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, c, e\} \cap \{b, d\} = \{b\}$$

Eliminamos, ahora, el vértice b y los arcos que de él salen y entran. Nos queda:



d •   • c

Actuaríamos, ahora, de la misma manera, pero salta a la vista que el resto de vértices c, d, e forman cada uno de ellos por sí solos clases de equivalencia independientes. En efecto, en c sale un arco que va a parar a e (sin que de este vértice salga arco alguno) y no llega ninguno. Por tanto:

$$\hat{\Gamma}\{c\} = \{c, e\}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{c\} = \{c\}$$

$$\hat{\Gamma}\{c\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{c\} = \{c, e\} \cap \{c\} = \{c\}$$

También en d sale un arco con destino a e sin que de él salgan otros y no llega ninguno. De esta manera:

$$\hat{\Gamma}\{d\} = \{d, e\}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{d\} = \{d\}$$

$$\hat{\Gamma}\{d\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{d\} = \{d, e\} \cap \{d\} = \{d\}$$

En e sólo llegan arcos sin precedentes y no sale de este vértice arco alguno. Resulta:

$$\hat{\Gamma}\{e\} = \{e\}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{e\} = \{d, e\}$$

$$\hat{\Gamma}\{e\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{e\} = \{e\} \cap \{d, e\} = \{e\}$$

Se ha llegado, como no podía ser de otra manera, al mismo resultado que el hallado al sustentar el algoritmo en el grafo expresado en forma matricial: la comparación para establecer la preferencia entre los deportistas tendrá lugar de manera individualizada.

Estos dos desarrollos han permitido contrastar una afirmación frecuentemente escuchada: a medida que aumenta la exigencia de la separación entre los niveles de calidad de los deportistas (cuanto más lejos nos hallamos del valor $\alpha = 0.5$) más reducido es el número de jugadores que forman las clases de equivalencia (número de deportistas equivalentes o indiferentes). Ha bastado en nuestro caso pasar de $\alpha \geq 0.6$ a $\alpha \geq 0.675$ para reducir a una unidad una clase en la que había cuatro jugadores.

Para finalizar este análisis abordaremos el supuesto en el que se exige un nivel, $\alpha \geq 0.7$. Evitaremos alargar innecesariamente este estudio, utilizando únicamente el algoritmo basado en la forma matricial. La matriz de partida era:

$[S_{0.7}] =$

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x			1
c	1		x		1
d		1		x	1
e					x

Escogemos, por ejemplo, <u>a</u> y se halla el cierre transitivo y el cierre transitivo inverso:

	a	b	c	d	e	$\hat{\Gamma}\{a\}$
a	x					0
b		x			1	
c	1		x		1	
d		1		x	1	
e					x	
$\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$	0		1			

$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, c\}$

La intersección proporciona como único jugador perteneciente a esta clase de equivalencia el propio <u>a</u>:

$$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a\} \cap \{a, c\} = \{a\}$$

Eliminamos la fila y columna <u>a</u>. Resulta la siguiente matriz a partir de la cual hallamos el cierre transitivo y cierre transitivo inverso de otro elemento, por ejemplo el <u>b</u>:

	b	c	d	e	$\hat{\Gamma}\{b\}$
b	x			1	0
c		x		1	
d	1		x	1	
e				x	1

$$\hat{\Gamma}^{-}\{b\} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & & 1 & \\ \hline\end{array}$$

$\hat{\Gamma}\{b\} = \{b, e\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, d\}$

$\hat{\Gamma}\{b\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, e\} \cap \{b, d\} = \{b\}$

Se elimina la fila y columna b. De la nueva matriz se hallan los cierres transitivo y transitivo inverso, por ejemplo de c. Resulta:

$$\begin{array}{cccc c c} & c & d & e & & \hat{\Gamma}\{c\} \\ c & x & & 1 & & 0 \\ d & & x & 1 & & \\ e & & & x & & 1 \end{array}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{c\} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & & \\ \hline\end{array}$$

$\hat{\Gamma}\{c\} = \{c, e\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{c\} = \{c\}$

$\hat{\Gamma}\{c\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{c\} = \{c, e\} \cap \{c\} = \{c\}$

Continuamos, así, hasta el agotamiento de la matriz:

$$\begin{array}{ccc c c} & d & e & & \hat{\Gamma}\{d\} \\ d & x & 1 & & 0 \\ e & & x & & 1 \end{array}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{c\} \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \\ \hline\end{array}$$

$\hat{\Gamma}\{d\} = \{d, e\}$

$\hat{\Gamma}^{-}\{d\} = \{d\}$

$\hat{\Gamma}\{d\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{d\} = \{d, e\} \cap \{d\} = \{d\}$

Queda finalmente la casilla e x e:

$\hat{\Gamma}\{e\}$

$$\boxed{x} \qquad \boxed{0}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{e\}\ \boxed{0}$$

$$\hat{\Gamma}\{e\} = \{e\}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}\{e\} = \{e\}$$

$$\hat{\Gamma}\{e\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{e\} = \{e\} \cap \{e\} = \{e\}$$

El resultado obtenido nos lleva a la evidencia de que al elevar el nivel de exigencia en la diferenciación del grado del criterio que poseen los deportistas, el número de jugadores equivalentes o indiferentes (elementos que forman las clases de equivalencia) es más pequeño. Al llegar a un nivel α para el cual cada clase de equivalencia está formada por un solo deportista, la composición de cada clase se mantiene, ya que las clases de equivalencia no pueden ser vacías (siempre debe haber, por los menos, un jugador). Dejando aparte los aspectos teóricos, en la práctica una vez analizado el nivel $\alpha \geq 0.675$ resulta superfluo el estudio de los niveles de α superiores.

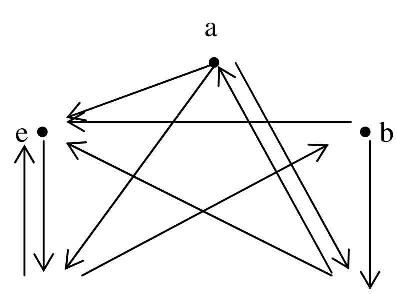
Por el contrario, a medida que se reduce el nivel de exigencias α, hay menos grupos de jugadores equivalentes o indiferentes, lo que lleva a decir que las clases de equivalencia se hallan formadas por un mayor número de elementos (deportistas).

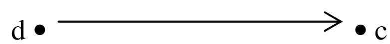
Para una rápida comprobación, basta con continuar con nuestro supuesto tomando, ahora, un nivel inferior, por ejemplo $\alpha \geq 0.525$. La matriz booleana es, entonces:

$[S_{0.525}]$ =

	a	b	c	d	e
a	x		1	1	1
b		x	1		1
c	1		x		1
d		1	1	x	1
e				1	x

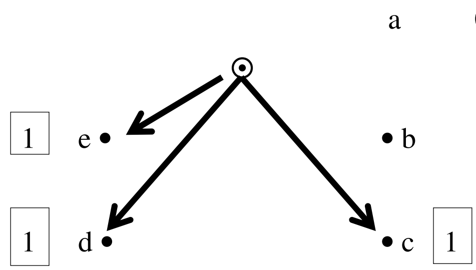
Para variar un poco vamos a utilizar el algoritmo basado en la presentación sagitada. Para ello se convierte la matriz $[S_{0.525}]$ en el siguiente grafo con vértices y arcos.



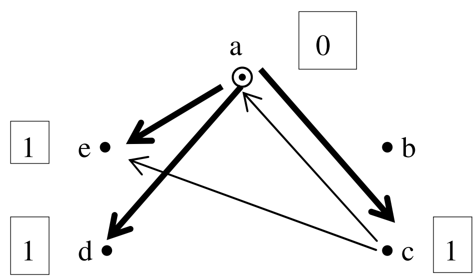


A continuación elegimos un deportista cualquiera (vértice), por ejemplo el a.

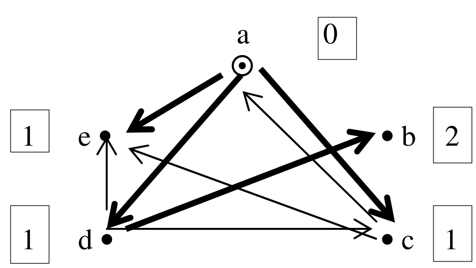
Se halla el cierre transitivo de a asignándole una cota 0 y considerando los arcos que salen de a. Aquellos vértices en los que éstos desembocan se les coloca un cota de valor 1.



Desde c salen arcos cuyo destino es a y e.



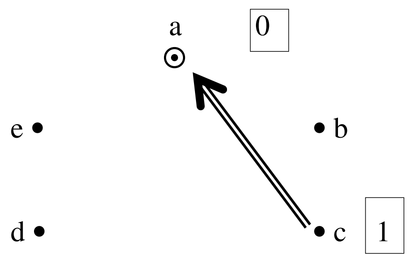
Pero como en tales vértices ya existe una cota, se pasa al vértice d, de donde parten arcos que desembocan en b, c, e. Se coloca la cota 2 en b, pero no se pueden asignar cotas a c y e por cuanto ya poseían una cada uno de estos vértices. El grafo queda así:



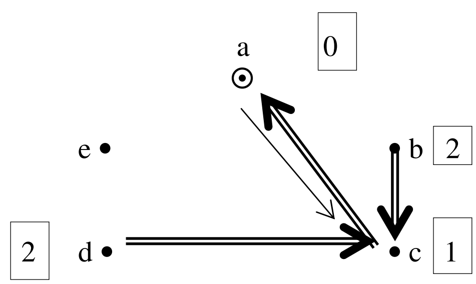
Aunque la mecánica del proceso podría continuar, nos detenemos aquí, habida cuenta de que todos los vértices del grafo poseen una cota. El cierre transitivo de a comprende, pues, todos los deportistas:

$$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a, b, c, d, e\}$$

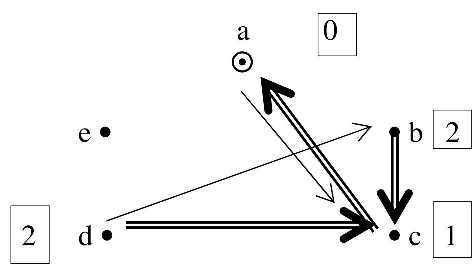
Pasemos al cierre transitivo inverso de a estudiando la llegada de los arcos. En nuestro ejemplo un solo arco procedente de c desemboca en a. Se coloca en a una cota cero y en c una cota de uno.



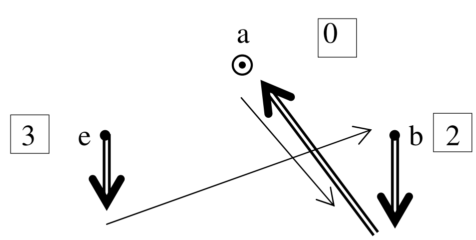
En c llegan arcos procedentes de a, b, d. Se coloca una cota de valor dos en b y en d pero no en a porque ya existía una en este vértice.



Estudiamos la llegada de arcos en b y en d. Empezamos por b. Sólo llega un arco desde d, pero como en d ya existe una cota no es posible colocar otra.



En d llegan arcos desde a y desde e. Como a ya posee una cota, únicamente hay que asignar una en e, con valor tres.

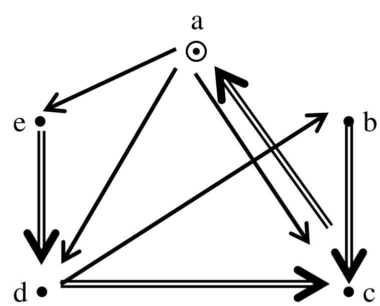


$$\boxed{2}\ d \bullet \Longrightarrow \bullet\ c\ \boxed{1}$$

Aunque procesalmente se podría continuar, nos detenemos al comprobar que cada vértice posee su cota. Aquí también el cierre transitivo inverso de <u>a</u> comprende la totalidad de los deportistas:

$$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a, b, c, d, e\}$$

Es obvio que de todos los vértices saldrán y llegarán arcos. A pesar de la obviedad vamos a realizar la correspondiente representación:



Se llega a la conclusión de que al formar una misma clase de equivalencia todos los deportistas son equivalentes o indiferentes y, a este nivel de exigencia, no es posible establecer un orden entre ellos.

Comprobamos que la intersección del cierre transitivo y cierre transitivo inverso proporcionan una clase de equivalencia con todos los jugadores. En efecto:

$$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$$

A la vista de cuanto acabamos de exponer, profusamente ilustrado con ejemplos, que creemos significativos, se puede deducir la existencia de tres casos perfectamente diferenciables:

1º) <u>Todas</u> las clases de equivalencia se hallan formadas por un solo elemento. En otras palabras, todos los deportistas son diferenciables de los demás y, por tanto, no existen dos jugadores equivalentes o indiferentes. Entonces, y sólo entonces, al ordenar clases de equivalencia se ordenan, automáticamente, elementos individuales (deportistas).

2º) Una, varias o todas las clases de equivalencia comprenden más de un elemento (jugador). En este supuesto existe un grupo, varios grupos o todos los grupos formados por dos o más deportistas equivalentes o indiferentes. Cuando esto sucede, al ordenar las clases de equivalencia se ordenan grupos de jugadores, alguno de los cuales puede comprender un solo deportista. Dentro de cada grupo (clase de equivalencia) los jugadores son considerados igual de buenos (o de malos).

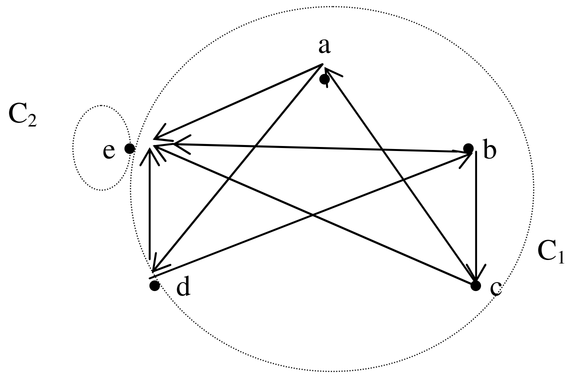
3º) Sólo existe una única clase de equivalencia que, evidentemente, reúne a todos los deportistas. Se estima, entonces, una equivalencia o indiferencia entre ellos, que los hace igualmente apreciados para ocupar el puesto del equipo a cubrir. Es entonces cuando no es posible la ordenación que, evidentemente, por otra parte no tendría sentido.

Para terminar este apartado, creemos necesario insistir en que, de manera primaria, deben ordenarse clases de equivalencia (grupos de jugadores equivalentes o indiferentes) aun cuando en algunos casos (el primero señalado anteriormente) al ordenar clases se ordenan también deportistas de manera individual.

Es en este sentido que los algoritmos expuestos sólo constituyen un paso previo, pero absolutamente necesario, al proceso de ordenación en sentido estricto.

Así, pues, tanto si se sigue un proceso basado en la forma matricial como en la forma sagitada, la matriz o el grafo sagitado deberán ser matriz o grafo sagitado de clases. Ahora bien, esto no comporta dificultad alguna, ya que a partir de las clases de equivalencia o subgrafos fuertemente conexos se obtiene de manera inmediata la matriz de clases o el grafo sagitado de clases. Veámoslo en el caso que nos ocupa, en primer lugar utilizando la forma sagitada.

Al considerar el nivel $\alpha \geq 0.6$ el grafo sagitado era el siguiente, en el que los vértices pertenecientes a un mismo subgrafo fuertemente conexo han sido rodeados de un círculo con trazo discontinuo.

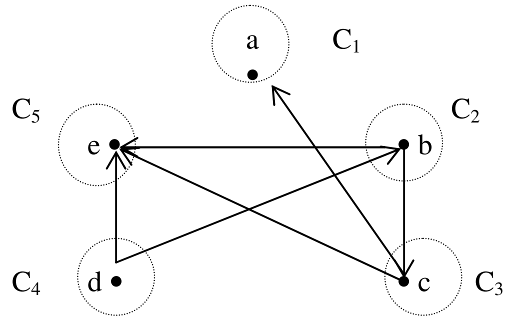


Hemos designado mediante C_1 la clase de equivalencia que agrupa los deportistas {a, b, c, d} y C_2 a la que comprende al jugador {e}. Pues bien, si se considera únicamente la existencia de las clases C_1 y C_2 con independencia de los jugadores, se puede formar un "grafo sagitado de clases" con sólo considerar que los distintos arcos que van de una clase a la otra forman un solo y único arco. En este caso, como existen únicamente dos clases y todos los arcos van unidireccionalmente de la clase C_1 a la otra C_2, sólo existirá un arco que unirá estas dos clases. Se tiene, así:

$$C_2 \longleftarrow C_1$$

La ordenación en este caso tan simple como superfluo, no precisa de estudio alguno ya que se observa, a simple vista, que el grupo de deportistas que forma la clase C_1 es preferido al deportista que forma la clase C_2, por el sentido del arco. Pero no siempre sucede así. Además, agrupar como equivalentes o indiferentes a cuatro de los cinco deportistas considerados ofrece un reducido margen de maniobra para la decisión de comprar los servicios de uno de ellos. Es por ello que hemos recurrido a aumentar el nivel de exigencia. En nuestro ejemplo, un leve incremento ha sido suficiente para conseguir una total separación ya que cada clase de equivalencia ha quedado formada por un solo deportista.

Reproducimos, a continuación, el grafo sagitado surgido al nivel $\alpha \geq 0.675$ en el que hemos identificado las respectivas clases de equivalencia C_1, C_2, C_3, C_4, C_5:



Aquí, como caso particular, los arcos del grafo sagitado de elementos coinciden con los arcos del grafo sagitado de clases. En este caso, sí creemos que el proceso de ordenación agradecerá la ayuda de un algoritmo.

Pero antes de introducirnos en este importante tema, veamos cómo a partir de las clases de equivalencia se puede formar una matriz de clases.

Empezamos con las clases formadas al nivel $\alpha \geq 0.6$ que son C_1 y C_2. La clase C_1 comprende los jugadores equivalentes o indiferentes {a, b, c, d} y la clase C_2 únicamente el deportista {e}. Pues bien, como norma general se reestructura la matriz de elementos colocando, tanto en filas como en columnas, uno después de otro, los elementos que forman una misma clase de equivalencia. Es decir que al leer los elementos siguiendo el orden de las filas y de las columnas, los elementos de una misma clase se hallan uno al lado del otro (en nuestro ejemplo esto ya sucede al estar en una misma clase a, b, c, d). Lo señalamos así en la correspondiente matriz:

$$
[S_{0.6}] = \begin{array}{cc|cccc|c|}
 & & \multicolumn{4}{c}{C_1} & \multicolumn{1}{c}{C_2} \\
 & & a & b & c & d & E \\
\hline
 & a & x & & & 1 & 1 \\
C_1 & b & & x & 1 & & 1 \\
 & c & 1 & & x & & 1 \\
 & d & & 1 & & x & 1 \\
\hline
C_2 & e & & & & & x \\
\hline
\end{array}
$$

Se observa que, con esta colocación, los elementos de cada clase de equivalencia forman una submatriz, y todas las submatrices forman una “diagonal principal de submatrices”. Pues bien, los 1 de dentro de cada submatriz corresponden a los arcos del grafo sagitado interiores al correspondiente subgrafo fuertemente conexo y los 1 que se hallan fuera de las submatrices de la diagonal principal se corresponden con los arcos que unen elementos pertenecientes a subgrafos fuertemente conexos distintos.

Establecida esta correspondencia entre las dos formas de representar relaciones vamos a construir la matriz de clases en este supuesto tan sencillo. Para ello se consideran como filas y columnas las clases de equivalencia C_1 y C_2. Las submatrices de la diagonal principal serán, ahora, las casillas de la diagonal de la matriz de clases y en ellas se colocará una x. Cuando, como en este ejemplo, hay algún 1 (basta uno sólo) en las casillas exteriores a las submatrices de la diagonal principal, se mira a qué "grupo" de filas y "grupo" de columnas pertenecen. Para cada relación de grupos se asigna un solo número.

En nuestro caso existen unos en la relación entre C_1 y C_2 (última columna) pero no entre C_2 y C_1 (última fila). Por ello se coloca un 1 en la casilla C_1 C_2 y no se coloca en la C_2 C_1. Se obtiene la siguiente matriz de clases:

	C_1	C_2
C_1	x	1
C_2		x

En el otro supuesto, cuando el nivel de exigencia era $\alpha \geq 0.675$, al coincidir las clases de equivalencia con los elementos individualizados (deportistas), la matriz de clases coincide con la de los jugadores. La reproducimos, seguidamente, sustituyendo, en la nomenclatura, los símbolos de los deportistas {a, b, c, d, e} por los de las clases {C_1, C_2, C_3, C_4, C_5}:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	x				
C_2		x	1		1
C_3	1		x		1
C_4		1		x	1
C_5					X

Cuando se dispone de una “matriz de clases” o su correspondiente “grafo sagitado de clases” es posible iniciar el proceso de ordenación de las clases. No nos importa insistir en el hecho de que lo que se ordena son las clases, es decir los grupos de deportistas considerados equivalentes o indiferentes. Si, como sucede en este último supuesto, todos y cada uno de los grupos se hayan formados por un solo jugador, el orden de clases es también el orden de los jugadores considerados individualmente.

Para la obtención de un orden de clases de equivalencia o subgrafos fuertemente conexos, se dispone de ciertos algoritmos, algunos de los cuales van a ser utilizados a continuación.

Orden de prelación entre grupos de jugadores

Una vez establecidos, pues, los grupos de deportistas equivalentes o indiferentes, representados formalmente mediante clases de equivalencia o subgrafos fuertemente conexos, procede emprender la tarea de establecer un orden de preferencia entre estos grupos. Para ello las matemáticas de la incertidumbre disponen de suficientes recursos técnicos para dar cumplida respuesta a este planteamiento.

En esta ocasión hemos elegido para este objetivo unos algoritmos basados en el conocido concepto de “función ordinal de un grafo”. Para hallar la función ordinal basta descomponer un grafo de clases, expresado en forma matricial o sagitada, en niveles de preferencia, que designaremos por N_0, N_1, N_2, …, N_r de tal manera que cuando una clase de equivalencia o subgrafo fuertemente conexo, C_i, es preferido a otro, C_j, en ningún caso C_i se halla a un nivel anterior a C_j.

Para representar formalmente esta noción, vamos a expresar el grafo de clases a través del conjunto de clases de equivalencia o subgrafos fuertemente conexos siguiente:

$$C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$$

Por otra parte, se expresa mediante Γ el conjunto de relaciones entre clases de equivalencia (unos de la matriz de clases) o relaciones entre subgrafos fuertemente conexos (arcos del grafo sagitado).

Así, pues, un grafo de clases de equivalencia o grafo de subgrafos fuertemente conexos G, (en el cual no existen, por definición, circuitos) quedará definido por:

$$G = (C, \Gamma)$$

Para todo $G = (C, \Gamma)$ se pueden hallar sus niveles, $N_0, N_1, \ldots, N_r$ de la siguiente manera[4]:

$$N_0 = \{C_i / \Gamma^{-1} \{C_i\} = \varnothing\}$$
$$N_1 = \{C_i / (\Gamma^{-1} \{C_i\} \subset N_0) - N_0\}$$
$$N_2 = \{C_i / (\Gamma^{-1} \{C_i\} \subset N_0 \cup N_1) - N_0 \cup N_1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_r = \{C_i / (\Gamma^{-1} \{C_i\} \subset \bigcup_{k=0}^{r-1} N_k) - \bigcup_{k=0}^{r-1} N_k\}$$

En donde r es el entero más pequeño, para el cual:

$$\Gamma N_r = \varnothing$$

Se demuestra fácilmente que, por construcción, los subconjuntos N_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ forman una partición de C y se hallan totalmente ordenados por la relación:

$$(N_k < N_{k'}) \Leftrightarrow (k < k')$$

La función 0(C) definida por:

$$(C_i \in N_k) \Leftrightarrow (0\,(C_i) = k)$$

se denomina "función ordinal del grafo sin circuitos".

En definitiva, se trata de descomponer el conjunto de clases de equivalencia o subgrafos fuertemente conexos en subconjuntos disjuntos y ordenados, de tal manera que si una clase de equivalencia o subgrafo fuertemente conexo pertenece a uno de estos subconjuntos, el cual tiene asignado un número k, todo vértice posterior al vértice considerado debe ser colocado en un subconjunto que lleva un número superior a k. Se llega, de esta manera, al establecimiento de un orden entre las clases de equivalencia o subgrafos fuertemente conexos[5].

Vamos, seguidamente, a exponer las etapas que forman un algoritmo visual, que por su simplicidad puede ser utilizado sin necesidad de tener un conocimiento matemático previo. Se trata de seguir los siguientes pasos[6]:

4º) Establecer el grafo sagitado.

5º) Se buscan los vértices sin predecesor (aquellos en los cuales no llega ningún arco) que forman el nivel N_0.

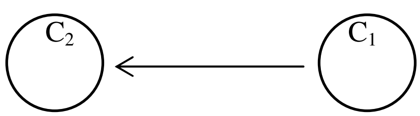
6º) Tachamos en el grafo todos los vértices pertenecientes a N_0 y suprimimos los arcos que de ellos salen, obteniendo así un nuevo grafo.

7º) En el nuevo grafo obtenido, se buscan los vértices sin predecesor, con los cuales se forma el nivel N_1.

5) Se vuelve a 3, pero sin los vértices relativos a N_1. Y así sucesivamente hasta agotar el grafo.

6) Con la desaparición del grafo se obtiene el buscado orden a través de los niveles N_0, N_1, N_2, …, N_r.

Si utilizamos este algoritmo al supuesto en el que se ha considerado un nivel $\alpha \geq 0.6$, por tener únicamente dos clases de equivalencia C_1, C_2, el proceso finaliza rápidamente. En efecto, al ser el grafo sagitado de clases:



el único vértice sin precedentes es C_1 que forma el nivel N_0.

Al tachar el único arco que sale de C_1, se obtiene la clase C_2, que forma el nivel N_1.

Así, pues, el orden es:

C_1 : Nivel N_0

C_2 : Nivel N_1

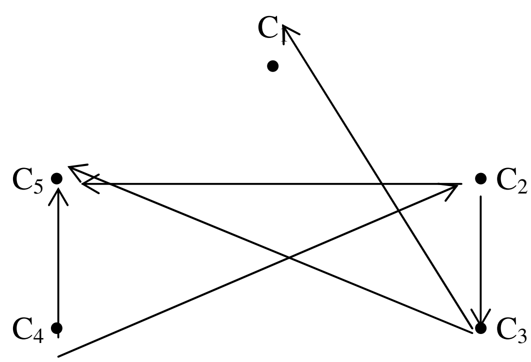
Era innecesario utilizar el algoritmo en este supuesto elemental en el que la existencia de un único arco proporciona automáticamente el orden buscado.

Se concluye, así, que, dada la equivalencia o indiferencia entre los deportistas a, b, c, d se debe intentar el fichaje de uno de estos jugadores. El inicio de las conversaciones simultáneamente con los representantes de cada uno de ellos puede conducir a un abaratamiento de costos, al producirse, eventualmente, una competencia entre ellos para que uno consiga la venta en lugar de conseguirlo los otros.

Parece evidente el descarte del deportista e quien queda relegado a una segunda (y última) posición en el orden establecido.

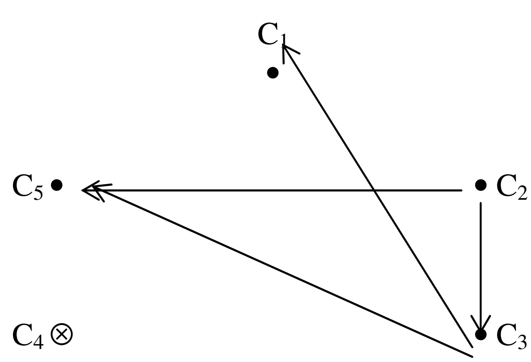
Un desarrollo distinto aparece cuando se considera el nivel $\alpha \geq 0.675$.

1) Como hemos visto, el grafo sagitado (en el cual, recordémoslo, todas las clases de equivalencia están formadas por un solo jugador) era:



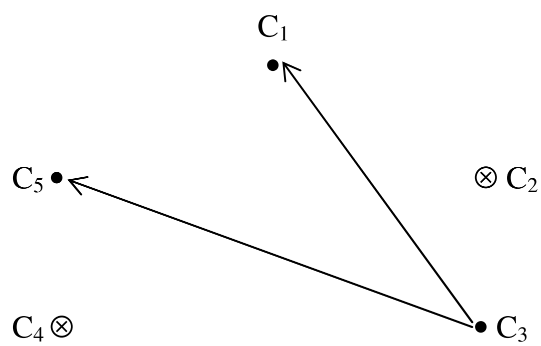
2) El vértice sin predecesor, es decir, el único jugador que no tiene a otro mejor que él, es el que forma el subgrafo fuertemente conexo (clase de equivalencia) C_4, es decir el deportista d. Se trata del primero en el orden de preferencia, y por ello forma el nivel N_0.

3) Tachamos en el grafo sagitado anterior el vértice C_4 y suprimimos los arcos que de él salen. Resulta:



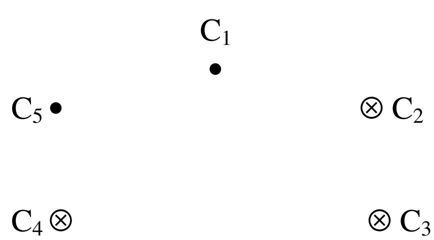
4) Se observa que el único vértice al que no llegan arcos (sin predecesor) es, ahora, C_2, que corresponde al deportista b. Es, por tanto, el segundo en el orden de preferencia y se halla en el nivel N_1.

5) Se tacha el vértice C_2 y se eliminan los arcos que nacen en el mismo. Queda, entonces:



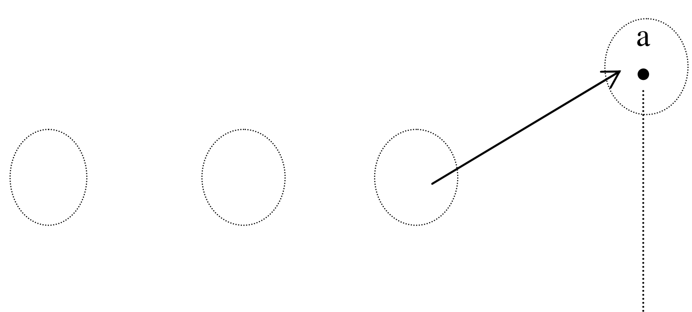
6) En este último grafo el único vértice no tachado, sin predecesor, es C_3 formado por el único deportista c. Le corresponde, por tanto, el tercer lugar en el orden de prelación y ocupa el nivel N_2.

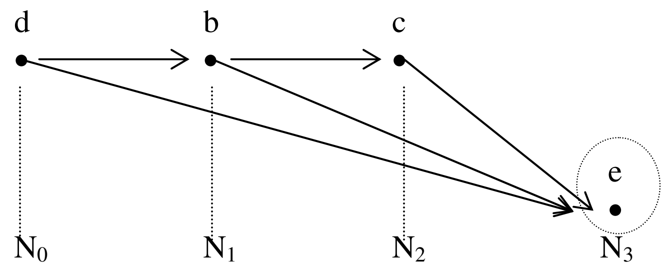
7) Procedemos a la tachadura del vértice C_3 y se eliminan los arcos que parten de este vértice. Se tiene:



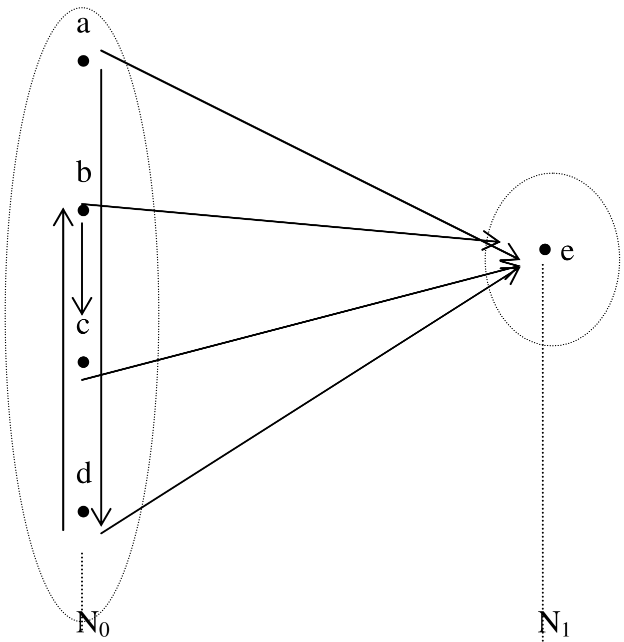
8) A ninguno de los vértices restantes, el C_1 y el C_5, llegan arcos, lo cual indica que forman el último nivel N_3. Los deportistas a y e son los últimos en el orden de preferencia.

Finalizada la utilización del algoritmo, nos hallamos en disposición de establecer el siguiente orden:





Si comparamos esta figura con la relativa al caso en que nos conformábamos con un nivel $\alpha \geq 0.6$, representado por el gráfico siguiente:



llegamos a la conclusión de que en un supuesto como éste, basta un pequeño aumento en el nivel exigido de separación de las características entre los jugadores, considerados dos a dos, para clarificar el orden de preferencia.

En el aspecto técnico conviene subrayar (en los dos casos se observa claramente) que los niveles N_i, i = 1, 2, … no son clases de equivalencia y, por tanto, los jugadores que se hallan en un mismo nivel no tienen porqué ser equivalentes o indiferentes (caso de a y e del primero de estos dos últimos gráficos) aunque puede que en algunos casos lo sean, pero no por corresponder a un mismo nivel sino por pertenecer a la misma clase de equivalencia (caso de a, b, c, y d del segundo gráfico).

Hecha esta última observación, puede resultar útil señalar que "cuando acabamos de obtener mediante un procedimiento visual se puede también alcanzar a través de un algoritmo[7] que parte de la matriz de relaciones binarias". Este algoritmo fue elaborado por Democrom[8].

Las fases a seguir son las siguientes:

- Las relaciones de los deportistas, dos a dos, son expresadas mediante una matriz booleana.
- Se sitúa una fila debajo de la matriz, haciendo coincidir las casillas con las columnas. En esta fila se coloca, en cada casilla, la suma de los unos que hay en la columna que le corresponde.
- El o los ceros que aparecen indican los deportistas sin predecesores y forman, por tanto, el nivel N_0.
- Se eliminan las filas de la matriz correspondientes a los deportistas del nivel N_0.
- Se forma una segunda fila debajo de la matriz. Se colocan cruces en las casillas con ceros en la primera fila y se suman los unos de las columnas en la matriz que queda, colocando la suma en las correspondientes casillas de la segunda fila.
- El o los ceros que aparecen son los deportistas sin predecesor, cuando no están los del nivel N_0, por lo que forman el nivel N_1.
- Se vuelve a la fase 4) y siguientes hasta que el proceso se agota.

Pasamos, a continuación a utilizar este algoritmo a partir de las matrices booleanas que expresan las mismas relaciones al nivel $\alpha \geq 0.6$ y $\alpha \geq 0.675$ que antes han sido representadas por grafos sagitados. Evidentemente los resultados deben ser coincidentes.

4) Empezamos por la matriz relativa al nivel $\alpha \geq 0.6$:

	C_1	C_2
C_1	x	1
C_2		x

5) Situamos debajo de la matriz la fila Λ_0, especificada en el segundo paso del algoritmo y se coloca en ella un uno debajo de la columna C_2 y un cero debajo de la columna C_1:

$$\begin{array}{c|c|c|} & C_1 & C_2 \\ \hline C_1 & x & 1 \\ \hline C_2 & & x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|} \hline \Lambda_0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

6) El cero en la casilla C_1 indica que los jugadores integrantes de esta clase de equivalencia no tienen predecesores y, por tanto, forman el primer nivel de preferencia N_0.

7) Al eliminar la fila C_1 (deportistas del nivel N_0) observamos que únicamente queda una fila, la C_2.

$$\begin{array}{c|c|c|} & C_1 & C_2 \\ \hline C_2 & & x \\ \hline \end{array}$$

8) Vamos a colocar, debajo de esta matriz, la anterior fila Λ_0 y una nueva Λ_1 en la cual se coloca una cruz en la casilla C_1 y un cero en la C_2 (no existen unos en la columna que ahora se limita a una casilla):

$$\begin{array}{c|c|c|l} & C_1 & C_2 & \\ \hline C_2 & & x & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|l} \hline \Lambda_0 & 0 & 1 & \ldots\ldots\ C_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|l} \hline \Lambda_1 & x & 0 & \ldots\ldots\ C_2 \\ \hline \end{array}$$

9) La clase C_2 (el jugador e) no tiene predecesores (es evidente porque es la única clase de equivalencia que queda) por lo que constituye el último nivel N_1.

El algoritmo ha agotado la matriz y el orden de prelación ha sido establecido:

$$C_1 \longrightarrow C_2$$

y es, como es lógico, coincidente con el resultado hallado cuando se empleaba el algoritmo visual.

Pasemos, finalmente, al caso en el que el nivel exigido es $\alpha \geq 0.675$.

1) La matriz booleana de clases que coinciden con la de jugadores, es:

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5$

C_1	x				
C_2		x	1		1
C_3	1		x		1
C_4		1		x	1
C_5					x

2) Se coloca debajo la fila Λ_0, y se llenan sus casillas con un número, resultado de sumar los unos de cada columna

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	x				
C_2		x	1		1
C_3	1		x		1
C_4		1		x	1
C_5					x

Λ_0	1	1	1	0	3

$\{C_4 = \underline{d}\}$

3) La clase de equivalencia C_4, es decir el deportista <u>d</u> no tiene predecesor alguno y, por tanto, es el primero en la escala de preferencia, formando, así, el nivel N_0.

4) Procedemos a eliminar la fila C_4, por lo que queda la siguiente matriz:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	x				
C_2		x	1		1
C_3	1		x		1
C_5					x

5) Se añade una segunda fila, Λ_1, debajo de la matriz, en la que se coloca una x en la casilla ya adjudicada C_4 así como la suma de unos en las restantes:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	x				
C_2		x	1		1
C_3	1		x		1
C_5					x

Λ_1	1	0	1	x	2	$\{C_2 = \underline{b}\}$

6) La clase de equivalencia C_2, es decir el jugador b es el preferido, cuando no se considera el deportista d, por lo que forma el nivel N_1.

7) Se elimina la fila C_2 y queda:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	x				
C_3	1		x		1
C_5					x

8) Añadimos una tercera fila Λ_2 colocando x en las casillas correspondientes a las clases de equivalencia (deportistas) ya ordenados. Se suman los unos de cada columna y se tiene:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
C_1	x					
C_3	1		x		1	
C_5					x	
Λ_2	1	x	0	x	1	$\{C_3 = \underline{c}\}$

9) El siguiente jugador en el orden de preferencia es el c, que forma la clase de equivalencia C_3. Se ha llegado, así, al nivel N_2.

10) Al eliminar la fila C_3, se tiene la siguiente matriz:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	x				
C_5					x

11) Se añade una cuarta fila Λ_3, se colocan las correspondientes x y se observa que no existen unos que sumar:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
C_1	x					
C_5					x	
Λ_3	0	x	x	x	0	$\{C_1 = \underline{a}, C_5 = \underline{e}\}$

12) Los jugadores a y e forman, así, el último nivel N_3.

Se termina, entonces, la utilización del algoritmo, que proporcionará el siguiente orden:

N_0 : d
N_1 : b
N_2 : c
N_3 : a, e

Se comprueba que el resultado obtenido es coincidente con el hallado al emplear el anterior algoritmo que partía de la representación sagitada de las relaciones entre clases de equivalencia (en este caso particular entre deportistas).

Insistimos, por enésima vez, en el hecho de que aun cuando en el nivel N_3 se encuentren dos jugadores, el a y el e, no por ello deben ser forzosamente equivalentes o indiferentes. Únicamente se indica que tanto el deportista a como el deportista e se hallan en la escala de ordenación después del deportista c, sin que exista entre ellos comparación alguna. Y ello, por cuanto los niveles N_i, i = 1, 2, …, no son clases de equivalencia.

Consideramos que los casos expuestos son suficientes para poner de manifiesto unos procedimientos sencillos para establecer el orden de preferencia entre deportistas a efectos de la eventual compra de sus servicios.

En efecto, si una sociedad deportiva o club tiene conocimiento de la existencia de un cierto número de deportistas susceptibles de ser solicitados para que presten sus habilidades en un orden de preferencia, y el conocimiento de este orden se mantiene reservado únicamente a los órganos internos del club interesado, es posible entablar conversaciones con los representantes de cada uno de estos jugadores simultáneamente. El conocimiento, por parte de éstos, que se están realizando gestiones con otros, limitará, por lo menos en teoría, sus pretensiones económicas, ya que de ser éstas excesivas, asumen el riesgo de que se fiche a algún deportista por él no representado.

Hemos sido testigos, en múltiples ocasiones, del encarecimiento en el precio del fichaje de un jugador, como consecuencia del empecinamiento del responsable técnico de un club (entrenador) insistiendo en su necesidad "vital" para la buena marcha deportiva del equipo que dirige. El conocimiento de esta circunstancia por parte del representante del deportista fortalece su posición vendedora, bajo pretexto (real o ficticio) de que otras sociedades o clubes se hallan también interesadas en sus servicios. Se trata, en realidad, de una especie de "monopolio de oferta". Pero la existencia de varias posibilidades de fichaje, por parte del club demandante, rompe o, en el peor de los casos, limita la posición monopolística del representante, debilitando, así, la fuerza de este "ofertante".

Consideramos que el modelo presentado, con sus algoritmos, inmerso en la matemática no numérica de la incertidumbre, constituye una buena respuesta al problema que se presenta con inequívoca frecuencia cada temporada a las sociedades deportivas que poseen equipos profesionales.

Por otra parte, hemos prescindido de las asignaciones numéricas objetivas (medidas) e incluso subjetivas (valuaciones) en el inicio del modelo, en cuanto al nivel que posee los deportistas de cada uno de los criterios (es decir de los subconjuntos borrosos que los describen en función del referencial de las cualidades, características o singularidades), como habíamos hecho en la primera parte de este trabajo y en otros realizados hasta ahora[9]. De esta manera, hemos entreabierto una puerta (así lo creemos) para el tratamiento de situaciones cuya incertidumbre es tal que no permite, siquiera, la utilización del más elemental de los elementos inciertos. Como se ha podido comprobar, es entonces la noción de relación (comparación entre las capacidades de los jugadores) la que adquiere la categoría de concepto de base.

La optimización por el método de la composición P-latina

Deseamos evitar caer en la excesiva reiteración de poner en evidencia, una vez más, la vital importancia que adquiere, para una institución deportiva, el acierto en la adquisición de los servicios de un deportista, sobre todo en los deportes colectivos profesionales. Lo que sí conviene subrayar es la necesidad de facilitar a los responsables técnicos y económicos de los clubes el mayor número de instrumentos capaces de ayudarles en el momento de adoptar esta difícil decisión.

Una vez realizado el tratamiento de este problema cuando la incertidumbre, tantas veces presente en el ámbito deportivo, permitía, por lo menos, describir el perfil ideal del puesto en el equipo y el perfil de los deportistas candidatos mediante subconjuntos borrosos[10], propusimos un planteamiento, en un congreso de AMSE[11]. Hemos profundizado en él, en los epígrafes anteriores, en el supuesto de que la incertidumbre fuera tal que ni siquiera fuera posible imaginar asignaciones numéricas a los valores de la función característica de pertenencia. Hemos hallado la solución mediante la comparación entre los deportistas candidatos considerados dos a dos para cada cualidad, característica o singularidad, asignando un uno cuando un jugador era preferible al otro y un cero, en el supuesto contrario. El mismo proceso se ha seguido en relación a la mayor o menor importancia de las cualidades, características o singularidades (criterios de decisión). La necesaria agregación ha proporcionado como resultado una relación borrosa, cuyo tratamiento mediante α-cortes da lugar, para cada valor de α, a una matriz booleana. En base a una o varias de estas matrices booleanas, hemos propuesto utilizar dos algoritmos, fundamentados en la idea de función ordinal de un grafo, con resultados coincidentes.

Deseamos, ahora, continuar con la tarea emprendida, utilizando el mismo soporte matricial, realizando un cambio en el procedimiento de resolución, para partir del llamado método de la composición P-latina.

Empezamos por considerar, como hacemos habitualmente, la existencia de un puesto en el equipo que se desea cubrir. Asimismo, se dispone de información suficiente de los eventuales deportistas candidatos a ocuparlo. Los identificamos a partir del siguiente conjunto:

$$\{a, b, c, \ldots, m\}$$

Los criterios que sirven de base para la elección (cualidades, características o singularidades) se representan mediante el conjunto:

$$\{A, B, C, \ldots, N\}$$

Conocemos diversas maneras de relacionar a los jugadores considerándolos dos a dos[12]. No vamos a distraer la atención de nuestros lectores con reiteraciones sobre este tema. Sí recordaremos que en la forma sagitada cada arco pone en evidencia la preferencia del deportista representado por el vértice de salida sobre el deportista representado por el vértice de llegada. Así, dados dos jugadores i, j:

$$\underset{i}{\bullet} \longrightarrow \underset{j}{\bullet}$$

el jugador i es preferido al jugador j. De la misma manera, en la forma matricial un uno en una casilla significa que el deportista representado por el elemento de la fila a la cual pertenece es preferido al representado por el elemento de la columna a la cual corresponde. De esta manera un 1 en la casilla (i, j) pone en evidencia que el jugador i es preferido al j.

Realizado este preámbulo, para muchos quizás reiterativo, vamos a entrar en el núcleo del problema que nos ocupa partiendo de un grafo de relaciones binarias presentado en primer lugar bajo forma matricial:

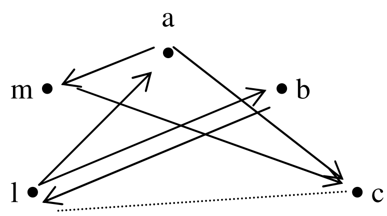
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a & b & & m \\
a & x & \Omega_a^{(b)} & \cdots & \Omega_a^{(m)} \\
b & \Omega_b^{(a)} & x & \cdots & \Omega_b^{(m)} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m & \Omega_m^{(a)} & \Omega_m^{(b)} & \cdots & x
\end{array}$$

$$\Omega_i^{(j)} \in \{0, 1\}$$

$$i, j = a, b, \ldots, m$$

Como es sabido se acostumbra llenar de x la diagonal principal de esta matriz para señalar la falta de significatividad, en nuestro planteamiento, de la relación de preferencia de un jugador consigo mismo.

Pasemos a representar, ahora, un grafo de relaciones binarias en forma sagitada, en el cual la ausencia de algunos arcos significa la no existencia (o el desconocimiento) de una relación de preferencia directa entre los deportistas representados por los vértices no enlazados.



Al colocar entre dos vértices, dos arcos en sentido opuesto, se desea poner de manifiesto la equivalencia o indiferencia entre los deportistas por aquellos representados. Esto nos lleva a insistir en el hecho de que antes de iniciar cualquier algoritmo de ordenación es necesario reunir los jugadores que sean equivalentes o indiferentes en “clases de equivalencia” o, lo que es lo mismo, en “subgrafos fuertemente conexos”, ya que sólo se pueden ordenar estas clases o subgrafos. Únicamente son ordenables los deportistas, considerados individualmente, cuando todas las clases de equivalencia (o subgrafos fuertemente conexos) están formados por un solo deportista. Entonces, al ordenar las clases o subgrafos se ordenan, automáticamente, los jugadores[13].

Así, pues, sea cual fuere el algoritmo utilizado para establecer un orden de preferencia en el fichaje de un jugador, es condición previa que los deportistas candidatos sean agrupados de tal manera que cada grupo contenga aquellos que son equivalentes o indiferentes.

Realizada esta tarea se dispondrá de una matriz de clases de equivalencia o grafo de subgrafos fuertemente conexos. En una u otra forma (matricial o sagitada) quedarán patentes las relaciones de orden por pares de clases o subgrafos. Con objeto de establecer un orden entre todas ellas, proponemos, seguidamente, emplear un algoritmo basado en la idea de composición P-latina.

La noción de composición P-latina

Es suficientemente conocido que dado un grafo de relaciones binarias se puede definir un camino formado por una secuencia finita de vértices (en nuestro caso grupos de jugadores equivalentes o indiferentes, o en su caso jugadores individuales) al que se exige una propiedad P. Se dice, entonces, que nos hallamos ante una “secuencia latina de la propiedad P”, y, también, de manera más coloquial una “secuencia P-latina”.

La utilización de este concepto comporta presentar el grafo de relaciones binarias en forma de matriz latina. Recordemos que para pasar de la forma booleana a la latina, basta sustituir los unos de las casillas de la matriz booleana por las letras (normal e inicialmente latinas) correspondientes a la fila y la columna a las que la casilla pertenece. Veamos, a través de un ejemplo, el paso de la forma booleana a la latina:

$$
[B] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & \mathrm{A} & \mathrm{b} & & \mathrm{m} \\
\mathrm{a} & \mathrm{X} & 1 & \dots & 1 \\
\mathrm{b} & & \mathrm{x} & \dots & 1 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mathrm{m} & & & \dots & \mathrm{x}
\end{array}
\qquad
[L] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & & \mathrm{m} \\
\mathrm{a} & \mathrm{x} & \mathrm{ab} & \dots & \mathrm{am} \\
\mathrm{b} & & \mathrm{x} & \dots & \mathrm{bm} \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mathrm{m} & & & \dots. & \mathrm{x}
\end{array}
$$

La forma latina del grafo pone en evidencia las relaciones de prelación directa entre los jugadores, considerados “dos a dos”, con una enumeración exhaustiva, ya que la primera letra representa al deportista preferido al representado por la segunda letra. Así, en nuestra matriz latina tenemos que el jugador a es preferido al b, también el a al m; el b también al m, … . En teoría de grafos se dice que la matriz latina [L] “enumera” todos los caminos de longitud uno (en la forma sagitada cada camino de longitud uno coincide con un arco). Se escribe, también, $[L]^1$.

Esto nos lleva a definir los términos “camino” y “longitud de un camino”. Llamamos “camino” a aquella sucesión de arcos (relaciones de preferencia entre dos grupos de jugadores equivalentes o jugadores individualizados) cada uno de los cuales se inicia donde termina otro (cada grupo de jugadores o jugador menos preferido son o es más preferido que otro grupo o jugador). Se encadenan, así, relaciones de preferencia directa para establecer relaciones de preferencia de un grupo de deportistas o deportista individual con respecto a otro grupo o deportista, por intermediación de un tercero o de varios. De ahí a la noción de longitud de un camino, sólo hay un paso. En efecto, la longitud de un camino viene dada por el número de arcos que contiene. Si hay un grupo (o deportista) intermediario el camino será de longitud dos. Si existen dos intermediarios será de longitud tres, … y así sucesivamente.

Finalmente, aparece la noción de "camino elemental", como aquel camino formado por una sucesión de vértices sin que se repita ninguno de ellos. Es evidente que en un grafo de clases de equivalencia todos lo caminos son elementales, puesto que de no ser así existirían circuitos entre clases de equivalencia (es decir equivalencias o indiferencias entre grupos de jugadores equivalentes o indiferentes), lo que no es posible por definición.

Hecho este breve paréntesis conceptual, volvamos a la matriz latina enumerativa de la relaciones de preferencia entre jugadores, considerados dos a dos. Nuestro objetivo consistirá, ahora, en intentar establecer las relaciones de preferencia considerando cada vez más jugadores, es decir, de tres en tres, de cuatro en cuatro, … . En otras palabras hallar los caminos de longitud dos, de longitud tres, … Para ello recurriremos a un operador denominado de convolución o composición P-latina. Vamos a explicar su funcionamiento.

En primer lugar se obtiene, a partir de una matriz latina $[L]^1$, la pomposamente llamada "matriz latina amputada a la izquierda" $[L']^1$ que no es otra que la misma matriz $[L]^1$ a la que se ha quitado (amputado) la primera letra de cada casilla. En nuestro ejemplo:

$$[L]^1 = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & & m \\ \hline a & x & ab & \dots & am \\ \hline b & & x & \dots & bm \\ \hline & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline m & & & \dots & x \\ \hline \end{array} \qquad [L']^1 = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & & M \\ \hline a & x & b & \dots & M \\ \hline b & & x & \dots & M \\ \hline & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline m & & & \dots & X \\ \hline \end{array}$$

Pues bien, si se convoluciona o compone la matriz latina $[L]^1$ con la matriz latina amputada a la izquierda $[L']^1$ exigiendo que todos los caminos resultantes sean elementales (es decir la propiedad P es "camino elemental"), los caminos elementales de longitud dos, en nuestro caso las relaciones de preferencia (ordenación) entre los deportistas tomados de tres en tres.

El proceso operativo es muy simple, pues basta convolucionar las dos matrices $[L]^1$o $[L']^1 = [L]^2$, quitando (anulando) aquellos caminos (relaciones) en los que se repite un vértice (se repite un jugador).

Si convolucionamos $[L]^2$ o $[L']^1 = [L]^3$ con la propiedad: P= a camino elemental, se hallan las relaciones de preferencia entre jugadores considerados de <u>cuatro en cuatro</u>. Y así, sucesivamente.

De manera general, se escribe:

$[L]^1$: orden de preferencia entre dos deportistas

$[L]^1$ o $[L']^1 = [L]^2$: orden de preferencia entre tres deportistas

$[L]^2$ o $[L']^1 = [L]^3$: orden de preferencia entre cuatro deportistas

……………………………………………………………..

$[L]^{v-2}$ o $[L']^1 = [L]^{v-1}$: orden de preferencia entre v deportistas

$[L]^{v-1}$ o $[L']^1 = [L]^v$: no hay orden de preferencia entre v+1 deportistas

Se consigue, de esta manera, establecer un orden de prelación entre varios jugadores para el fichaje de uno de ellos.

Descripción y funcionamiento del algoritmo de la composición P-latina

Con objeto de hacer operativo el método propuesto en la práctica deportiva, vamos a presentar un algoritmo[14] que ha hecho prueba de eficacia en otros ámbitos, sobre todo en el campo económico y de gestión. Consta de las siguientes etapas:

1) Se construye, a partir de la matriz que relaciona grupos de jugadores de dos en dos, la matriz latina $[L]^1$.
2) En base a la matriz latina $[L]^1$ se obtiene la matriz latina amputada a la izquierda $[L']^1$.
3) Mediante la convolución latina de la matriz $[L]^1$ y de la amputada $[L']^1$ se halla la matriz latina $[L]^2$ en donde la propiedad P es “el camino elemental”. Se obtiene el

orden de prelación de grupos de jugadores o de jugadores considerados de tres en tres.

4) Mediante la convolución de la matriz $[L]^2$ y la $[L']^1$ se obtiene la matriz $[L]^3$ que proporciona la prelación de grupos de jugadores o jugadores considerados de cuatro en cuatro.

5) Se continúa así hasta obtener $[L]^v$, siendo v+1 el número de jugadores candidatos a ser fichados, a no ser que la matriz latina sea vacía, en cuyo caso el proceso se detiene.

6) Si $[L]^v$ no es vacía, se halla $[L]^{v+1}$ para comprobar la inexistencia de circuitos.

Con objeto de ensayar el funcionamiento de este algoritmo, vamos a partir de una matriz latina de clases en la cual cada clase de equivalencia se halla formada por un solo elemento, es decir un conjunto de jugadores entre los cuales no existe ninguno que sea equivalente o indiferente a los demás. El orden podrá ser obtenido en este caso entre deportistas considerados individualmente. Partimos de una matriz booleana ya utilizada anteriormente[15].

[B] =

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x	1		1
c	1		x		1
d		1		x	1
e					x

1) Presentamos la matriz [B] en forma latina:

$[L]^1$ =

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x	bc		be
c	ca		x		ce
d		db		x	de

e					x

en donde se observa que b es preferido a c y a e; c es preferido a a y a e; d es preferido a b y a e. Se enumeran, así, seis ordenes de preferencia de jugadores, tomados dos a dos (caminos de longitud uno)

2) Se obtiene la matriz latina amputada a la izquierda $[L']^1$:

$[L']^1 =$

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x	c		e
c	a		x		e
d		b		x	e
e					x

3) Procedemos a la obtención de las relaciones de orden entre jugadores considerados de tres en tres. Para ello utilizaremos el operador de convolución latina con la propiedad P= camino elemental, para las matrices $[L]^1$ y $[L']^1$, hallándose, así:

$$[L]^2 = [L]^1 \text{ o } [L']^1$$

Se tiene, en nuestro caso:

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x	bc		be
c	ca		x		ce
d		db		x	de
e					x

o

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x	c		e
c	a		x		e
d		b		x	e
e					x

Con objeto de reavivar la memoria de nuestros lectores vamos a detallar el proceso de obtención de un par de casillas de la matriz $[L]^2$, por convolución latina de $[L]^1$ y $[L']^1$. Así, por ejemplo, para hallar el resultado correspondiente a la casilla (b, a) se considerará la fila b de la matriz $[L]^1$ y la columna a de la matriz $[L']^1$ realizándose, sucesivamente, los productos de la primera casilla de la fila por la primera casilla de la columna, de la segunda casilla de la fila por la segunda casilla de la columna, …, y así hasta las últimas casillas de la fila y columna.

$$B \begin{bmatrix} \; & x & bc & \; & be \end{bmatrix} \bullet \begin{array}{c} a \\ \begin{bmatrix} x \\ \; \\ a \\ \; \\ \; \end{bmatrix} \end{array} = \{ Ø . x, x . Ø , b . c . a , Ø . Ø, b . e . ø\} = \{bca\}$$

Hacemos lo mismo para la casilla (d, e):

$$D \begin{bmatrix} \; & db & \; & x & de \end{bmatrix} \bullet \begin{array}{c} e \\ \begin{bmatrix} \; \\ e \\ e \\ e \\ x \end{bmatrix} \end{array} = \{ Ø . Ø, dbe, Ø . e , x . e , de . x\} = \{dbe\}$$

Pasemos, ya, a la obtención de la matriz latina $[L]^2$:

$[L]^2 =$

	a	b	c	d	e
A	x				
B		x	bc		be
C	ca		x		ce
D		db		x	de
E					x

o

	a	b	c	d	e
A	x				
B		x	c		e
C	a		x		e
D		b		x	e
E					x

=

	a	b	c	d	e
a	x				
b	bca	x			bce
c			x		
d			dbc	x	dbe
e					x

A partir de la matriz latina $[L]^2$ se consigue unas relaciones de orden entre jugadores (elementos) tomados de <u>tres en tres</u>. Son las siguientes:

{b, c, a} , {b, c, e} , {d, b, c} , {d, b, e}

Vamos a continuar con el algoritmo, ahora sin tanto detalle.

4) La obtención de las relaciones de orden de los elementos tomados de <u>cuatro en cuatro</u> vendrá dada por la matriz latina $[L]^3$. Para ello basta hallar la convolución:

$$[L]^3 = [L]^2 \text{ o } [L']^1$$

que, en nuestro caso, es:

$[L]^3 =$

	A	b	C	d	e
a	X				
B	Bca	x			bce
c			X		
D			dbc	x	dbe
e					x

o

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x	c		e
c	a		x		e
d		b		x	e
e					x

=

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x			
c			x		
d	dbca			x	dbce
e					x

La matriz latina $[L]^3$ pone en evidencia la existencia de dos relaciones de orden cuando se tienen en cuenta los jugadores tomados de <u>cuatro en cuatro</u>. Son:

$$\{d, b, c, a\} , \{d, b, c, e\}$$

Veamos si es posible una relación total o lineal, es decir, todos los jugadores en un orden único. Para ello pasaremos al último eslabón del algoritmo.

5) Pasamos a la obtención de la matriz latina $[L]^4$ a partir de la convolución:

$$[L]^4 = [L]^3 \text{ o } [L']^1$$

es decir:

$[L]^4 =$

	A	b	C	d	e
a	X				
B		x			
c			X		
D	Dbca			x	dbce
e					x

o

	a	b	c	D	e
a	x				
b		x	c		e
c	a		x		e
d		b		X	e
e					x

=

	a	b	c	d	e
a	x				
b		x			
c			x		
d				x	
e					x

Al resultar la matriz latina $[L]^4$ vacía se pone de manifiesto que no existe un orden total entre los cinco jugadores, debiéndonos, entonces, conformarnos con un orden parcial, hallado en la matriz latina $[L]^3$ y que puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\{d\} \rightarrow \{b\} \rightarrow \{c\} \rightarrow \{a, e\}$$

o bien como se hace con frecuencia:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & & a \\ d \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & e \end{tikzcd}$$

Este resultado permite una observación que consideramos interesante: El hecho de que el deportista a y el e se hallen en el mismo "nivel" en cuanto al orden NO IMPLICA que sean equivalentes o indiferentes, sino que no son susceptibles de ordenación o no somos capaces de ordenarlos entre sí.

El algoritmo presentado, cuya base técnica se halla en la idea de composición latina, constituye una alternativa que consideramos interesante, a los ya conocidos algoritmos fundamentados en el concepto de función ordinal de un grafo. En el fondo se trata de variantes que parten de un tronco común del cual salen dos ramas. En esta ocasión la noción de "camino elemental" resulta básica como propiedad necesaria para aceptar el resultado de las sucesivas convoluciones. Es por ello que se puede hablar de "composición latina con la propiedad de existencia de caminos elementales".

Desde una perspectiva práctica, el algoritmo propuesto resulta cómodo de utilizar. Además, al ir facilitando el orden, considerando los deportistas sucesivamente de dos en dos, de tres en tres, …, permite pasar de soluciones parciales cada vez más amplias hasta la solución total, optimizadora de la decisión deseada.

Ciertas precauciones a nivel operatorio son necesarias. Nos referimos a las posibilidades de confusión que comporta la existencia de un orden no total. Ya hemos hecho mención al hecho de que la no ordenabilidad entre dos deportistas o grupos de deportistas no comporta que estos sean equivalentes o indiferentes. También parece conveniente insistir en la correcta aplicación de la propiedad “camino elemental” excluyendo de los resultados hallados por la convolución latina aquellos “caminos” (orden de jugadores) en los que se repite un elemento (jugador), pues no son, evidentemente, elementales.

Hechas estas salvedades, no por obvias menos importantes, consideramos el proceso propuesto para el fichaje de un deportista como una nueva herramienta que esperamos sea utilizada por parte de aquellas sociedades anónimas deportivas y clubes en general que desean mejorar su gestión técnico-deportiva.

Algoritmo de selección en base al cálculo matricial

A lo largo del último bienio hemos estado trabajando en la elaboración de una metodología capaz de proporcionar herramientas adecuadas a quienes tienen la responsabilidad de tomar decisiones relativas al fichaje de deportistas[16]. Los planteamientos hasta ahora son el resultado de la misma.

Deseamos, ahora, completar, por lo menos momentáneamente, cuanto se ha realizado, con la presentación de un algoritmo, de fácil utilización, en el cual ocupa un lugar de privilegio la importancia relativa de cada uno de los criterios que sirven de base para la selección, es decir las cualidades, características o singularidades que se exigen a los jugadores para la realización idónea de su actividad deportiva.

Para conseguir nuestro objetivo hemos recurrido a unos desarrollos[17] cuyo soporte se halla en ciertas propiedades, muy sencillas, del cálculo matricial, de cuya utilización se posee una cierta experiencia por haber sido utilizadas en otros ámbitos del conocimiento.

Somos conscientes que, en algunas ocasiones, puede no resultar cómodo el empleo de subconjuntos borrosos como “descriptores” de las cualidades, características y singularidades de los deportistas, sobre todo, cuando la incertidumbre es de tal naturaleza que resulta inadecuado asignar valuaciones a la función característica de pertenencia.

El algoritmo que proponemos tiene como soporte el concepto de relación. Así, pues, puede ser adscrito en el ámbito de la matemática no numérica, aunque en el aspecto técnico aparezcan "números", que en caso alguno juegan un papel fundamental e imprescindible en el procedimiento de optimización.

Continúan siendo elementos básicos el conjunto de deportistas sobre los que cabe tomar la decisión del fichaje y el conjunto de cualidades, características y singularidades consideradas importantes (en mayor o menor grado) para que el jugador realice su actividad en el puesto o posición del equipo que se desea cubrir.

Vamos, pues, a iniciar la exposición a partir del supuesto de que una Sociedad Anónima Deportiva o Club desea adquirir los servicios de un deportista para cubrir una posición en el equipo, para lo cual dispone de suficientes referencias de un conjunto de jugadores, tal como el siguiente:

$$\{a, b, c, \ldots, m\}$$

Estas "referencias" se concretan en otro conjunto, de naturaleza distinta, que comprende las cualidades, características y singularidades, consideradas significativas. Las designaremos mediante letras mayúsculas:

$$\{A, B, C, \ldots, N\}$$

Con estas informaciones, evidentemente elementales, se puede proceder, con la ayuda de los técnicos (expertos), a un proceso que consiste en comparar, para cada cualidad, característica y singularidad, el nivel que posee un deportista en relación con todos los demás.

Así, tomando una cualidad, característica y singularidad, por ejemplo <u>A</u>, puede suceder (es una comparación arbitraria) que el deportista <u>a</u> sea mucho mejor que <u>b</u>, o bien bastante mejor que <u>b</u>, o bien un poco mejor que <u>b</u>. Para utilizar una manera de formalizar estas comparaciones, siguiendo la forma con la que estamos acostumbrados, se puede acordar el establecimiento de razonamientos tales como: <u>a</u> es 3 veces mejor que <u>b</u>, o bien 3/2 veces mejor que <u>b</u>, o bien 5/4 mejor que <u>b</u>. Esto equivale a aceptar relaciones entre cada deportista <u>i</u> y cada deportista j, <u>para cada cualidad, característica y singularidad</u>, que en el ámbito teórico se acostumbran a representar mediante μ_{ij}, i, j = a, b, …, m.

Estas relaciones entre deportistas tomadas de dos en dos, PARA CADA cualidad, característica y singularidad k, k = A, B, …, N pueden ser agrupadas formando una matriz como la que presentamos a continuación:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & & m \end{array} \\
[M] = \begin{array}{c} a \\ b \\ \\ m \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mu_{aa} & \mu_{ab} & \cdots & \mu_{am} \\ \hline \mu_{ba} & \mu_{bb} & \cdots & \mu_{bm} \\ \hline \cdots & \cdots & & \cdots \\ \hline \mu_{ma} & \mu_{mb} & \cdots & \mu_{mm} \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

$\mu_{i,\,i} = 1$

$\mu_{ij} = 1/\mu_{ji}$

$i, j = a, b, \ldots, m$

Nos hallamos, así, por construcción, ante una matriz en $\Re_o^+$ que es recíproca.

Aunque sólo poseemos una breve experiencia en la construcción de este tipo de matrices, hemos podido comprobar la existencia del peligro de caer en una incoherencia o inconsistencia. Nos vamos a explicar: si para una "característica" el deportista a es 2 veces mejor que b y el deportista b es la 1/2 de bueno que el deportista c, no es posible decir que a es 3 veces mejor que c, se deberá aceptar que a y c son más o menos igual de buenos. Pues bien, esto, que parece tan elemental, crea verdaderos problemas en la realidad. Es por ello que resulta imprescindible comprobar el grado o nivel de consistencia a través de un indicador o índice. No siempre las matrices [M] son completamente consistentes, es decir, cumplen:

$$\mu_{ij} \,.\, \mu_{jl} = \mu_{il}\,,\ \ i, j, l = a, b, c, \ldots, m$$

pero basta con que el índice de coherencia sea suficientemente reducido para que su aceptación no provoque graves problemas.

Para calcular el índice de coherencia, que designaremos por I_c, es necesario hallar el valor propio dominante de la matriz, que se acostumbra a representar mediante λ_k, k = A, B, …, N. Pues bien, si el orden de la matriz es ϑ, el índice de coherencia será:

$$I_c = \frac{|\lambda_k - \vartheta|}{\vartheta}\ ,\ k = A, B, \ldots, N$$

La obtención del valor propio dominante es, pues, el primer eslabón de los estudios a realizar para conseguir el objetivo último cual es la selección del deportista más adecuado para el puesto del equipo que se desea cubrir.

Una vez conocida la coherencia o consistencia de las relaciones establecidas para todos los deportistas y para CADA cualidad, característica y singularidad k, k = A, B, …, N, vamos a continuar el proceso hallando el orden de preferencia entre jugadores, también para CADA cualidad, característica y singularidad. Será necesario, así, un estudio capaz de proporcionar el orden deseado. Puede jugar este papel el vector propio correspondiente.

Finalmente, y una vez hallado el orden de preferencia entre los deportistas para CADA UNA de las cualidades, características o singularidades debe procederse a una agregación de todas ellas. Es conocida, suficientemente, la existencia de muchos caminos capaces de desembocar en unos resultados aceptables. En un intento de esquematizar (esperamos que no demasiado) este problema, plantearemos dos grandes bloques, según se considere que cada cualidad, característica o singularidad tiene o no la misma importancia para la posición a cubrir en el equipo.

Descripción del algoritmo escogido

Con objeto de dar solución al problema así planteado, hemos escogido un algoritmo[18] cuyas fases enumeramos a continuación:

1º) Establecimiento de dos conjuntos: el de deportistas y el de cualidades, características y singularidades.

2º) Para cada una de las cualidades, características y singularidades, se elabora la matriz recíproca, representativa de las relaciones de estimación relativa de un deportista con respecto a los demás.

3º) Para conocer la coherencia de la matriz se obtiene el valor propio dominante.

4º) Con objeto de hallar el orden de preferencia de deportistas para cada cualidad, característica y singularidad, se obtiene el vector propio correspondiente para cada característica, el cual es normalizado con suma 1.

5º) A efectos operativos se reagrupan los vectores propios formando una matriz [V], normalmente rectangular, con valores en [0, 1].

6º) Para realizar una agregación se construye una matriz cuadrada recíproca, a partir de la comparación relativa de cualidades, características o singularidades, indicando en cada casilla las veces que la cualidad de la fila es más importante que la de la columna (cuando así sucede).

7º) Se busca si esta matriz es coherente, para lo cual se halla el valor propio dominante.

8º) Con objeto de obtener la importancia relativa de cada cualidad, característica o singularidad se halla el vector propio correspondiente, el cual, una vez normalizado con suma 1, serviría de ponderación (un caso particular sería el de igualdad de importancia).

9º) Se calcula el producto de la matriz con el vector, hallando un nuevo y definitivo vector, cuyos valores, ahora ya agregados, darán lugar a la deseada ordenación de deportistas.

Con objeto de desarrollar este algoritmo, y dado que los elementos esenciales son el valor propio dominante y el vector correspondiente, seguiremos un procedimiento para su obtención sugerido en la obra ya citada del profesor Gil-Aluja[19]. Para ello partiremos de una matriz cuadrada y recíproca tal como la ya presentada, que reproducimos:

$$[M] = \begin{array}{c|cccc|} & a & b & & m \\ a & 1 & \mu_{ab} & \dots & \mu_{am} \\ b & \mu_{ba} & 1 & \dots & \mu_{bm} \\ & \dots & \dots & & \dots \\ m & \mu_{ma} & \mu_{mb} & \dots & 1 \end{array}$$

Vamos a iniciar el proceso multiplicando la matriz [M] por el vector unidad [1]. El resultado es un vector que se representa por $[W_1]$:

$$[M] . [1] = \begin{array}{c|cccc} & a & b & & n \\ \hline a & 1 & \mu_{ab} & \dots & \mu_{am} \\ b & \mu_{ba} & 1 & \dots & \mu_{bm} \\ & \dots & \dots & & \dots \\ m & \mu_{ma} & \mu_{mb} & \dots & 1 \end{array} \; . \; \begin{array}{c|c} a & 1 \\ b & 1 \\ & \dots \\ m & 1 \end{array} \; = \; \begin{array}{c|c} a & w_a^{(1)} \\ b & w_b^{(1)} \\ & \dots \\ m & w_m^{(1)} \end{array} = [W_1]$$

Con objeto de que por lo menos uno de los elementos del vector $[W_1]$ tenga como valor la unidad, se dividen todos ellos por el mayor de sus valores es decir, por : $w_a^{(1)} \vee w_b^{(1)} \vee \dots \vee w_m^{(1)}$. Se halla, así, un vector normalizado, en el sentido de los subconjuntos borrosos. Los valores son:

$$v_a^{(1)} = \frac{w_a^{(1)}}{w_a^{(1)} \vee w_b^{(1)} \vee \dots \vee w_m^{(1)}}$$

$$v_b^{(1)} = \frac{w_b^{(1)}}{w_a^{(1)} \vee w_b^{(1)} \vee \dots \vee w_m^{(1)}}$$

…………………………..

Se tiene, finalmente:

$$[W_1] = (w_a^{(1)} \vee w_b^{(1)} \vee \dots \vee w_m^{(1)}) \; . \; \begin{array}{c|c} a & v_a^{(1)} \\ b & v_b^{(1)} \\ & \dots \\ m & v_m^{(1)} \end{array} \; = \; (w_a^{(1)} \vee w_b^{(1)} \vee \dots \vee w_m^{(1)}) \; . \; [V_1]$$

en donde, efectivamente, por lo menos una $v_i^{(1)}$, $i = a, b, \dots, m$ toma como valor la unidad.

Proseguimos, seguidamente, con la multiplicación $[M] . [V_1]$:

$$\begin{array}{c|cccc} & A & b & & n \\ \hline a & 1 & \mu_{ab} & \dots & \mu_{am} \\ b & \mu_{ba} & 1 & \dots & \mu_{bm} \\ & \dots & \dots & & \dots \\ m & \mu_{ma} & \mu_{mb} & \dots & 1 \end{array} \; . \; \begin{array}{c|c} a & v_a^{(1)} \\ b & v_b^{(1)} \\ & \dots \\ m & V_m^{(1)} \end{array} \; = \; \begin{array}{c|c} a & w_a^{(2)} \\ b & w_b^{(2)} \\ & \dots \\ m & w_m^{(2)} \end{array} = [W_2]$$

Procedemos, de nuevo, a realizar la normalización, ahora $[W_2]$. Se tiene:

$$[W_2] = (w_a^{(2)} \vee w_b^{(2)} \vee \dots \vee w_m^{(2)}) \; . \; \begin{array}{c|c} a & v_a^{(2)} \\ b & v_b^{(2)} \end{array} \; = \; (w_a^{(2)} \vee w_b^{(2)} \vee \dots \vee w_m^{(2)}) \; . \; [V_2]$$

$$\begin{array}{cc} & \dots \\ m & \boxed{v_m^{(2)}} \end{array}$$

Evidentemente, habrá por lo menos una $v_i^{(2)}$, i = a, b, …, m, igual a la unidad.

Se sigue así hasta encontrar un valor de s que haga:

$$w_a^{(r)} \vee w_b^{(r)} \vee \dots \vee w_m^{(r)} \equiv w_a^{(s)} \vee w_b^{(s)} \vee \dots \vee w_m^{(s)}, \text{ siendo } r = s-1$$

Cuando esto sucede, se dice que $w_a^{(s)} \vee w_b^{(s)} \vee \dots \vee w_m^{(s)}$ es el valor propio dominante λ y:

$$[V_j] = \begin{array}{cc} a & \boxed{v_a^{(r)}} \\ b & \boxed{v_b^{(r)}} \\ & \dots \\ m & \boxed{v_m^{(r)}} \end{array}$$

es el vector correspondiente.

Si el coeficiente de coherencia I_c es aceptablemente reducido, se puede considerar que la matriz tiene la suficiente coherencia.

La ordenación de deportistas para cada criterio

Veamos, a través de un ejemplo, cómo se descubre, en la práctica, la coherencia o no coherencia de una matriz [M] a través del valor índice de coherencia I_c, en el cual se ha incorporado su valor propio dominante λ. Una vez conscientes de la suficiente coherencia tendrá lugar la aceptación del vector correspondiente como garante de un orden entre los jugadores PARA UNA SOLA de sus cualidades, características o singularidades.

Para ello, vamos a suponer que los servicios técnicos de una Sociedad Anónima Deportiva o Club han preseleccionado a cuatro deportistas a, b, c, d, para un puesto específico del equipo. Una vez colectadas todas las informaciones y realizadas las correspondientes pruebas relativas a sus cualidades, características y singularidades consideradas significativas, A, B, C, D, E, se escoge una de ellas, por ejemplo la A. En relación con esta habilidad A, los servicios técnicos informan que el deportista <u>a</u> es 2 veces mejor que el jugador <u>b</u> (evidentemente para esta cualidad), es 1/2 de bueno que c y una vez y medio, (3/2 = 1.5) que d. A su vez b es 1/2 de bueno que a (evidentemente, ya que a es 2 veces bueno que b), 4 veces mejor que c y 5/2 = 2.5 veces mejor que d. Y así, sucesivamente, hasta suministrar todas las informaciones suficientes para construir la siguiente matriz:

	a	b	C	d
a	1	2	½	3/2
b	1/2	1	4	5/2
c	2	1/4	1	1/3
d	2/3	2/5	3	1

Esta matriz es “recíproca”. Pero ¿es coherente? No lo parece, si se estudian los valores de la primera fila y su concordancia con los valores de los elementos (b, c) y (c, b), (b, d) y (d, b) así como (c, d) y (d, c). Para comprobarlo hallaremos el índice de coherencia I_c a partir del valor propio dominante, utilizando el camino señalado. Se tiene, sucesivamente:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline b & 1/2 & 1 & 4 & 5/2 \\ \hline c & 2 & 1/4 & 1 & 1/3 \\ \hline d & 2/3 & 2/5 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \text{ o } \begin{array}{c|c|} \hline a & 1 \\ \hline b & 1 \\ \hline c & 1 \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & 5 \\ \hline b & 8 \\ \hline c & 3.58 \\ \hline d & 5.07 \\ \hline \end{array} = 8\,. \begin{array}{c|c|} \hline a & .63 \\ \hline b & 1 \\ \hline c & .45 \\ \hline d & .63 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline b & 1/2 & 1 & 4 & 5/2 \\ \hline c & 2 & 1/4 & 1 & 1/3 \\ \hline d & 2/3 & 2/5 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \text{ o } \begin{array}{c|c|} \hline a & .63 \\ \hline b & 1 \\ \hline c & .45 \\ \hline d & .63 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & 3.8 \\ \hline b & 4.69 \\ \hline c & 2.17 \\ \hline d & 2.8 \\ \hline \end{array} = 4.69\,. \begin{array}{c|c|} \hline a & .81 \\ \hline b & 1 \\ \hline c & .46 \\ \hline d & .60 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline b & 1/2 & 1 & 4 & 5/2 \\ \hline c & 2 & 1/4 & 1 & 1/3 \\ \hline d & 2/3 & 2/5 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \text{ o } \begin{array}{c|c|} \hline a & .81 \\ \hline b & 1 \\ \hline c & .46 \\ \hline d & .60 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & 3.94 \\ \hline b & 4.75 \\ \hline c & 2.53 \\ \hline d & 2.92 \\ \hline \end{array} = 4.75\,. \begin{array}{c|c|} \hline a & .83 \\ \hline b & 1 \\ \hline c & .53 \\ \hline d & .61 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline b & 1/2 & 1 & 4 & 5/2 \\ \hline \end{array} \text{ o } \begin{array}{c|c|} \hline a & .83 \\ \hline b & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & 4.01 \\ \hline b & 5.06 \\ \hline \end{array} = 5.06\,. \begin{array}{c|c|} \hline a & .79 \\ \hline b & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|} c & 2 & 1/4 & 1 & 1/3 \\ d & 2/3 & 2/5 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} c & .53 \\ d & .61 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} c & 2.64 \\ d & 3.15 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|} c & .52 \\ d & .62 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ b & 1/2 & 1 & 4 & 5/2 \\ c & 2 & 1/4 & 1 & 1/3 \\ d & 2/3 & 2/5 & 3 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} a & .79 \\ b & 1 \\ c & .52 \\ d & .62 \end{array} = \begin{array}{c|c|} a & 3.98 \\ b & 5.03 \\ c & 2.56 \\ d & 3.11 \end{array} = 5.03 \,.\, \begin{array}{c|c|} a & .79 \\ b & 1 \\ c & .51 \\ d & .62 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ b & 1/2 & 1 & 4 & 5/2 \\ c & 2 & 1/4 & 1 & 1/3 \\ d & 2/3 & 2/5 & 3 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} a & .79 \\ b & 1 \\ c & .51 \\ d & .62 \end{array} = \begin{array}{c|c|} a & 3.98 \\ b & 4.99 \\ c & 2.55 \\ d & 3.08 \end{array} = 4.99 \,.\, \begin{array}{c|c|} a & .80 \\ b & 1 \\ c & .51 \\ d & .62 \end{array}$$

Podemos considerar prácticamente iguales los últimos vectores obtenidos, por lo que detenemos el proceso.

Se tiene como valor propio dominante:

$$\lambda = 4.99$$

siendo el índice de coherencia:

$$I_c = \frac{|4.99 - 4|}{4} = 0.25$$

Valor excesivamente elevado para aceptar la matriz, falta de coherencia o consistencia.

Se vuelve a solicitar las correspondientes informaciones una vez señaladas a los responsables deportivos de la S.A.D o Club, las incoherencias detectadas. La nueva matriz es, ahora:

$$[A] = \begin{array}{ccccc} & A & b & c & d \\ a & 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ b & ½ & 1 & 1/4 & 2/3 \end{array}$$

c	2	4	1	3
d	2/3	3/2	1/3	1

en la cual se observa que han sido modificados los valores de las casillas ya enumeradas.

Repitiendo el mismo proceso se halla, ahora:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 2/3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2/3 & 3/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ o } \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 5 \\ 2.42 \\ 10 \\ 3.5 \end{bmatrix} = 10 \, . \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .24 \\ 1 \\ .35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 2/3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2/3 & 3/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ o } \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .24 \\ 1 \\ .35 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ .97 \\ 4.01 \\ 1.38 \end{bmatrix} = 4.01 \, . \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .24 \\ 1 \\ .34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 2/3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2/3 & 3/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ o } \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .24 \\ 1 \\ .34 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1.99 \\ .97 \\ 3.98 \\ 1.37 \end{bmatrix} = 3.98 \, . \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .24 \\ 1 \\ .34 \end{bmatrix}$$

Resulta un valor propio dominante:

$$\lambda_A = 3.98$$

y un índice de coherencia:

$$I_c^{(A)} = \frac{|4 - 3.98|}{4} = 0.005$$

el cual pone en evidencia la consistencia de las informaciones contenidas en la matriz [A].

Pero es que, además, se ha hallado el orden de prelación de los deportistas a, b, c, d en lo concerniente a la cualidad, característica o singularidad A, a través del vector propio correspondiente:

$$[V_A] = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .24 \\ 1 \\ .34 \end{bmatrix}$$

En efecto, al existir orden decreciente en los valores de las casillas c, a, d, b, resulta que, SIEMPRE para la cualidad, característica o singularidad A, ÚNICAMENTE, la preferencia de jugadores será:

$$c \to a \to d \to b$$

Evidentemente, no puede terminar aquí el proceso, ya que es necesario considerar las otras cualidades, características y singularidades B, C, D, E.

Así, pues, se impone repetir los cálculos realizados con la cualidad, característica o singularidad A, para las demás, es decir, para B, C, D y E.

Obviaremos explicaciones reiterativas, para partir de las matrices [B], [C], [D] y [E] ya consideradas suficientemente coherentes, después de realizados los ajustes, si estos hubieran sido inicialmente necesarios. Continuamos, pues, con la cualidad, característica o singularidad B, su matriz es:

$$[B] = \begin{array}{c|cccc} & A & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2/3 & 2 & 1/2 \\ b & 3/2 & 1 & 3 & 3/2 \\ c & ½ & 1/3 & 1 & 1/4 \\ d & 2 & 2/3 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2/3 & 2 & 1/2 \end{array} \quad a \ \boxed{1} \quad a \ \boxed{4.17} \quad a \ \boxed{.54}$$

$$\begin{array}{c}b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}3/2&1&3&3/2\\1/2&1/3&1&1/4\\2&2/3&4&1\end{bmatrix}\ \text{o}\ \begin{array}{c}b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{array}{c}b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}7\\2.08\\7.67\end{bmatrix} = 7.67\ .\ \begin{array}{c}b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.91\\.27\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array} & \begin{bmatrix}1&2/3&2&1/2\\3/2&1&3&3/2\\1/2&1/3&1&1/4\\2&2/3&4&1\end{bmatrix}\end{array}\ \text{o}\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.54\\.91\\.27\\1\end{bmatrix} = \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}2.19\\4.03\\1.09\\3.77\end{bmatrix} = 4.03\ .\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.54\\1\\.27\\.94\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array} & \begin{bmatrix}1&2/3&2&1/2\\3/2&1&3&3/2\\1/2&1/3&1&1/4\\2&2/3&4&1\end{bmatrix}\end{array}\ \text{o}\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.54\\1\\.27\\.94\end{bmatrix} = \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}2.22\\4.03\\1.11\\3.77\end{bmatrix} = 4.03\ .\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.55\\1\\.28\\.94\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array} & \begin{bmatrix}1&2/3&2&1/2\\3/2&1&3&3/2\\1/2&1/3&1&1/4\\2&2/3&4&1\end{bmatrix}\end{array}\ \text{o}\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.55\\1\\.28\\.94\end{bmatrix} = \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}2.25\\4.05\\1.12\\3.83\end{bmatrix} = 4.08\ .\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.55\\1\\.27\\.94\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array} & \begin{bmatrix}1&2/3&2&1/2\\3/2&1&3&3/2\\1/2&1/3&1&1/4\\2&2/3&4&1\end{bmatrix}\end{array}\ \text{o}\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.55\\1\\.27\\.94\end{bmatrix} = \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}2.23\\4.05\\1.11\\3.79\end{bmatrix} = 4.05\ .\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}.55\\1\\.27\\.94\end{bmatrix}$$

El valor propio dominante es:

$$\lambda_B = 4.05$$

y el índice de coherencia:

$$I_c^{(B)} = \frac{|4.05 - 4|}{4} = 0.01$$

que podemos aceptar como correcto para la suficiente coherencia de la matriz [B].

El vector correspondiente es:

$$[V_B] = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .55 \\ 1 \\ .27 \\ .94 \end{bmatrix}$$

el cual proporciona, para la cualidad, característica o singularidad B el siguiente orden de preferencia entre los deportistas:

$$b \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow c$$

Pasemos al estudio de la cualidad, característica o singularidad C. La matriz suministrada es:

$$[C] = \begin{array}{c|cccc} & A & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 1/3 \\ b & ½ & 1 & 1/4 & 1/5 \\ c & 2 & 4 & 1 & 2/3 \\ d & 3 & 5 & 3/2 & 1 \end{array}$$

Siguiendo el mismo proceso se va obteniendo sucesivamente:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 1/3 \\ b & 1/2 & 1 & 1/4 & 1/5 \\ c & 2 & 4 & 1 & 2/3 \\ d & 3 & 5 & 3/2 & 1 \end{array} \text{ o } \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{bmatrix} 3.83 \\ 1.95 \\ 7.67 \\ 10.50 \end{bmatrix} = 10.5 \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{bmatrix} .36 \\ .19 \\ .73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 1/3 \\ \hline b & 1/2 & 1 & 1/4 & 1/5 \\ \hline c & 2 & 4 & 1 & 2/3 \\ \hline d & 3 & 5 & 3/2 & 1 \\ \hline \end{array} \;\text{o}\; \begin{array}{c|c|} \hline a & .36 \\ \hline b & .19 \\ \hline c & .73 \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & 1.44 \\ \hline b & 0.75 \\ \hline c & 2.88 \\ \hline d & 4.13 \\ \hline \end{array} = 4.13 \begin{array}{c|c|} \hline a & .35 \\ \hline b & .18 \\ \hline c & .70 \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 1/2 & 1/3 \\ \hline b & 1/2 & 1 & 1/4 & 1/5 \\ \hline c & 2 & 4 & 1 & 2/3 \\ \hline d & 3 & 5 & 3/2 & 1 \\ \hline \end{array} \;\text{o}\; \begin{array}{c|c|} \hline a & .35 \\ \hline b & .18 \\ \hline c & .70 \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & 1.39 \\ \hline b & 0.73 \\ \hline c & 2.79 \\ \hline d & 4 \\ \hline \end{array} = 4\,. \begin{array}{c|c|} \hline a & .35 \\ \hline b & .18 \\ \hline c & .70 \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array}$$

Habida cuenta de que el valor propio dominante es:

$$\lambda_C = 4$$

la matriz es totalmente coherente y su índice de coherencia, evidentemente, nulo:

$$I_c^{(C)} = \frac{|4-4|}{4} = 0$$

El vector correspondiente es:

$$[V_c] = \begin{array}{c|c|} \hline a & .35 \\ \hline b & .18 \\ \hline c & .70 \\ \hline d & 1 \\ \hline \end{array}$$

De esta manera se tiene, para la cualidad, característica o singularidad C el siguiente orden entre deportistas:

$$d \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b$$

El análisis de la cualidad, característica o singularidad D se inicia con el establecimiento, por parte de los responsables técnicos, de la correspondiente matriz.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a & B & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$[D] = \begin{array}{c} b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/4 & 1/2 \\ 2/3 & 4/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos con el mismo tratamiento:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/4 & 1/2 \\ 2/3 & 4/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 5.50 \\ 2.75 \\ 3.67 \\ 5.50 \end{bmatrix} = 5.5\,. \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ .50 \\ .67 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/4 & 1/2 \\ 2/3 & 4/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ .50 \\ .67 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 4.01 \\ 2.00 \\ 2.67 \\ 4.01 \end{bmatrix} = 4.01 \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ .50 \\ .67 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El valor propio dominante es:

$$\lambda_D = 4.01$$

con un índice de coherencia:

$$I_c^{(D)} = \frac{|4.01 - 4|}{4} = 0.0025$$

suficientemente reducido para que la matriz sea aceptada.

Se tiene como vector correspondiente:

$$[V_D] = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ .50 \\ .67 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el cual proporciona el siguiente orden no lineal:

a

$$c \rightarrow b$$

$$d$$

Pasamos, a continuación, a la última cualidad, característica o singularidad considerada como significativa. La matriz es:

$$[E] = \begin{array}{c|cccc|} & a & B & c & d \\ \hline a & 1 & ¾ & 1/2 & 3/2 \\ b & 4/3 & 1 & 2/3 & 2 \\ c & 2 & 3/2 & 1 & 3 \\ d & 2/3 & ½ & 1/3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Continuamos con los correspondientes cálculos:

$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline A & 1 & 3/4 & 1/2 & 3/2 \\ B & 4/3 & 1 & 2/3 & 2 \\ C & 2 & 3/2 & 1 & 3 \\ D & 2/3 & 1/2 & 1/3 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1 \\ d & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|} a & 3.75 \\ b & 5 \\ c & 7.50 \\ d & 2.50 \end{array} = 7.50 \cdot \begin{array}{c|c|} a & .50 \\ b & .67 \\ c & 1 \\ d & .33 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline A & 1 & 3/4 & 1/2 & 3/2 \\ B & 4/3 & 1 & 2/3 & 2 \\ C & 2 & 3/2 & 1 & 3 \\ D & 2/3 & 1/2 & 1/3 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} a & .50 \\ b & .67 \\ c & 1 \\ d & .33 \end{array} = \begin{array}{c|c|} a & 2 \\ b & 2.67 \\ c & 4 \\ d & 1.33 \end{array} = 4 \cdot \begin{array}{c|c|} a & .50 \\ b & .67 \\ c & 1 \\ d & .33 \end{array}$$

De nuevo nos hallamos ante un caso de matriz totalmente coherente ya que:

$$\lambda_E = 4$$

y, por tanto, el índice de coherencia es:

$$I_c^{(E)} = \frac{|4-4|}{4} = 0$$

El vector correspondiente será, ahora:

$$[V_E] = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .67 \\ 1 \\ .33 \end{bmatrix}$$

De esta manera, para la cualidad, característica o singularidad E el orden de preferencia entre deportistas es:

$$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$$

Hasta aquí se han conseguido los dos primeros objetivos. El primero, disponer, para todas y <u>cada una</u> de las cualidades, características y singularidades de unas relaciones total o suficientemente coherentes. En segundo lugar, obtener también para cada cualidad, característica y singularidad individualizada el orden de preferencia entre los deportistas.

Vamos a avanzar en nuestro proceso para conseguir la finalidad perseguida que, recordémoslo, consiste en la obtención de un orden teniendo en cuenta <u>la totalidad</u> de cualidades, características y singularidades. Para ello vamos a agrupar de manera adecuada las ordenaciones individuales, reuniendo los vectores correspondientes y formando, así, una matriz.

En nuestro supuesto se tiene:

[V] =

	A	B	C	D	E
a	.50	.55	.35	1	.50
b	.24	1	.18	.50	.67
c	1	.27	.70	.67	1
d	.34	.94	1	1	.33

Desde una perspectiva general se puede escribir:

$$[V] = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ \\ m \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & & N \\ v_{aA} & v_{aB} & \cdots & v_{aN} \\ v_{bA} & v_{bB} & \cdots & v_{bN} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ v_{mA} & v_{mB} & \cdots & v_{mN} \end{array}$$

La comparación entre los valores de <u>cada una</u> de las columnas permite el orden de preferencia <u>para cada una</u> de las cualidades, características o singularidades. Pero la necesidad de tener en cuenta "agregadamente" todas ellas nos obliga a realizar una primera observación: ¿Resulta adecuado pensar que todas las cualidades, características y singularidades son igualmente importantes para una determinada posición en el equipo? Tenemos que admitir la negación de esta proposición, por lo menos desde un punto de vista general. La igualdad de importancia sólo será, entonces, un caso particular.

Incorporación de la hipótesis de distinta importancia en los criterios

Si nos centramos en este supuesto en el que todas las cualidades, características y singularidades son igualmente importantes, la solución resulta muy sencilla. Basta con obtener, para cada deportista, la media simple de los niveles que posee de las cualidades para obtener el nivel medio que dará, en este caso restrictivo, el grado de aptitud para desarrollar su actividad en la posición estudiada.

En el aspecto operativo y, habida cuenta que los niveles de aptitud de cada deportista quedan reflejados por los valores de la fila de la matriz [V] que le corresponde, el nivel global vendrá dado por la suma de los elementos de cada fila dividido por el número de cualidades, características y singularidades que se han tenido en cuenta.

Así, pues, se tiene, para los deportistas candidatos, los niveles resultantes de las siguientes operaciones:

$$s_i = \frac{\sum_{j=A}^{N} v_{ij}}{\eta} \quad , \ i = a, b, \ldots, m$$

siendo η el número de cualidades, características y singularidades A, B, …, N consideradas significativas.

La ordenación de preferencia tendrá lugar escogiendo en primer lugar el valor más elevado, continuando con los que le siguen de mayor a menor.

Si pasamos a nuestro ejemplo numérico se tiene a partir de la matriz [V] que reproducimos, las valuaciones siguientes:

	A	B	C	D	E
a	.50	.55	.35	1	.50

[V] =	b	.24	1	.18	.50	.67
	c	1	.27	.70	.67	1
	d	.34	.94	1	1	.33

$s_a = 1/5\ (.50 + .55 + .35 + 1 + .50) = .58$

$s_b = 1/5\ (.24 + 1 + .18 + .50 + .67) = .52$

$s_c = 1/5\ (1 + .27 + .70 + .67 + 1) = .73$

$s_d = 1/5\ (.34 + .94 + 1 + 1 + .3) = .72$

Llegamos rápidamente a la conclusión de que el orden de preferencia global entre los deportistas es:

$$c \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b$$

Parece obvio que en la mayor parte de situaciones que la realidad plantea no se ajustan a esta hipótesis tan simplista y, en cambio, se toman en cuenta las distintas cualidades, características y singularidades consideradas con una importancia distinta. Por ello es necesario dar un “peso” diferente a A, B, …, N, para que sirvan, posteriormente, como factores de ponderación.

Varios caminos se pueden seguir para conseguir este objetivo. Nos limitaremos, aquí, a seguir un proceso paralelo al desarrollado hasta ahora en la búsqueda de los vectores propios relativos a cada cualidad, característica o singularidad.

Recordemos que el primer paso consistía en hallar una matriz, que ahora designaremos por [C] la cual debe poner de manifiesto, en cada una de las casillas, las veces que una cualidad, característica o singularidad es más importante que otra. Así, cuando la cualidad A es doblemente importante que la B en la casilla (A, B) se colocará un 2. Evidentemente, la matriz [C] resultante de estas comparaciones deberá poseer la suficiente coherencia para que pueda ser aceptada. Esto exige hallar el índice de coherencia a partir del valor propio dominante.

La representación general puede realizarse de la siguiente manera.

1) Se construye una matriz recíproca [C]:

	A	B		N
A	1	C_{AB}	…	C_{AN}

$$[C] = \begin{array}{c|cccc|} B & C_{BA} & 1 & \dots & C_{BN} \\ & \dots & \dots & & \dots \\ N & C_{NA} & C_{NB} & \dots & 1 \end{array}$$

2) Se halla el valor propio dominante λ y se calcula el índice de coherencia:

$$I = \frac{|\lambda - \mu|}{\mu}$$

en donde μ es el orden de la matriz [C].

3) Si el índice I es suficientemente reducido se acepta la matriz.

4) Obtenemos el vector correspondiente el cual debidamente normalizado dará lugar al vector [N]:

$$[N] = \begin{array}{c|c|} A & p_A \\ B & p_B \\ & \\ N & p_N \end{array}$$

Los elementos de este vector p_j, j = A, B, …, N serán los coeficientes que servirán de "pesos" para señalar la mayor o menor importancia de cada cualidad, característica o singularidad A, B, …, N.

Obtención del orden para la selección óptima

Una vez que se dispone de la matriz [V], en la que se explicita para cada deportista el nivel que posee de todas y cada una de las cualidades, características y singularidades, y el vector [N] que pone en evidencia la importancia relativa de cada una de ellas, la obtención del orden es inmediata: No hay más que hallar la suma de los productos resultantes de multiplicar, para cada deportista, el nivel que posee de cada cualidad, característica o singularidad para los pesos indicativos de su importancia para la posición en el equipo. Como es bien conocido, el operador capaz de realizar esta operación es el de convolución o composición suma-producto.

Utilizando la simbología empleada hasta ahora, se puede escribir:

$$\begin{array}{c|cccc|} & A & B & & N \\ a & v_{aA} & v_{aB} & \dots & v_{aN} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} A & p_A \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} a & s_a \end{array}$$

$$[D] = [V] \mathrm{\ o\ } [N] = \begin{array}{c} b \\ \\ m \end{array} \begin{bmatrix} v_{bA} & v_{bB} & \cdots & v_{bN} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ v_{mA} & v_{mB} & \cdots & v_{mN} \end{bmatrix} \mathrm{\ O\ } \begin{array}{c} B \\ \\ N \end{array} \begin{bmatrix} p_B \\ \cdots \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{array}{c} b \\ \\ m \end{array} \begin{bmatrix} s_b \\ \cdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

Al establecer un orden de mayor a menor entre los valores de s_i, i = a, b, …, m, se obtiene automáticamente el orden de preferencia entre los deportistas a, b, …, m candidatos a ocupar la posición del equipo en liza.

Para finalizar, utilizaremos este algoritmo al caso práctico que venimos desarrollando. Dado que ya se dispone de la matriz [V], pasamos a hallar el vector [N]. Para ello, y siempre partiendo de la información del cuerpo técnico de la Sociedad Anónima Deportiva o Club, se elaborará una matriz [C] que ponga en evidencia las veces que una cualidad, característica o singularidad es más importante que otra. Y esto para todas ellas.

Supongamos que se dispone ya de esta matriz, la cual representamos a continuación:

[C] =

	A	B	C	D	E
A	1	2	2/3	3	½
B	1/2	1	2/5	3/2	¼
C	3/2	5/2	1	9/2	2/3
D	1/3	2/3	2/9	1	2/11
E	2	4	3/2	11/2	1

Pasamos a hallar, simultáneamente, el valor propio dominante λ y el vector correspondiente, que normalizaremos para obtener [N].

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2/3 & 3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2/5 & 3/2 & 1/4 \\ 3/2 & 5/2 & 1 & 9/2 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/9 & 1 & 2/11 \\ 2 & 4 & 3/2 & 11/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \mathrm{\ o\ } \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{bmatrix} 7.17 \\ 3.65 \\ 10.17 \\ 2.40 \\ 14.00 \end{bmatrix} = 14\ . \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{bmatrix} .51 \\ .26 \\ .73 \\ .17 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2/3 & 3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2/5 & 3/2 & 1/4 \\ 3/2 & 5/2 & 1 & 9/2 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/9 & 1 & 2/11 \end{bmatrix} \end{array} \mathrm{\ o\ } \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} .51 \\ .26 \\ .73 \\ .17 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 2.53 \\ 1.31 \\ 3.58 \\ .86 \end{bmatrix} = 5.09\ . \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} .50 \\ .26 \\ .70 \\ .17 \end{bmatrix}$$

E	2	4	3/2	11/2	1		E	1		E	5.09		E	1

	A	B	C	D	E									
A	1	2	2/3	3	1/2		A	.50		A	2.50		A	.50
B	1/2	1	2/5	3/2	1/4		B	.26		B	1.30		B	.26
C	3/2	5/2	1	9/2	2/3	o	C	.70	=	C	3.53	= 5.03 .	C	.70
D	1/3	2/3	2/9	1	2/11		D	.17		D	.85		D	.17
E	2	4	3/2	11/2	1		E	1		E	5.03		E	1

Se tiene, así, como valor propio dominante:

$$\lambda = 5.03$$

y el índice de coherencia de la matriz [C] será:

$$I = \frac{|5.03 - 5|}{5} = 0.006$$

Aceptamos, evidentemente, la coherencia de la matriz y, entonces, el vector correspondiente será:

A	.50
B	.26
C	.70
D	.17
E	1

Para normalizar este vector (estadísticamente hablando) se divide cada uno de sus elementos por su suma. Habida cuenta que:

$$.50 + .26 + .70 + .17 + 1 = 2.63$$

será:

$$p_A = \frac{.50}{2.63} = .19 \quad , \quad p_B = \frac{.26}{2.63} = .10 \quad , \quad p_C = \frac{.70}{2.63} = .27 \quad , \quad p_D = \frac{.17}{2.63} = .06 \quad ,$$

$$p_E = \frac{1}{2.63} = .38$$

Tiene lugar, así, una ponderación convexa, dado que hemos obtenido las p_j, j = A, B, …, E de tal manera que su suma es igual a la unidad.

El vector de pesos normalizado es:

$$[N] = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{|c|} \hline .19 \\ \hline .10 \\ \hline .27 \\ \hline .06 \\ \hline .38 \\ \hline \end{array}$$

El orden de importancia de las cualidades, características y singularidades retenidas es:

$$E \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$$

Disponemos de todos los elementos para hallar definitivamente el orden entre los deportistas candidatos. Para ello obtenemos la convolución suma-producto de [V] por [N]:

$$[D] = [V] \circ [N] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & A & B & C & D & E \\ \hline a & .50 & .55 & .35 & 1 & .50 \\ \hline b & .24 & 1 & .18 & .50 & .67 \\ \hline c & 1 & .27 & .70 & .67 & 1 \\ \hline d & .34 & .94 & 1 & 1 & .33 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} \hline A & .19 \\ \hline B & .10 \\ \hline C & .27 \\ \hline D & .06 \\ \hline E & .38 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|} \hline a & .49 \\ \hline b & .48 \\ \hline c & .83 \\ \hline d & .61 \\ \hline \end{array}$$

Al ser:

$$s_a = .49 \ , s_b = .48 \ , s_c = .83 \ , s_d = .61$$

el orden de preferencia entre los deportistas es:

$$c \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b$$

En el ejemplo concreto que hemos desarrollado se observa el mismo orden tanto en el caso en que la importancia de las cualidades, características y singularidades es la misma como cuando es diferente. No siempre sucede así. Ahora bien, incluso aquí es posible una consideración diferenciadora. En efecto, en el supuesto de igualdad de importancia, el resultado prácticamente no separaba la opción del jugador c y del jugador d, con unos niveles muy parecidos (.73 frente a .72). En cambio, cuando se matiza la importancia de las cualidades, características y singularidades, aparece nítida la opinión de adquirir los derechos del deportista c con un nivel .83 muy superior a la del jugador d cuyo nivel es .61.

La alta apreciación de la cualidad E que posee el deportista c al más alto nivel, ha hecho caer la balanza definitivamente a su favor.

Creemos que las consideraciones teóricas y técnicas presentadas, junto con el ejemplo desarrollado, deben ser suficientes para poner de manifiesto el interés del proceso descrito para dar solución a las realidades actuales, en las cuales la incertidumbre hace muy complejas en un aspecto tan importante de la gestión deportiva como es la adquisición de los derechos de un deportista.

Consideraciones finales

Quizás algunos aspectos de este algoritmo merezcan ciertos comentarios. El primero de ellos hace referencia al origen mismo del proceso propuesto, cuando para la construcción del cuadro de relaciones entre deportistas, por un lado, y cualidades, características y singularidades, por otro, hemos decidido utilizar como base el concepto de comparación. El lector podrá con toda razón, aportar soluciones alternativas que, de alguna manera, lleven a la formación de una matriz que pudiera ser apta para la consecución de los objetivos buscados. Es esto cierto. Ahora bien, cualquiera que fuera la sugerencia suministrada difícilmente podría prescindir del componente numérico. En nuestro caso, nos hemos limitado a utilizar como base el concepto de "relación", elemento fundamental de la matemática no numérica de la incertidumbre. Evidentemente, otros algoritmos existen en este campo y que anteriormente han sido objeto de nuestro estudio y aplicación al mismo objeto material: la adquisición de los servicios de un deportista, llamada coloquialmente fichaje. Cada vez más la incertidumbre creciente obliga a refugiarse en este ámbito del conocimiento, abandonando los estudios numéricos asentados tanto en la medida como en la valuación. Se trata, pues, de otra aportación o, si se quiere, una recuperación de elementos teóricos y técnicos existentes y aplicados por otros, e incluso por nosotros mismos[20] en centros de interés diferentes.

En el desarrollo operativo, las nociones de valor propio dominante y vector correspondiente adquieren un especial protagonismo. Conceptos tomados del cálculo matricial no constituyen una novedad, sino que han visto pasar muchos decenios. Nos ha parecido bueno recurrir a ellos para explicar una operatoria, que hubiera perfectamente subsistido aunque estos nombres fueran obviados. En muchas ocasiones, y ésta es una de ellas, el conectar con vocablos tradicionalmente conocidos y utilizados permite reconducir la razón aclarando, por comparación con lo conocido, cauces emprendidos con marchamo de novedad.

Pero, con independencia de estos aspectos teóricos y técnicos, desearíamos que destacara la utilidad del algoritmo en la más rabiosa realidad. Una más, nos dirán, de las aplicaciones que hemos realizado en este campo. Es bien cierto. Pero la importancia creciente de las masas monetarias colocadas año tras año en el fichaje de jugadores de fútbol europeo, baloncesto, fútbol americano, rugby, etc., creemos que justifica la creación de una amplia caja de herramientas con las características tan apreciadas como son la flexibilidad y la adaptabilidad. Desearíamos que el proceso propuesto las poseyera en un grado suficiente.

Referencias

[1] Gil-Lafuente, J. (1999). *Optimisation in signing on a player in the sphere of uncertainty.* Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS'99. Santiago de Compostela 17-19 Mayo, vol I. pp. 185-196.
Gil-Lafuente, J. (1999). *Management of an investment in a polyvalent player.* Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence ICAI'99. Durban (South Africa) 24-26 September, pp. 169-172.
Gil-Lafuente, J. (1999). *Les Universitats en el Centenari del Futbol Club Barcelona*. Barcelona, España: Ed. FC. Barcelona, pp. 3-53.

[2] Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordrech, London: Kluwer Academic Publishers.

[3] Gil Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty.*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers, p.289.

[4] Se puede consultar, a este respecto, Kaufmann, A. y Gil-Aluja, J. (1993). *Técnicas especiales para la gestión de expertos.* Santiago de Compostela, España: Ed. Milladoiro, pp. 312-313.

[5] Gil Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers , p. 300.

[6] Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1995). *Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas*. Madrid: Ed. Pirámide, pp. 43-46.

[7] Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers, pp. 305-306.

[8] Democrom, M. (1964). *Trabajo presentado por la Compagnie de Machines Bull*. París, consultado en la "Biblioteca Kaufmann" de la Fundación FEGI de Reus (España).

[9] Gil-Lafuente, J. (1999). *Optimisation in signing on a player in the sphere of uncertainty*. Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS'99. Santiago de Compostela, 17-19 Mayo, vol I, pp. 185-196.
Gil-Lafuente, J.(1999). *Management of an investment in a polyvalent player*. Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence ICAI'99. Durban (South Africa) 24-26 September, pp. 169-172.

[10] Gil-Lafuente, J.(1999). *Optimisation in signing on a player in the sphere of uncertainty*. Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS'99. Santiago de Compostela, 17-19 Mayo.
Gil-Lafuente, J.(1999). *Management of an investment in a polivalent player.*Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence ICMI'99. Durban (South Africa) 24-26 September.
Gil-Lafuente, J. (1999). *Les universitats en el Centenari del F.C.* Barcelona, España: Ed. Barcelona F.C.

[11] Gil-Lafuente, J. (2000). *A model for order in the purchase preference for fixed assets in a sporting company.* Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS-2000. Las Palmas de Gran Canaria, 25-27 Septiembre.

[12] Véase a título de ejemplo nuestro trabajo *A model for order in the purchase preference for fixed assets in a sporting company*. Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS-2000. Las Palmas de Gran Canaria, 25-27 Septiembre 2000.

[13] Existen varios algoritmos para la obtención de clases de equivalencia. A título indicativo citaremos el de Malgrange para cuya descripción recomendamos Gil-Aluja, J. (1999) *Elements for a theory of decision in uncertainty.* Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers, p. 289.

[14] Gil-Aluja, J. (1999) *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers, p. 313.

[15] Gil-Lafuente, J. (2000). *A model for order in the purchase preference for fixed assets in a sporting company*. Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS-2000. Las Palmas de Gran Canaria, 25-27 Septiembre.

[16] Gil-Lafuente, J. (1999). *Optimisation in signing on a player in the sphere of uncertainty*. Proceedings of the International Conference on Modelling ans Simulation MS'99, vol. I, pp. 185-196. Santiago de Compostela 17-19 mayo.
Gil-Lafuente, J. (1999). *Management of an investment in a polyvalent player*. Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence ICAI'99. Durban (South Africa) 24-26 Septiembre, pp. 169-172.
Gil-Lafuente, J. (1999). *Les Universitats en el Centenari del Futbol Club Barcelona.* Ed. FC. Barcelona. Barcelona, pp. 3-53.

[17] Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers, pp. 321-324.

[18] Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty.* Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Boston, London, Dordretch, p. 328.

[19] Gil Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, London, Dordretch: Kluwer Academic Publishers, p.. 327-328.

[20] Gil-Lafuente, J. (1997). *Marketing para el nuevo milenio*. Madrid: Ed. Pirámide, pp. 349-352.

Bibliografía

Demoocrom, M. (1964). *Trabajo presentado por la Compagnie de Machines Bull*. París

Gil Aluja, J. (1998). *Investment in uncertainty*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers.

Gil Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordretch, London: Kluwer Academic Publishers.

Gil Lafuente, J. (1997). *Marketing para el nuevo milenio*. Madrid: Ed. Pirámide.

Gil Lafuente, J. (1999). *Optimisation in signing on a player in the sphere of uncertainty*. Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS'99. Santiago de Compostela, 17-19 Mayo. Vol I.

Gil Lafuente, J. (1999). *Management of an investment in a polyvalent player*. Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence ICAI'99. Durban (South Africa) 24-26 Septiembre.

Gil Lafuente, J. (1999). *Les Universitats en el Centenari del Futbol Club Barcelona.* Barcelona, España: Ed. FC. Barcelona.

Gil Lafuente, J. (2000). *A model for order in the purchase preference for fixed assets in a sporting company*. Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation MS'2000. Las Palmas de Gran Canaria, 25-27 Septiembre (pendiente de publicación).

Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1993). *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Santiago de Compostela: Ed. Milladoiro.

Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1995). *Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas.* Madrid: Ed. Pirámide.