Cuarta parte

La asignación óptima de un grupo de deportistas a los distintos puestos de un equipo

El problema de la asignación en la actividad deportiva

En el ámbito de las competiciones deportivas aparece, con mucha frecuencia, la necesidad de adscribir los deportistas que forman parte de una plantilla a los distintos puestos del equipo. Bien es cierto que existen ciertos jugadores cuyas características personales impiden su ubicación en más de un lugar; sin embargo también lo es, que casi todo deportista posee una cierta (amplia o limitada) polivalencia. En el primero de estos supuestos se encuentra el portero de un equipo de fútbol o de handbol, por ejemplo, (en la mayor parte de los casos) y también ciertas posiciones en los equipos de baloncesto (base, pivot, etc.) en general poco o nada polivalentes. Excluyamos, entonces, estos supuestos singulares de nuestro problema asignando directamente cada persona a su único puesto posible. Siempre quedará un núcleo de deportistas capaces, en mayor o menor grado, de realizar una buena actividad en distintas posiciones del equipo. En ellos centraremos nuestra atención.

Ante un planteamiento de esta naturaleza nos proponemos elaborar, o en su caso aplicar, unos algoritmos cuyas bases teóricas son conocidas por los expertos, como consecuencia del tratamiento del llamado “assignment problem”. Para su desarrollo nos hemos basado, principalmente, en una reciente obra[1] que, a nuestro entender constituye un pilar fundamental para las investigaciones en este campo.

Es habitual, diríamos resulta imprescindible, que el número de componentes de un equipo sea superior a los puestos que del mismo es necesario cubrir. De ahí la existencia de unos deportistas “titulares” y otros “suplentes”. El problema que pretendemos resolver significa, en cierto modo, la formación o composición de un “equipo titular” y la designación de los destinados a reemplazar a cada uno de sus miembros cuando se producen ciertas eventualidades (lesiones, baja forma, llamada de los no nacionales por parte de los equipos representativos de sus países, sanciones, etc.).

Los elementos teóricos utilizados para nuestro propósito han sido recogidos de lo que hoy se denomina lógica de la incertidumbre y, a partir de ella, ciertos conceptos y técnicas propias de la teoría de los subconjuntos borrosos han resultado de un incuestionable interés.

Con objeto de centrar el tema en unas dimensiones capaces de aportar un valor metodológico y pedagógico a la vez, vamos a iniciar nuestro desarrollo considerando la existencia de un número limitado de puestos del equipo a cubrir **m,** por un número también limitado de deportistas que optan por un puesto en el equipo titular **r**, en donde $\mathbf{m} \leq \mathbf{r}$. Es evidente que un número igual a $\mathbf{r} - \mathbf{m} \geq 0$ constituirán los deportistas "suplentes" del equipo.

Una vez establecido cuanto acabamos de mencionar, aparece la primera pregunta a ser formulada: en base a qué elementos se establecerá la adscripción o asignación de los deportistas a cada puesto del equipo. Parece evidente que la respuesta es inmediata cuando se piensa que el interés suscitado por los jugadores se halla en sus cualidades, características o singularidades. Dado que entra dentro de la más estricta lógica pensar que cada puesto del equipo exige un perfil ideal en el cual se "debiera" poseer cada cualidad, característica o singularidad a un determinado nivel, será necesario considerar un número, también limitado, **n**, de cualidades, características y singularidades.

Hemos enunciado, así, tres conjuntos de elementos de distinta naturaleza:

$$T = \{t_j \,/\, j = 1, 2, ..., m\}$$

que comprende los **m** puestos a cubrir:

$$P = \{p_i \,/\, i = 1, 2, ..., r\}$$

correspondiente a los deportistas que optan a las plazas:

$$C = \{c_h \,/\, h = 1, 2, ..., n\}$$

el cual recoge las cualidades, características o singularidades a tener en cuenta en la asignación.

A partir de estos tres conjuntos se inicia el proceso con la descripción de los perfiles ideales de cada una de las posiciones a cubrir en el equipo. Esto puede tener lugar utilizando como descriptores unos subconjuntos borrosos del referencial de las **n** cualidades, características o singularidades.

Deberán establecerse, pues, **m** subconjuntos borrosos tales como:

$$\underset{\sim}{t_j} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{c_1} & \multicolumn{1}{c}{c_2} & \multicolumn{1}{c}{c_3} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{c_n} \\ \hline \mu_1^{(j)} & \mu_2^{(j)} & \mu_3^{(j)} & \ldots & \mu_n^{(j)} \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_h^{(j)} \in [0, 1]$$

$$h = 1, 2, ..., n$$

$$j = 1, 2, ..., m$$

Asimismo resultará imperativo poder describir cada uno de los **r** deportistas que aspiran a la titularidad a través de subconjuntos borrosos, también del referencial de las **n** cualidades, características o singularidades. Se dispondrá, pues, de los **r** subconjuntos borrosos siguientes:

$$\underset{\sim}{p_i} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{c_1} & \multicolumn{1}{c}{c_2} & \multicolumn{1}{c}{c_3} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{c_n} \\ \hline \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \mu_3^{(i)} & \ldots & \mu_n^{(i)} \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_h^{(i)} \in [0, 1]$$

$$h = 1, 2, ..., n$$

$$i = 1, 2, ..., r$$

Se dispone, así, de los elementos inicialmente necesarios para llevar a buen término el señalado propósito. Para ello, vamos a hallar el alejamiento o acercamiento existente entre cada uno de los perfiles de los deportistas y cada uno de los perfiles ideales relativos a las posiciones a cubrir. Como es suficientemente conocido, se dispone de determinados instrumentos capaces de conducirnos a este objetivo. Entre ellos recordaremos, como más habitualmente utilizados, la "distancia relativa de Hamming" y el "coeficiente de adecuación" con las correspondientes variantes. Para cada uno de ellos vamos a considerar dos supuestos. El primero hace referencia al supuesto de que cada una de las **n** cualidades, características o singularidades tiene la misma importancia para una posición concreta del equipo. El segundo tiene en cuenta el distinto interés que adquiere cada cualidad, característica o singularidad en una determinada posición.

Aparecen, así, cuatro supuestos básicos, los cuales se pueden resumir en los siguientes apartados:

a) Utilización de la distancia de Hamming.

Comporta, en todo caso, una penalización tanto en el caso de que el nivel de una cualidad que posee un deportista no llegue al exigido en el perfil ideal de la posición, como en el supuesto de sobrepasarlo (tan malo es el defecto como el exceso).

a_1) Todas las cualidades, características o singularidades tienen el mismo interés.

Se utiliza, en este caso, la distancia relativa de Hamming según la siguiente expresión:

$$\delta(t_j, p_i) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} |\mu_h^{(j)} - \mu_h^{(i)}|,$$

$$i = 1, 2, ..., r$$
$$j = 1, 2, ..., m$$

Se hallan, así, **r** x **m** distancias relativas las cuales son susceptibles de ser representadas mediante una matriz rectangular tal como la siguiente:

$$
[\underset{\sim}{D}_1] = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ \\ t_m \end{array}
\begin{array}{cccc}
p_1 & p_2 & & p_r \\
\delta(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_1) & \delta(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \delta(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_r) \\
\delta(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_1) & \delta(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \delta(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_r) \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
\delta(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_1) & \delta(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \delta(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_r)
\end{array}
$$

a_2) Las cualidades, características o singularidades tienen una importancia distinta en cada posición.

Cuando esto sucede, es necesario establecer el "grado" o "nivel" de importancia. Recomendamos situarlo en el segmento [0, 1]. Así, cuanta mayor importancia tenga una cualidad, característica o singularidad se dará un valor más cercano a la unidad, y más alejado en caso contrario.

Llamemos a estos grados o niveles:

$$w_h^{(j)} \in [0, 1],$$

$$j = 1, 2, ..., m$$
$$h = 1, 2, ..., n$$

Con objeto de realizar una ponderación convexa, hallaremos unos pesos $v_h^{(j)}$ tales que:

$$v_h^{(j)} = \frac{w_h^{(j)}}{\sum_{h=1}^{n} w_h^{(j)}}, \ j = 1, 2, ..., m, \ h = 1, 2, ..., n$$

De esta manera se tendrá que:

$$\sum_{h=1}^{n} v_h^{(j)} = 1$$

Con la obtención de los **h** x **j** pesos nos hallamos en disposición de calcular unos índices derivados del concepto de distancia de Hamming, a partir de la fórmula que presentamos a continuación:

$$\varphi\,(t_j, p_i) = \sum_{h=1}^{n} v_h^{(j)} \left| \mu_h^{(j)} - \mu_h^{(i)} \right|,$$

$$i = 1, 2, ..., r$$
$$j = 1, 2, ..., m$$

La agrupación de estos índices permite construir una matriz tal como la siguiente:

$$[\underset{\sim}{D}_2] = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & p_1 & p_2 & & p_r \\ t_1 & \varphi(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_1) & \varphi(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \varphi(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_r) \\ t_2 & \varphi(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_1) & \varphi(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \varphi(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_r) \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_m & \varphi(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_1) & \varphi(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \varphi(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_r) \end{array}$$

b) Utilización del coeficiente de adecuación.

Se halla implícito el principio de penalizar cuando en una cualidad, característica o singularidad, el nivel que posee un deportista es inferior al exigido en el perfil ideal de la posición, pero no se penaliza, ni bonifica, si sobrepasa el nivel exigido (es malo no llegar y se considera igualmente favorable llegar o superarlo).

b_1) Todas las cualidades, características o singularidades tienen la misma importancia.

La expresión capaz de dar una buena valuación puede ser la siguiente:

$$k\,(t_j, p_i) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} [1 \wedge (1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)})],$$

$$i = 1, 2, ..., r$$
$$j = 1, 2, ..., m$$

Los **r** x **m** coeficientes de adecuación son reunidos en una matriz, tal como la presentada a continuación:

$$[\underset{\sim}{K}_1] = \begin{array}{c|cccc|} & p_1 & p_2 & & p_r \\ \hline t_1 & k(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{p}_1) & k(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{p}_2) & \cdots & k(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{p}_r) \\ t_2 & k(\underset{\sim}{t}_2, \underset{\sim}{p}_1) & k(\underset{\sim}{t}_2, \underset{\sim}{p}_2) & \cdots & k(\underset{\sim}{t}_2, \underset{\sim}{p}_r) \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_m & k(\underset{\sim}{t}_m, \underset{\sim}{p}_1) & k(\underset{\sim}{t}_m, \underset{\sim}{p}_2) & \cdots & k(\underset{\sim}{t}_m, \underset{\sim}{p}_r) \\ \hline \end{array}$$

b_2) Las cualidades, características o singularidades son apreciadas a distintos niveles.

Si se consideran como niveles de apreciación, tal como se ha hecho anteriormente, las $w_h^{(j)}$, j = 1, 2, ..., m; h = 1, 2, ..., n, y se transforman en los pesos $v_h^{(j)}$, j = 1, 2, ..., m; h = 1, 2, ..., n para la correspondiente ponderación convexa se puede escribir:

$$\lambda(\underset{\sim}{t}_j, \underset{\sim}{p}_i) = \sum_{h=1}^{n} v_h^{(j)} \left[1 \wedge (1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)})\right],$$

$$i = 1, 2, ..., r$$
$$j = 1, 2, ..., m$$

Nos hallamos en disposición de construir una matriz tal como la presentada seguidamente:

$$[\underset{\sim}{K}_2] = \begin{array}{c|cccc|} & p_1 & p_2 & & p_r \\ \hline t_1 & \lambda(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{p}_1) & \lambda(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \lambda(\underset{\sim}{t}_1, \underset{\sim}{p}_r) \\ t_2 & \lambda(\underset{\sim}{t}_2, \underset{\sim}{p}_1) & \lambda(\underset{\sim}{t}_2, \underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \lambda(\underset{\sim}{t}_2, \underset{\sim}{p}_r) \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_m & \lambda(\underset{\sim}{t}_m, \underset{\sim}{p}_1) & \lambda(\underset{\sim}{t}_m, \underset{\sim}{p}_2) & \cdots & \lambda(\underset{\sim}{t}_m, \underset{\sim}{p}_r) \\ \hline \end{array}$$

La posibilidad de obtener las relaciones borrosas $[\underset{\sim}{D}_1]$, $[\underset{\sim}{D}_2]$, $[\underset{\sim}{K}_1]$, $[\underset{\sim}{K}_2]$ permite afrontar un amplio abanico de situaciones que la actividad deportiva plantea. La utilización de una u otra dependerá, evidentemente, de la mayor o menor adecuación de las hipótesis a la percepción que el sujeto decisor posea de la realidad de cada momento.

Todo cuanto ha sido expuesto hasta ahora, ha tenido por objeto sentar los cimientos sobre los cuales utilizar los distintos algoritmos conducentes a una adecuada asignación.

Un primer procedimiento de cálculo para la asignación

Antes de adentrarnos en la descripción de los algoritmos destinados a la asignación óptima de los deportistas a las distintas posiciones de un equipo, conviene realizar una breve reflexión sobre la naturaleza de las relaciones borrosas $[D_1]$, $[D_2]$, $[K_1]$, $[K_2]$. Así, las dos primeras, creadas al amparo de la noción de distancia ponen en evidencia las desemejanzas entre el deportista ideal y el (o los) real (es). Por tanto, cuanto <u>mayores</u> sean los valores en ellas contenidos, <u>menos</u> "válido" será el correspondiente deportista. En cuanto a las dos segundas, sucede lo contrario, puesto que en la esencia del coeficiente de adecuación se halla la cercanía entre lo deseable y lo que se posee. De esta manera el deportista más apreciado vendrá dado por los valores <u>mayores</u>.

Hecha esta advertencia, dirigida a evitar confusiones, pasemos ya a la presentación de un primer algoritmo[2], el cual, aun cuando no siempre proporciona la solución óptima, sí suministra en todo caso una buena solución. Se trata del algoritmo que hemos denominado "algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas".

Con objeto de realizar una única descripción de los pasos a seguir para la consecución de los resultados deseados, parece oportuno partir de una relación borrosa que posea una misma significación, sea cual fuera el concepto en el cual nos hemos basado para su obtención (distancia o coeficiente de adecuación). Para ello proponemos convertir las matrices de desemejanza $[D_1]$ y $[D_2]$ en relaciones borrosas de semejanza $[\mathsf{D}_1]$ y $[\mathsf{D}_2]$, mediante una simple complementación, es decir, obteniendo para cada uno de los elementos de aquellas matrices los siguientes valores:

$$d\,(t_j, p_i) = 1 - \delta\,(t_j, p_i)$$

$$j\,(t_j, p_i) = 1 - \varphi\,(t_j, p_i),$$

$i = 1, 2, ..., r$

$j = 1, 2, ..., m$

De esta manera la significación de las cuatro matrices es la misma, en el sentido de que las preferencias se dirigen hacia los valores más altos.

Las etapas a seguir son las siguientes:

1) Se parte de una cualquiera de las relaciones borrosas $[D_1]$, $[D_2]$, $[K_1]$, $[K_2]$.

2) Una vez elegida la relación borrosa considerada más adecuada, se busca el elemento de la misma con un valor más elevado.

3) El elemento hallado establece, por la fila y columna a las que pertenece, la adscripción de un deportista a una posición en el equipo, es decir, deportista y lugar en donde va a jugar.

4) Se elimina de la relación borrosa inicialmente escogida la fila y la columna correspondientes al deportista asignado y a la posición por él cubierta. Queda, entonces, una relación borrosa de orden inferior.

5) Con esta nueva relación borrosa se vuelve a iniciar el mismo proceso buscando el elemento con mayor valor.

6) Se pasa a los apartados 3), 4) y 5) repitiendo el camino hasta que la relación borrosa se ha agotado. En el supuesto, por lo demás normal, de que el número de deportistas sea superior al de posiciones a cubrir en el equipo, se habrán ocupado todos los puestos y quedarán sin asignar los jugadores suplentes.

Con objeto de comprobar la sencillez y facilidad de utilización en la realidad, vamos a suponer que se plantea el problema de asignación de 6 jugadores de fútbol a 4 posiciones en el equipo. A efectos simplificadores limitaremos a 8 el número de cualidades, características y singularidades. Las 4 posiciones a cubrir son, por ejemplo, t_4, t_6, t_8, y t_{10}. La descripción de los perfiles ideales viene expresada por los siguientes subconjuntos borrosos:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{t}_1 = & .8 & .9 & .4 & .7 & .6 & 1 & .5 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{t}_6 = & .4 & 1 & .5 & .9 & .8 & .6 & .7 & .9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{t}_8 = & .6 & .7 & .9 & 1 & .7 & .6 & .9 & .6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{t}_{10} = & .9 & 1 & .7 & .8 & .9 & 1 & .6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Los 6 jugadores disponibles en la plantilla susceptibles de ocupar las 4 posiciones del equipo pueden también ser descritos por subconjuntos borrosos del mismo referencial de cualidades, características y singularidades. Supongamos que son los siguientes:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{p}_1 = & .8 & .6 & .9 & .7 & .9 & .8 & .3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{p}_2 = & .6 & .9 & 1 & .8 & .7 & .7 & .9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{p}_3 = & .7 & .8 & .6 & .9 & 1 & .8 & .9 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{p}_4 = & .4 & 1 & .7 & .9 & 1 & .8 & .6 & .7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{p}_5 = & .9 & .7 & .6 & .8 & .7 & .6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline \underset{\sim}{p}_6 = & 1 & .6 & .8 & 1 & .9 & .4 & .8 & .7 \\ \hline \end{array}$$

Con objeto de ver, con toda generalidad, las posibilidades del algoritmo, vamos a establecer como hipótesis previa que cada cualidad, característica y singularidad posee una importancia distinta en cada puesto del equipo y cada una de ellas, en una posición, exige también un nivel diferente. Dado que existen 4 posiciones a cubrir en el equipo y se consideran 8 cualidades, características y singularidades, el total de niveles a establecer será 4 x 8 = 32. Los presentaremos en forma de matriz en [0, 1].

$v_h^{(j)}$	t_4	t_6	t_8	t_{10}
c_1	.14	.07	.11	.15
c_2	.07	.12	.14	.12
c_3	.16	.17	.09	.06
c_4	.18	.07	.13	.14
c_5	.12	.17	.14	.15
c_6	.10	.14	.16	.12
c_7	.14	.10	.11	.15
c_8	.09	.16	.12	.11

A fin de obtener unos pesos que indiquen la importancia relativa de cada cualidad, característica o singularidad hallaremos los valores $v_h^{(j)}$, j = 4, 6, 8, 10, h = 1, 2, ..., 8. Para ello, empezamos por calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{h=1}^{8} w_h^{(4)} = .8 + .4 + .9 + 1 + .7 + .6 + .8 + .5 = 5.7$$

$$\sum_{h=1}^{8} w_h^{(6)} = .4 + .7 + 1 + .4 + 1 + .8 + .6 + .9 = 5.8$$

$$\sum_{h=1}^{8} w_h^{(8)} = .7 + .9 + .6 + .8 + .9 + 1 + .7 + .8 = 6.4$$

$$\sum_{h=1}^{8} w_h^{(10)} = 1 + .8 + .4 + .9 + 1 + .8 + 1 + .7 = 6.6$$

Al hacer, tal como se ha señalado anteriormente:

$$v_h^{(j)} = \frac{w_h^{(j)}}{\sum_{h=1}^{8} w_h^{(j)}}, \; j = 4, 6, 8, 10$$

se obtiene la siguiente matriz de pesos:

$v_h^{(j)}$	t_4	t_6	t_8	t_{10}
c_1	.14	.07	.11	.15
c_2	.07	.12	.14	.12
c_3	.16	.17	.09	.06
c_4	.18	.07	.13	.14
c_5	.12	.17	.14	.15
c_6	.10	.14	.16	.12
c_7	.14	.10	.11	.15
c_8	.09	.16	.12	.11

Nos hallamos, ya, en disposición de construir las relaciones borrosas a partir de las cuales utilizar el algoritmo propuesto. Con objeto de presentar un panorama lo más general posible, a la vez que evitar excesivas reiteraciones, nos limitaremos a la descripción del procedimiento de cálculo a partir de las matrices $[D_2]$ y $[K_2]$, lo cual implica tomar como base, la distancia de Hamming, en la primera, y el coeficiente de adecuación, en la segunda.

1) Seguimos el proceso calculatorio señalado en el apartado a_2) del epígrafe anterior, hallando las valuaciones:

$$\varphi\,(t_j, p_i) = \sum_{h=1}^{8} v_h^{(j)}\,|\,\mu_h^{(j)} - \mu_h^{(i)}\,|\,,$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$j = 4, 6, 8, 10$

Presentamos el detalle de las operaciones para las primeras valuaciones, dando únicamente los resultados de todas ellas ya incorporadas en la correspondiente relación borrosa [D_2]. Se tiene, así:

$$\varphi\,(t_4,p_1) = 0.14.|.8 - .8| + 0.07.|.9 - .6| + 0.16.|.4 - .9| + 0.18.|.7 - .7| + 0.12.|.6 - .9| + 0.10.|1 - .8| + 0.14.|.5 - .3| + 0.09.|.8 - 1| = 0.20$$

$$\varphi\,(t_4, p_2) = 0.14.|.8 - .6| + 0.07.|.9 - .9| + 0.16.|.4 - 1| + 0.18.|.7 - .8| + 0.12.|.6 - .7| + 0.10.|1 - .7| + 0.14.|.5 - .9| + 0.09.|.8 - 1| = 0.26$$

$$\varphi\,(t_4, p_3) = 0.14.|.8 - .7| + 0.07.|.9 - .8| + 0.16.|.4 - .6| + 0.18.|.7 - .9| + 0.12.|.6 - 1| + 0.10.|1 - .8| + 0.14.|.5 - .9| + 0.09.|.8 - .8| = 0.21$$

....

Prosiguiendo con estos mismos cálculos para el resto de índices, se llega a la obtención de la siguiente relación borrosa:

[D_2] =

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.20	.26	.21	.24	.22	.31
t_6	.26	.18	.16	.14	.16	.24
t_8	.24	.13	.16	.21	.15	.15
t_{10}	.16	.19	.18	.16	.18	.23

A partir de la relación borrosa [D_2], (relación de desemejanza) se obtiene la relación [D_2] (relación de semejanza) mediante la complementación. Resulta:

$$[D_2] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ \hline t_4 & .80 & .74 & .79 & .76 & .78 & .69 \\ \hline t_6 & .74 & .82 & .84 & .86 & .84 & .76 \\ \hline t_8 & .76 & .87 & .84 & .79 & .85 & .85 \\ \hline t_{10} & .84 & .81 & .82 & .84 & .82 & .77 \\ \hline \end{array}$$

Una vez hallada la relación de semejanza $[D_2]$ se elige el elemento con un valor más elevado. Se trata en este caso del (t_8, p_2) con una valuación $\varphi(t_8, p_2) = 0.87$.

Se asigna la posición del equipo t_8 al deportista p_2

Según el algoritmo propuesto, se elimina, ahora, la fila t_8 y la columna p_2. Queda la siguiente relación borrosa de orden inferior:

	p_1	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.80	.79	.76	.78	.69
t_6	.74	.84	.86	.84	.76
t_{10}	.84	.82	.84	.82	.77

El mayor valor aparece en la casilla correspondiente a la fila t_6 y columna p_4 con una valuación $\varphi(t_6, p_4) = 0.86$.

Se asigna la posición del equipo t_6 al deportista p_4

Continuamos con el algoritmo eliminando la fila t_6 y la columna p_4. Resulta:

	p_1	p_3	p_5	p_6
t_4	.80	.79	.78	.69
t_{10}	.84	.82	.82	.77

La cifra más elevada se halla en la fila t_{10} y la columna p_1 con una valuación $\varphi(t_{10}, p_1) = 0.84$.

Se asigna la posición del equipo t_{10} al deportista p_1

Al prescindir de la fila t_{10} y la columna p_1 queda finalmente:

	p_3	p_5	p_6
t_4	.79	.78	.69

El mayor de los valores se halla en la casilla (t_4, p_3) con una valuación $\varphi(t_4, p_3) = 0.79$, seguido muy de cerca por la del elemento (t_4, p_5). Técnicamente debe escogerse, entonces, (t_4, p_3). Ahora bien, en la práctica, la cercanía aconseja no rechazar de inmediato la alternativa (t_4, p_5) sin un posterior análisis. En la incertidumbre resulta prudente la cautela como consecuencia de la subjetividad inherente a las informaciones iniciales. A nuestros efectos, nos limitamos a las consideraciones puramente técnicas.

Se asigna la posición del equipo t_4 al deportista p_3

De esta manera, quedarían relegados a la situación de suplentes o "reservas" los deportistas p_5 y p_6, aunque el p_5 pueda ser una solución para alternar con cierta frecuencia con el deportista p_3 para la posición t_4.

El "grado total de idoneidad" podría ser valuado a partir de la suma:

$$\varphi(t_8, p_2) + \varphi(t_6, p_4) + \varphi(t_{10}, p_1) + \varphi(t_4, p_3) = 0.87 + 0.86 + 0.84 + 0.79 = 3.36$$

Una simple mirada a las valuaciones obtenidas nos induce a pensar que si bien las posiciones t_6, t_8 y t_{10} se hallan confortablemente cubiertas (sobre todo las dos primeras), no sucede lo mismo con la posición t_4 cuyo deportista sólo posee un grado de idoneidad de 0.79. Entra dentro de lo posible que esta posición o puesto del equipo sea muy importante, en general para toda la competición o para varios partidos. Entonces, se habría creado un punto o zona "negra" de consecuencias negativas, a las cuales debe dársele una solución.

Esta breve reflexión pone de manifiesto que el proceso sugerido permite también detectar las eventuales posiciones del equipo susceptibles de ser reforzadas.

En resumen se tiene:

Deportistas titulares	*Posiciones equipo*

p_1 ———————— t_{10}

p_2 ———————— t_8

p_3 ———————— t_4

p_4 ———————— t_6

Deportistas suplentes: p_5 y p_6.

En todo caso no se puede olvidar que se trata de un procedimiento de <u>aproximación</u> al óptimo, nunca de algoritmos de optimización.

2) Pasemos, ahora, al proceso de cálculo correspondiente al apartado b_2) del epígrafe anterior, con la obtención de las valuaciones:

$$\lambda\,(t_j, p_i) = \sum_{h=1}^{8} v_h^{(j)}\,[1 \wedge (1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)})]$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$j = 4, 6, 8, 10$$

Como hemos hecho anteriormente, presentamos el detalle de las operaciones para hallar las valuaciones de los primeros elementos de la relación borrosa $[K_2]$ presentando el resto de los resultados ya formando parte de la matriz completa. Se tiene:

$$\lambda\,(t_4, p_1) = 0.14\,[1 \wedge (1 - .8 + .8)] + 0.07\,[1 \wedge (1 - .9 + .6)] + 0.16\,[1 \wedge (1 - .4 + .9)] + 0.18\,[1 \wedge (1 - .7 + .7)] + 0.12\,[1 \wedge (1 - .6 + .9)] + 0.10\,[1 \wedge (1 - 1 + .8)] + 0.14\,[1 \wedge (1 - .5 + .3)] + 0.09\,[1 \wedge (1 - .8 + 1)] = 0.93$$

$$\lambda\,(t_4, p_2) = 0.14\,[1 \wedge (1 - .8 + .6)] + 0.07\,[1 \wedge (1 - .9 + .9)] + 0.16\,[1 \wedge (1 - .4 + 1)] + 0.18\,[1 \wedge (1 - .7 + .8)] + 0.12\,[1 \wedge (1 - .6 + .7)] + 0.10\,[1 \wedge (1 - 1 + .7)] + 0.14\,[1 \wedge (1 - .5 + .9)] + 0.09\,[1 \wedge (1 - .8 + 1)] = 0.94$$

$$\lambda\,(t_4, p_3) = 0.14\,[1 \wedge (1 - .8 + .7)] + 0.07\,[1 \wedge (1 - .9 + .8)] + 0.16\,[1 \wedge (1 - .4 + .6)] + 0.18\,[1 \wedge (1 - .7 + .9)] + 0.12\,[1 \wedge (1 - .6 + 1)] + 0.10\,[1 \wedge (1 - 1 + .8)] + 0.14\,[1 \wedge (1 - .5 + .9)] + 0.09\,[1 \wedge (1 - .8 + .8)] = 0.96$$

....

Y así, sucesivamente se obtiene la siguiente relación borrosa:

$$[K_2] : \begin{array}{c} \\ t_4 \\ t_6 \\ t_8 \\ t_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} .93 & .94 & .96 & .92 & .95 & .91 \\ .90 & .96 & .96 & .96 & .94 & .89 \\ .88 & .97 & .96 & .91 & .95 & .93 \\ .85 & .88 & .89 & .87 & .88 & .85 \end{array}\right] \end{array}$$

Utilizaremos, ahora, el algoritmo a partir de esta relación borrosa. Para ello empezaremos por escoger la mayor cifra existente entre todos los elementos de la matriz. Se trata del (t_8, p_2) con un valor $\lambda(t_8, p_2) = 0.97$.

Se asigna, así, el deportista p_2 a la posición t_8

Al eliminar la fila t_8 y la columna p_2 resulta la relación borrosa siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} .93 & .96 & .92 & .95 & .91 \\ .90 & .96 & .96 & .94 & .89 \\ .85 & .89 & .87 & .88 & .85 \end{array}\right] \end{array}$$

Se observa que aparecen, ahora, tres casillas en las cuales existe el mismo valor (el más grande). Se trata de los elementos (t_4, p_3), (t_6, p_3), (t_6, p_4), todos ellos con una cifra igual a 0.96. Habida cuenta que el deportista p_3 es capaz de actuar al mismo nivel en los puestos del equipo t_4 y t_6 mientras que el deportista p_4 sólo puede hacerlo a este nivel en el puesto t_6, conviene asignar al deportista p_3 la posición que no es capaz de ocupar adecuadamente el otro deportista.

Se asigna, por ello, el deportista p_3 a la posición t_4

Procede eliminar la fila t_4 y la columna p_3. Queda, entonces:

	p_1	p_4	p_5	p_6
t_6	.90	.96	.94	.89
t_{10}	.85	.87	.88	.85

Al existir un único valor máximo en la casilla (t_6, p_4) igual a λ (t_6, p_4) = 0.96 se establece la correspondiente asignación.

Se asigna el deportista p_4 a la posición t_6

Eliminamos la fila t_6 y la columna p_4, quedando la relación borrosa:

	p_1	p_5	p_6
t_{10}	.85	.88	.85

en la cual aparece como mayor valor el situado en la casilla (t_{10}, p_5) con λ (t_{10}, p_5) = 0.88.

Se asigna, entonces, el deportista p_5 a la posición t_{10}

Con esta asignación queda agotado el algoritmo. Realizadas todas las asignaciones quedan como suplentes los deportistas p_1 y p_6.

El "grado total de adecuación" sería ahora:

$$\lambda (t_8, p_2) + \lambda (t_4, p_3) + \lambda (t_6, p_4) + \lambda (t_{10}, p_5) = 0.97 + 0.96 + 0.96 + 0.88 = 3.77$$

En resumen, las adscripciones son:

Deportistas titulares		Posiciones equipo
p_2	———	t_8
p_3	———	t_4

p_4 ———————————————— t_6

p_5 ———————————————— t_{10}

El algoritmo húngaro de asignación

El procedimiento de cálculo que vamos a describir a continuación recibe la denominación de "húngaro" como consecuencia de la nacionalidad de König[3].

Se acostumbra utilizar el algoritmo húngaro para la obtención de un óptimo por minimización. Si seguimos esta tradición, la relación borrosa de partida deberá ser la de una matriz de desemejanza (de distancias o complementaria a la de adecuación) a diferencia del algoritmo descrito en el epígrafe anterior, basado en matrices de semejanza (complementaria a la de distancias) o la de adecuación.

En este trabajo, las relaciones borrosas a partir de las cuales se levantará el algoritmo son la [D_1], [D_2], [K_1], [K_2].

Vamos a ver cuáles son las etapas que forman este algortimo[4].

1) Dada una matriz de la naturaleza señalada, se resta de todos los elementos de cada columna el valor más pequeño de la misma. Se hace lo mismo, después, en cada fila. De esta manera existe, por lo menos un cero en cada columna y en cada fila.

2) Se mira si es posible una afectación en la que los valores de la solución sean todos nulos. En caso positivo se ha obtenido un óptimo. En el caso contrario se sigue el proceso. Para ello:

a) Se consideran una a una las filas que contienen menos ceros.

b) Se encuadra uno de los ceros de cada fila y se tachan los demás ceros de la fila y columna a la que el cero encuadrado pertenece.

.

c) Se repite este proceso con las filas que contienen cada vez más ceros hasta que no quedan ceros por encuadrar.

3) Obtención del menor número de filas y columnas que contienen los ceros. Para ello:

a) Se señalan con una flecha ← las filas en las que no existe un cero encuadrado.

b) Se señalan con una flecha ↑ las columnas en las que sí existe un cero tachado en una fila señalada con flecha.

c) Se señalan con una flecha ← aquellas filas en las que sí existe un cero encuadrado en una columna señalada con flecha.

d) Se repite b) y c) hasta que no se puedan señalar más filas o columnas.

e) Se traza una línea en las filas no marcadas por flechas y una línea en las columnas sí marcadas por flechas. Estas filas y columnas constituyen el menor número de ellas que poseen ceros encuadrados o tachados.

4) Se escoge entre los elementos de la matriz que no han sido rayados, el valor más pequeño. Esta cifra se resta de los elementos de las columnas no rayadas y se suma a los elementos de las filas sí rayadas. Se obtiene una nueva matriz.

5) Con la nueva matriz se pasa al apartado 2), siguiendo el mismo proceso utilizado pero ahora con los elementos de la nueva matriz. Si se halla una solución óptima nos detenemos y llegamos al punto final. En caso contrario, se continúa con los apartados 3) y 4) y si fuera necesario se vuelve al 2).

Como pone en evidencia Gil Aluja "hallada una solución ésta no tiene porqué ser única, pudiendo, por tanto, existir otras"[5].

Estos elementos técnicos previos permiten resolver el problema de la asignación, ahora sí óptima, de los deportistas a las posiciones de un equipo.

Utilizando las mismas informaciones del apartado anterior, vamos desarrollar, a continuación, las distintas fases del algoritmo húngaro, a partir de las relaciones borrosas [D_2] primero y [K_2] después.

Reproducimos la relación borrosa [D_2]:

$$[D_2] = \begin{array}{c} \\ t_4 \\ t_6 \\ t_8 \\ t_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline .20 & .26 & .21 & .24 & .22 & .31 \\ \hline .26 & .18 & .16 & .14 & .16 & .24 \\ \hline .24 & .13 & .16 & .21 & .15 & .15 \\ \hline .16 & .19 & .18 & .16 & .18 & .23 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Introduzcamos, ahora, las plazas de suplente, en nuestro caso dos. Con objeto de evitar que entorpezcan el funcionamiento del procedimiento calculatorio, se supone que todos los deportistas se hallan muy alejados de estas posiciones (nadie se entrena con el objetivo de ser el sustituto de otros) y, por tanto, las distancias son máximas. En la práctica esto se resuelve añadiendo dos filas a la anterior relación borrosa [D_2] convirtiéndola, así, de rectangular a cuadrada. Llamando s_1 y s_2 a estas posiciones, se tiene la siguiente matriz:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.20	.26	.21	.24	.22	.31
t_6	.26	.18	.16	.14	.16	.24
t_8	.24	.13	.16	.21	.15	.15
t_{10}	.16	.19	.18	.16	.18	.23
s_1	1	1	1	1	1	1
s_2	1	1	1	1	1	1

Iniciamos el algoritmo restando a los elementos de cada columna el menor valor existente en cada una de ellas. Se obtiene:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.04	.13	.05	.10	.07	.16
t_6	.10	.05	0	0	.01	.09
t_8	.08	0	0	.07	0	0
t_{10}	0	.06	.02	.02	.03	.08
s_1	.84	.87	.84	.86	.85	.85
s_2	.84	.87	.84	.86	.85	.85
	.16	.13	.16	.14	.15	.15

Debajo de cada columna aparece la cantidad deducida a todos sus elementos.

Pasamos, seguidamente, a restar el menor valor de cada fila a los elementos de la propia fila:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	0	.09	.01	.06	.03	.12	.04
t_6	.10	.05	0	0	.01	.09	0
t_8	.08	0	0	.07	0	0	0
t_{10}	0	.06	.02	.02	.03	.08	0
s_1	0	.03	0	.02	.01	.01	.84
s_2	0	.03	0	.02	.01	.01	.84
	.16	.13	.16	.14	.15	.15	

Se consideran una a una cada fila empezando con las que poseen menos ceros. Establecemos el siguiente orden: t_4, t_{10}, t_6, s_1, s_2, t_8. Procedemos al encuadre y tachadura de ceros. Resulta:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\boxed{0}$	.09	.01	.06	.03	.12
t_6	.10	.05	~~0~~	$\boxed{0}$	.01	.09
t_8	.08	$\boxed{0}$	~~0~~	.07	~~0~~	~~0~~
t_{10}	~~0~~	.06	.02	.02	.03	.08
s_1	~~0~~	.03	$\boxed{0}$	.02	.01	.01
s_2	~~0~~	.03	~~0~~	.02	.01	.01

Habida cuenta de que existen 6 posiciones a cubrir (titulares más suplentes) y sólo 4 ceros encuadrados (cuatro asignaciones) no se ha producido la total afectación y es necesario continuar el proceso. Señalemos convenientemente con flechas las filas y columnas según lo establecido por el algoritmo.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	$\boxed{0}$	.09	.01	.06	.03	.12	←
t_6	.10	.05	~~0~~	$\boxed{0}$	.01	.09	
t_8	.08	$\boxed{0}$	~~0~~	.07	~~0~~	~~0~~	
t_{10}	~~0~~	.06	.02	.02	.03	.08	←
s_1	~~0~~	.03	$\boxed{0}$	.02	.01	.01	←
s_2	~~0~~	.03	~~0~~	.02	.01	.01	←
	↑		↑				

Se trazan las líneas en las filas <u>no</u> señaladas con flecha y las columnas <u>sí</u> señaladas con flecha.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	$\boxed{0}$	.09	.01	.06	.03	.12	←
t_6	.10	.05	~~0~~	$\boxed{0}$	.01	.09	
t_8	.08	$\boxed{0}$	~~0~~	.07	~~0~~	~~0~~	
t_{10}	~~0~~	.06	.02	.02	.03	.08	←
s_1	~~0~~	.03	$\boxed{0}$	.02	.01	.01	←
s_2	~~0~~	.03	~~0~~	.02	.01	.01	←
	↑		↑				

Ponemos de manifiesto la submatriz formada por los elementos de la matriz anterior no atravesados por líneas. Se tiene:

	p_2	p_4	p_5	p_6
t_4	.09	.06	.03	.12
t_{10}	.06	.02	.03	.08
s_1	.03	.02	.01	.01
s_2	.03	.02	.01	.01

El valor más pequeño de esta matriz es 0.01, el cual se resta de los elementos de las columnas, <u>no</u> rayadas (p_2, p_4, p_5, p_6) y se suma a los elementos de las filas <u>sí</u> rayadas (t_6, t_8). La matriz resultante es la siguiente:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0	.08	.01	.05	.02	.11
t_6	.11	.05	.01	0	.01	.09
t_8	.09	0	.01	.07	0	0
t_{10}	0	.05	.02	.01	.02	.07
s_1	0	.02	0	.01	0	0
s_2	0	.02	0	.01	0	0

Procedemos al encuadre y tachadura de ceros siguiendo el orden de filas t_4, t_6, t_{10}, t_8, s_1, s_2. Se obtiene:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\boxed{0}$	.08	.01	.05	.02	.11
t_6	.11	.05	.01	$\boxed{0}$	.01	.09
t_8	.09	$\boxed{0}$	.01	.07	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	$\cancel{0}$	.05	.02	.01	.02	.07
s_1	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
s_2	$\cancel{0}$	.02	$\cancel{0}$	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$

Colocación de flechas en filas y columnas:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\boxed{0}$	.08	.01	.05	.02	.11
t_6	.11	.05	.01	$\boxed{0}$	.01	.09
t_8	.09	$\boxed{0}$	.01	.07	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	$\cancel{0}$	.05	.02	.01	.02	.07
s_1	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
s_2	$\cancel{0}$	.02	$\cancel{0}$	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$

Trazado de líneas:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\boxed{0}$	.08	.01	.05	.02	.11
t_6	.11	.05	.01	$\boxed{0}$	.01	.09
t_8	.09	$\boxed{0}$	.01	.07	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	$\cancel{0}$	.05	.02	.01	.02	.07
s_1	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
s_2	$\cancel{0}$	.02	$\cancel{0}$	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$

Submatriz no anulada por líneas:

	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.08	.01	.05	.02	.11
t_{10}	.05	.02	.01	.02	.07

El valor más pequeño es 0.01. Se resta de las columnas <u>no</u> rayadas (p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) y se suma a las filas <u>sí</u> rayadas (t_6, t_8, s_1, s_2). La nueva matriz es:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0	.07	0	.04	.01	.10
t_6	.12	.05	.01	0	.01	.09
t_8	.10	0	.01	.07	0	0
t_{10}	0	.04	.01	0	.01	.06
s_1	.01	.02	0	.01	0	0
s_2	.01	.02	0	.01	0	0

Reiniciamos el proceso con el encuadre y tachadura de ceros. Tomamos como orden de filas: t_6, t_4, t_{10}, t_8, s_1, s_2. Hallamos:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\cancel{0}$	.07	$\boxed{0}$	.04	.01	.10
t_6	.12	.05	.01	$\boxed{0}$	.01	.09
t_8	.10	$\boxed{0}$	.01	.07	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	$\boxed{0}$	.04	.01	$\cancel{0}$	.01	.06
s_1	.01	.02	$\cancel{0}$	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
s_2	.01	.02	$\cancel{0}$	.01	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$

La existencia de 6 ceros encuadrados en una matriz de 6 x 6 indica que se ha producido ya la asignación óptima. La posición de estos ceros encuadrados nos da automáticamente el resultado apetecido que, en nuestro caso, es:

Deportistas titulares	*Posiciones en el equipo*
p_1	t_{10}
p_2	t_8
p_3	t_4
p_4	t_6

Siendo los deportistas suplentes p_5 y p_6.

En este caso concreto, se observa que el resultado obtenido con la utilización del algoritmo húngaro coincide con el algoritmo por eliminación de filas y columnas, el cual, repitámoslo una vez más, no siempre proporciona una asignación óptima.

Pasamos, seguidamente, a rehacer el proceso, utilizando para ello la relación borrosa [K_2], tomando como base la matriz [K_2], que reproducimos:

$[K_2] =$

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.93	.94	.96	.92	.95	.91
t_6	.90	.96	.96	.96	.94	.89
t_8	.88	.97	.96	.91	.95	.93
t_{10}	.85	.88	.89	.87	.88	.85

A partir de esta relación borrosa se obtiene la [K_2]:

$[K_2] =$

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.07	.06	.04	.08	.05	.09
t_6	.10	.04	.04	.04	.06	.11
t_8	.12	.03	.04	.09	.05	.07
t_{10}	.15	.12	.11	.13	.12	.15

Tal como hemos hecho en la aplicación anterior se añaden, ahora, las dos filas correspondientes a los puestos de suplencia. Resulta:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.07	.06	.04	.08	.05	.09
t_6	.10	.04	.04	.04	.06	.11
t_8	.12	.03	.04	.09	.05	.07
t_{10}	.15	.12	.11	.13	.12	.15
s_1	1	1	1	1	1	1
s_2	1	1	1	1	1	1

Iniciamos las fases del algoritmo deduciendo a los elementos de cada columna el menor valor de cada una de ellas:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0	.03	0	.04	0	.02
t_6	.03	.01	0	0	.01	.04
t_8	.05	0	0	.05	0	0
t_{10}	.08	.09	.07	.09	.07	.08
s_1	.93	.97	.96	.96	.95	.93
s_2	.93	.97	.96	.96	.95	.93
	.07	.03	.04	.04	.05	.07

Restamos, ahora, a los elementos de cada fila, el menor valor de cada una de ellas:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	0	.03	0	.04	0	.02	0
t_6	.03	.01	0	0	.01	.04	0
t_8	.05	0	0	.05	0	0	0
t_{10}	.01	.02	0	.02	0	.01	.07
s_1	0	.04	.03	.03	.02	0	.93
s_2	0	.04	.03	.03	.02	0	.93
	.07	.03	.04	.04	.05	.07	

Se realiza el encuadre y tachadura de ceros con el siguiente orden de filas: t_6, t_{10}, s_1, s_2, t_4, t_8.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\cancel{0}$	.03	$\cancel{0}$	.04	$\boxed{0}$	.02
t_6	.03	.01	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	.01	.04
t_8	.05	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.05	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	.01	.02	$\boxed{0}$	.02	$\cancel{0}$	.01
s_1	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\boxed{0}$
s_2	$\boxed{0}$	.04	.03	.03	.02	$\cancel{0}$

Se puede observar que los encuadres realizados proporcionan ya una asignación óptima al existir tantos encuadres como número de filas y columnas de la relación borrosa.

Ahora bien, la misma matriz no proporcionaría en esta fase inicial del algoritmo la solución hallada si el encuadre y tachadura de ceros hubiera sido distinto, aun dentro de las reglas del algoritmo. Por ejemplo, si en el primer encuadre, el de la fila t_6, en lugar de encuadrar el cero del elemento (t_6, p_4) se hubiera encuadrado el (t_6, p_3), no se habría hallado, de inmediato, la asignación óptima. Veamos lo que hubiera sucedido. El encuadre y tachadura de ceros hubiera podido ser:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\cancel{0}$	.03	$\cancel{0}$	.04	$\cancel{0}$	.02
t_6	.03	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.01	.04
t_8	.05	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.05	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	.01	.02	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01
s_1	$\boxed{0}$	.04	.03	.03	.02	$\cancel{0}$
s_2	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\boxed{0}$

La colocación de flechas en filas y columnas es la siguiente:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	$\cancel{0}$	.03	$\cancel{0}$	.04	$\cancel{0}$	.02	←
t_6	.03	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.01	.04	←
t_8	.05	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.05	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	
t_{10}	.01	.02	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01	←
s_1	$\boxed{0}$	.04	.03	.03	.02	$\cancel{0}$	←
s_2	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\boxed{0}$	←
	↑		↑	↑	↑	↑	

Procedemos al trazado de líneas:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	$\cancel{0}$	.03	$\cancel{0}$	.04	$\cancel{0}$	.02	←
t_6	.03	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.01	.04	←
t_8	.05	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.05	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	
t_{10}	.01	.02	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01	←
s_1	$\boxed{0}$	.04	.03	.03	.02	$\cancel{0}$	←
s_2	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\boxed{0}$	←
	↑		↑	↑	↑	↑	

La submatriz no anulada por líneas es:

	p_2
t_4	.03
t_6	.01
t_{10}	.02
s_1	.04
s_2	.04

Se comprueba que el valor más pequeño es 0.01. Al restarlo a la columna p_2 y sumarlo a la fila t_8 se tiene una nueva relación borrosa:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0	.02	0	.04	0	.02
t_6	.03	0	0	0	.01	.04
t_8	.06	0	.01	.06	.01	.01
t_{10}	.01	.01	0	.02	0	.01
s_1	0	.03	.03	.03	.02	0
s_2	0	.03	.03	.03	.02	0

A partir de esta relación borrosa, se inicia una vez más el proceso.

Encuadre y tachadura de ceros. Orden: t_8, t_{10}, s_1, s_2, t_4, t_6.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\cancel{0}$	.02	$\cancel{0}$	.04	$\boxed{0}$	.02
t_6	.03	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	.01	.04
t_8	.06	$\boxed{0}$	.01	.06	.01	.01
t_{10}	.01	.01	$\boxed{0}$	.02	$\cancel{0}$	.01
s_1	$\cancel{0}$	.03	.03	.03	.02	$\boxed{0}$
s_2	$\boxed{0}$	.03	.03	.03	.02	$\cancel{0}$

Al haber un cero encuadrado en cada fila y cada columna podemos dar por cerrado el algoritmo. La asignación, como no podría ser de otra manera, coincide con la hallada al realizar el anterior encuadre.

Para agotar prácticamente todas las posibilidades de este algoritmo, veamos, brevemente, un aspecto práctico de su funcionamiento.

Cuando se trata de encuadrar y tachar ceros, hasta ahora hemos predeterminado el orden de las filas, escogiendo sucesivamente aquellas que tienen “inicialmente” menos ceros. Pero el procedimiento de cálculo continúa siendo válido sin el establecimiento previo del orden en que se van a analizar las filas. Se puede iniciar esta parte del proceso con la fila (o una de las filas) que tiene menos ceros e ir escogiendo, a medida que avanza el encuadre, la fila que “se va quedando” con menos ceros.

Para aclarar cuanto acabamos de señalar, vamos a repetir el inicio del algoritmo con nuestro ejemplo sin predeterminar el orden de análisis de las filas

Reproducimos, una vez más, la relación borrosa inicial:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0	.03	0	.04	0	.02
t_6	.03	.01	0	0	.01	.04
t_8	.05	0	0	.05	0	0
t_{10}	.01	.02	0	.02	0	.01
s_1	0	.04	.03	.03	.02	0
s_2	0	.04	.03	.03	.02	0

Escogemos, en primer lugar, una de las filas con menos ceros. Por ejemplo la t_6. Una vez hecho el encuadre, la única fila con un solo cero es la t_{10}. Escogemos, ahora, ésta. Pasamos, luego, a la fila con un solo cero, la t_4. Sucesivamente encuadramos los ceros de la fila s_1 y t_8. Al no haber ningún cero encuadrado en la fila s_2, se cierra esta fase del algoritmo

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	$\boxed{0}$	.03	$\cancel{0}$	.04	$\cancel{0}$	.02
t_6	.03	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.01	.04
t_8	.05	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.05	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
t_{10}	.01	.02	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01
s_1	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\boxed{0}$
s_2	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\cancel{0}$

Veamos, a continuación, la colocación de flechas.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	$\boxed{0}$	.03	$\cancel{0}$	.04	$\cancel{0}$	.02	←
t_6	.03	.01	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.01	.04	←
t_8	.05	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	.05	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	
t_{10}	.01	.02	$\cancel{0}$	.02	$\boxed{0}$	.01	←
s_1	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\boxed{0}$	←
s_2	$\cancel{0}$	.04	.03	.03	.02	$\cancel{0}$	←
	↑		↑	↑	↑	↑	

Se llega a la misma situación que la existente al predeterminar el orden de las filas para el encuadre y tachadura de ceros.

En algunas ocasiones este último procedimiento puede acortar la duración del algoritmo aunque, generalmente, no resulta significativo.

No continuamos con el algoritmo habida cuenta de que los siguientes pasos coinciden, puntualmente, con el desarrollo precedente.

Pasemos, pues, a explicitar el resultado. La asignación resulta, en este caso la siguiente

Deportistas titulares	*Posiciones equipo*
p_2 ————————	t_8
p_3 ————————	t_{10}
p_4 ————————	t_6
p_5 ————————	t_4

La comparación de estas asignaciones con las obtenidas con el algoritmo por eliminación de filas y columnas desarrollado en el epígrafe anterior pone en evidencia resultados no coincidentes. En efecto, mientras en el anterior procedimiento de cálculo la posición del equipo t_{10} es ocupada por el deportista p_1, en el algoritmo húngaro lo es por el deportista p_3. Asimismo, este deportista, el p_3, era asignado, en el anterior algoritmo, a la posición del equipo t_4, mientras que en este algoritmo esta posición lo es por el deportista p_5. Las diferencias son, pues, sustanciales, lo cual no es de extrañar si se tienen en cuenta 2 aspectos. El primero hace referencia al carácter aproximado del algoritmo por eliminación de filas y columnas y el segundo que no siempre existe una sola asignación óptima y en no pocas ocasiones se dan varias de ellas.

El supuesto presentado es un ejemplo típico de cuanto acabamos de señalar. La prueba evidente de ello nos la proporciona el "grado total de adecuación". En la asignación establecida por el algoritmo del epígrafe anterior este índice ascendía a 3.77. Esta cifra coincide exactamente con la ahora obtenida con el algoritmo húngaro. En efecto:

$$\lambda(t_8, p_2) + \lambda(t_{10}, p_3) + \lambda(t_6, p_4) + \lambda(t_4, p_5) = 0.97 + 0.89 + 0.96 + 0.95 = 3.77$$

Se puede concluir, entonces, que son igualmente óptimas, desde esta perspectiva (grado total de adecuación), las asignaciones $(p_2 \to t_8)$, $(p_3 \to t_4)$, $(p_4 \to t_6)$, $(p_5 \to t_{10})$ que las asignaciones $(p_2 \to t_8)$, $(p_3 \to t_{10})$, $(p_4 \to t_6)$, $(p_5 \to t_4)$. Evidentemente la adecuación no sería la misma en los deportistas pues mientras el deportista p_3 sería muy adecuado para la posición t_4 (0.96) lo sería mucho menos en la posición t_{10} (0.89). Por el contrario, si el deportista p_5 es moderadamente adecuado para la posición t_{10} (0.88) lo es mucho para la posición t_4 (0.95). En ambos casos la posición t_{10} no quedaría cubierta con la suficiente brillantez, habida cuenta de los deportistas disponibles. El equipo sufre, pues, de un cierto desequilibrio.

Existen otros algoritmos aptos para dar una óptima solución al problema de asignación de un grupo de deportistas a las posiciones de un equipo. Con objeto de proporcionar una alternativa al algoritmo húngaro, vamos a desarrollar, a continuación, un procedimiento de cálculo que ha sido divulgado con la denominación de algoritmo "branch and bound".

Algoritmo "branch and bound"

El origen de este algoritmo se halla en el trabajo realizado, inicialmente, para la obtención de un circuito hamiltoniano mínimo, lo cual permite dar respuesta al popular problema del viajante de comercio[6] .

Dado el objetivo de este trabajo, vamos a obviar todos los elementos teóricos[7] y pasar a una descripción de las fases del algoritmo[8] .

1. Se parte de una relación borrosa de distancias o de la matriz complementaria de la relación de adecuación a la que se agregan las filas o columnas necesarias para que la matriz sea cuadrada.
2. Se resta a cada fila, y después a cada columna, el menor valor de entre sus elementos, para que en la relación borrosa resultante exista por lo menos un 0 en cada fila y en cada columna.
3. Se obtiene la suma de las cantidades restadas en filas y columnas. Esta cantidad constituye el valor de la raíz de una arborescencia.
4. Se realiza una primera bipartición. Para ello se asigna a cada 0 de la relación borrosa, una cantidad igual a la suma del valor más pequeño de la fila y del valor más pequeño de la columna a los cuales el 0 pertenece (sin considerar este propio valor nulo, aunque sí los otros que pudieran existir). Estas cifras se pueden colocar en un recuadro dentro de cada casilla.
5. De todos los valores recuadrados, se escoge el más grande o si existen varios con el mismo valor máximo, uno de ellos, de manera arbitraria. Se traza una línea a la fila y columna a la que pertenece.
6. Se empieza a construir una arborescencia, colocando un vértice con la denominación del elemento de la relación borrosa que posee la cantidad más pequeña, con el símbolo de negación. A este vértice se le asigna un valor igual al de la raíz más la cantidad hallada para el correspondiente elemento.

7. Se suprime de la relación borrosa de distancias o complementaria de adecuación la fila y la columna a la que el 0 del mayor valor recuadrado pertenece. Se obtiene así una nueva relación borrosa de orden inferior.

8. Para obtener una relación borrosa en la que exista por lo menos un 0 en cada fila y en cada columna, se vuelve al punto 2.

9. Para obtener el valor del vértice correspondiente a la bipartición del punto 5 con símbolo positivo, se añade al vértice anterior (raíz de la arborescencia) la suma de las cantidades anteriormente restadas en filas y columnas.

10. La nueva bipartición partirá de aquel vértice colgante que posea un valor más pequeño.

11. El proceso sigue, volviendo al punto 4 y siguientes, hasta reducir la matriz hasta el orden 1 x 1.

Una vez enumeradas las etapas de este algoritmo, vamos a utilizarlo en nuestro caso concreto, en primer lugar, partiendo de la relación borrosa de distancias [D_2] del epígrafe anterior que reproducimos, a continuación, una vez añadidas las correspondientes filas representativas de los deportistas suplentes y, por tanto, se ha cumplido ya el requisito de la fase 1, en la que se exige la existencia de una matriz cuadrada. Se tiene:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.20	.26	.21	.24	.22	.31
t_6	.26	.18	.16	.14	.16	.24
t_8	.24	.13	.16	.21	.15	.15
t_{10}	.16	.19	.18	.16	.18	.23
s_1	1	1	1	1	1	1
s_2	1	1	1	1	1	1

Se deduce en cada fila su menor valor:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	0	.06	.01	.04	.02	.11	.20
t_6	.12	.04	.02	0	.02	.10	.14
t_8	.11	0	.03	.08	.02	.02	.13
t_{10}	0	.03	.02	0	.02	.07	.16
s_1	0	0	0	0	0	0	1
s_2	0	0	0	0	0	0	1

Habida cuenta de que ya existe un cero en cada columna no es necesario realizar en ellas las deducciones y, por tanto, la segunda fase ha finalizado.

Pasamos a la tercera, para hallar el valor de la raíz de la arborescencia. Para ello se suman los valores restados. Son, en nuestro caso:

$$0.20 + 0.14 + 0.13 + 0.16 + 1 + 1 = 2.63$$

Este valor se colocará en la raíz de la arborescencia.

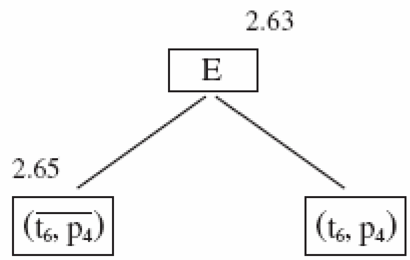
Procedemos, seguidamente, al cálculo de los valores correspondientes a los recuadros de la casillas con ceros, en cada fila, de acuerdo con lo establecido en la cuarta fase del algoritmo.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0 $\boxed{.01}$	.06	.01	.04	.04	.11
t_6	.12	.04	.02	0 $\boxed{.02}$	.02	.10
t_8	.11	0 $\boxed{.02}$	.03	.08	.02	.02
t_{10}	0 $\boxed{0}$	.03	.02	0 $\boxed{0}$	.02	.07
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

Se escoge, entre las dos casillas con el mismo valor recuadrado, uno de ellos arbitrariamente, por ejemplo, la (t_6, p_4). Se sombrean y anulan la fila t_6 y la columna p_4:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	0 $\boxed{.01}$	.06	.01	.04	.04	.11
t_6	.12	.04	.02	0 $\boxed{.02}$	.02	.10
t_8	.11	0 $\boxed{.02}$	.03	.08	.02	.02
t_{10}	0 $\boxed{0}$	.03	.02	0 $\boxed{0}$	.02	.07
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

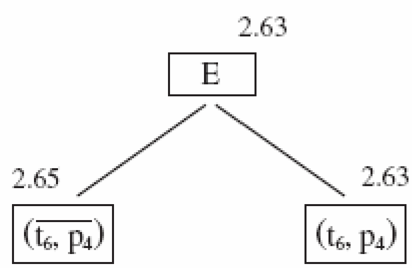
Nos hallamos en disposición de iniciar la primera bipartición, empezando con ello la construcción de la arborescencia. El elemento de la matriz escogido (t_6, p_4) con signo negativo y positivo permitira la denominación de los dos vértices. El valor asignado al vértice negativo es igual al valor de la raíz (2.63) más el valor recuadrado del elemento (0.02), es decir 2. 65. Veámoslo:



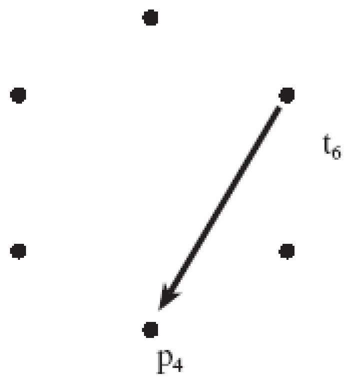
Obtenemos, por eliminación de la fila y columna sombreadas una matriz de orden inferior:

	p_1	p_2	p_3	p_5	p_6
t_4	0	.06	.01	.02	.11
t_8	.11	0	.03	.02	.02
t_{10}	0	.03	.02	.02	.07
s_1	0	0	0	0	0
s_2	0	0	0	0	0

Como ya existe un cero en cada fila y cada columna no es necesario reducir valor alguno ni en filas ni en columnas. Así, pues, para hallar el valor del vértice positivo no hay que sumar cantidad alguna a la raíz de la arborescencia. Se tiene:



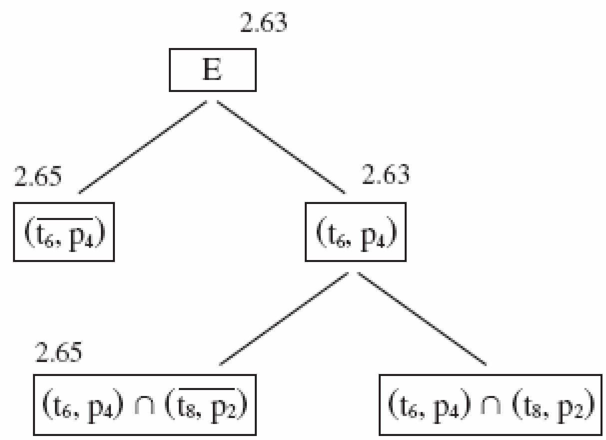
Nos hallamos ante la primera asignación: el deportista p_4 para la posición del equipo t_6. Visualizaremos este proceso mediante un grafo. Para ello trazaremos un arco desde un vértice t_6 a un vértice p_4:



Continuamos con el algoritmo calculando los valores a recuadrar en las casillas con ceros, escogiendo uno de los mayores (por ejemplo el desechado anteriormente (t_8, p_2)) y tachando la fila y columna a la que pertenece.

	p_1	p_2	p_3	p_5	p_6
t_4	0 $\boxed{.01}$	.06	.01	.02	.11
t_8	.11	0 $\boxed{.02}$	.03	.02	.02
t_{10}	0 $\boxed{0}$	.03	.02	.02	.07
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

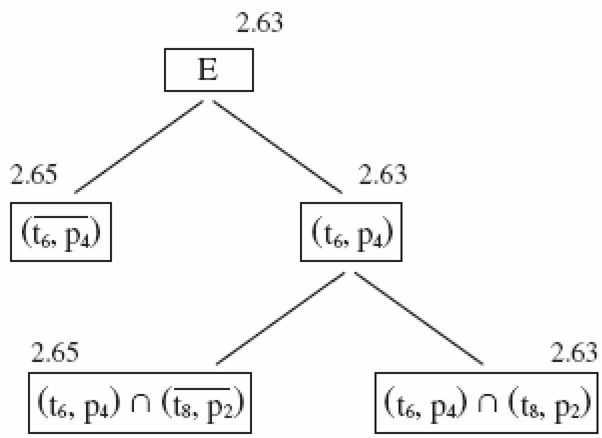
Continuamos con la arborescencia a partir del vértice con un valor menor. Es, en este supuesto (t_6, p_4). La nueva bipartición tiene lugar considerando el elemento (t_8, p_2). Al nuevo vértice con símbolo negativo, se le asigna un valor igual a la suma del vértice anterior más el valor recuadrado del correspondiente elemento. Es, ahora, 2.63 + 0.02 = 2.65.



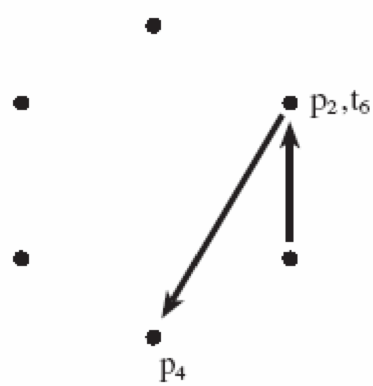
Se elimina la fila y la columna a las que pertenece (t_8, p_2). Resulta:

	p_1	p_3	p_5	p_6
t_4	0	.01	.02	.11
t_8	0	.02	.02	.07
s_1	0	0	0	0
s_2	0	0	0	0

En todas las filas y columnas hay por lo menos un cero. Así, pues, en la arborescencia se colocará al vértice $(\overline{t_8,\ p_2})$el mismo valor que el del vértice que le precede.



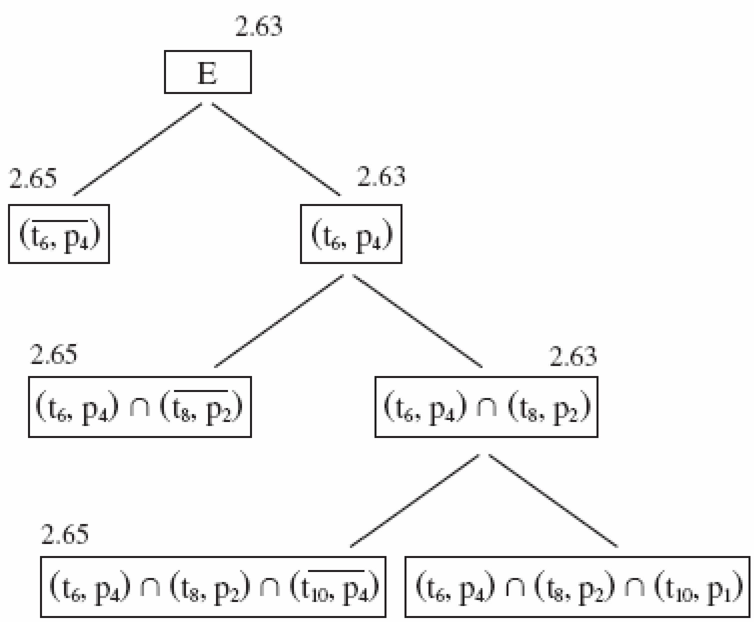
Encontramos, de esta manera, la segunda asignación: el deportista p_2 para la posición del equipo t_8. Continuamos con la representación sagitada:



El algoritmo sigue de la misma manera que en las etapas anteriores: recuadro en casillas con ceros, asignación de valores, elección de un mayor valor y sombreado de fila y columna:

	p_1	p_3	p_5	p_6
t_4	0 $\boxed{.01}$	.01	.02	.11
t_{10}	0 $\boxed{.2}$	.02	.02	.07
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

Seguimos con la arborescencia:



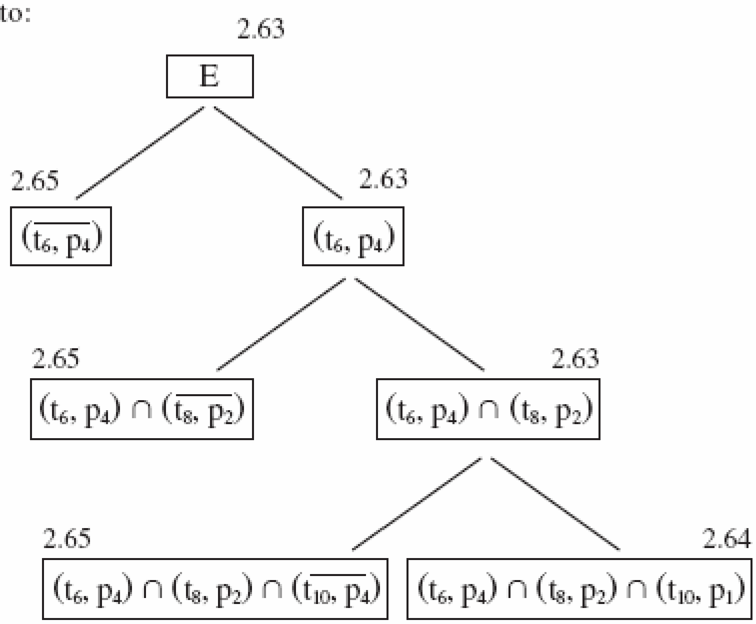
Se elimina fila y columna relativa a (t_{10}, p_1). Queda:

	p_3	p_5	p_6
t_4	.01	.02	.11
s_1	0	0	0
s_2	0	0	0

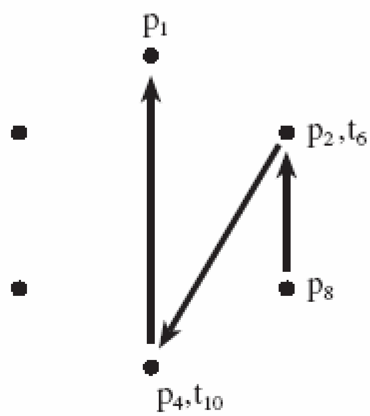
Para que en todas las filas y columnas exista por lo menos un cero hay que deducir de la fila t_4 su menor valor, es decir 0.01.

	p_3	p_5	p_6	
t_4	0	.01	.10	.01
s_1	0	0	0	0
s_2	0	0	0	0

Al no restar cantidad alguna en las columnas el valor total deducido se limita a 0.01. En la arborescencia se coloca un valor igual a 2.63 + 0.01 = 2.64. Por tanto:



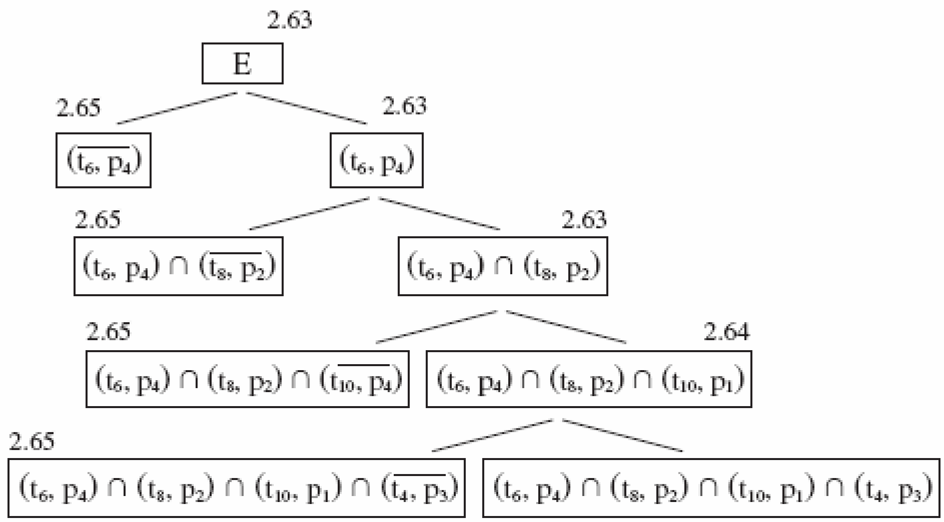
La tercera asignación corresponde al deportista p_1 para la posición del equipo t_{10}. Veamos la representación sagitada:



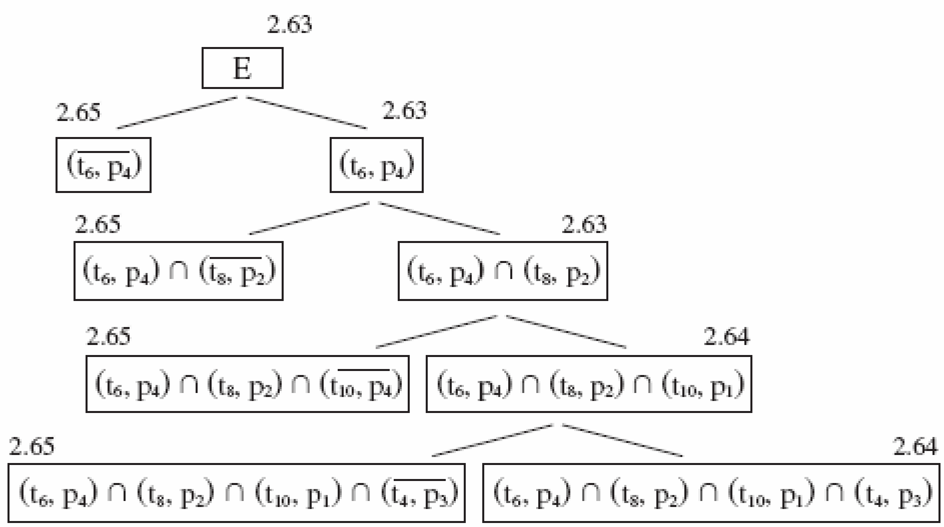
Seguimos con el algortimo:

	p_3	p_5	p_6
t_4	0 $\boxed{.01}$	.01	.10
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

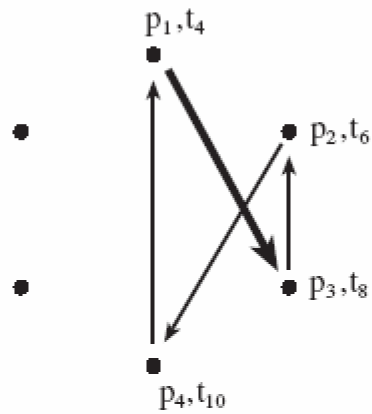
y con la nueva asignación realizamos el consiguiente enbrancamiento:



Al elimiar la fila y la columna a la que corresponde el elemento de la matriz (t_4, p_3) aparece una nueva matriz con cero en todas las casillas. No se debe ni puede quitar valor alguno y, por tanto, al correspondiente vértice se le incorpora el mismo valor que el del vértice anterior, es decir 2.64.



Se ha realizado, así, la última asignación para las posiciones del equipo titular. Se trata del deportista p_3 al que le correspode la posición t_4. Podemos representarla en un grafo sagitado.



Dado que han sido cubiertas todas las posiciones para el equipo titular, podemos dar por finalizado el algoritmo, según el cual los deportistas p_5 y p_6 ocuparían plaza de suplentes.

Resumiendo, las asignaciones son las siguientes:

Deportistas titulares — *Posiciones equipo*

$$p_1 \longrightarrow t_{10}$$

$$p_2 \longrightarrow t_8$$

$$p_3 \longrightarrow t_4$$

$$p_4 \longrightarrow t_6$$

Se puede observar, como no podía ser de otra manera, que el resultado obtenido coincide con el hallado utilizando al algortimo húngaro.

Veamos, finalmente, la utilización del algoritmo "branch and bound" cuando se parte de la relación borrosa $[K_2]$, completada con las correspondientes filas para los suplentes, surgida de los coeficientes de adecuación, que reproducimos:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.07	.06	.04	.08	.05	.09
t_6	.10	.04	.04	.04	.06	.11
t_8	.12	.03	.04	.09	.05	.07
t_{10}	.15	.12	.11	.13	.12	.15
s_1	1	1	1	1	1	1
s_2	1	1	1	1	1	1

Restamos a cada fila el menor valor de sus elementos:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
t_4	.03	.02	0	.04	.01	.05	.04
t_6	.06	0	0	0	.02	.07	.04
t_8	.09	0	.01	.06	.02	.04	.03
t_{10}	.04	.01	0	.02	.01	.04	.11
s_1	0	0	0	0	0	0	1
s_2	0	0	0	0	0	0	1

La suma de los valores deducidos es:

$$0.04 + 0.04 + 0.03 + 0.11 + 1 + 1 = 2.22$$

que se coloca como valor de la raíz de la arborescencia.

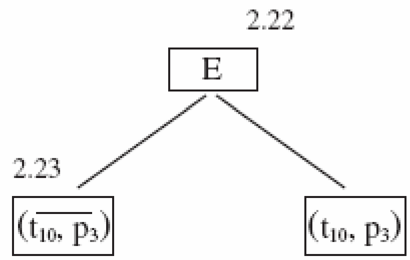
Continuamos con las siguientes fases del algoritmo:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.03	.02	0 $\boxed{.01}$	.04	.01	.05
t_6	.06	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	.02	.07
t_8	.09	0 $\boxed{.01}$	.01	.06	.02	.04
t_{10}	.04	.01	0 $\boxed{.01}$	.02	.01	.04
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

Escogemos arbitrariamente un par entre los valores máximos encuadrados por ejemplo (t_{10}, p_3) y se procede al sombreado de fila y columna:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
t_4	.03	.02	0 $\boxed{.01}$	.04	.01	.05
t_6	.06	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	.02	.07
t_8	.09	0 $\boxed{.01}$	.01	.06	.02	.04
t_{10}	.04	.01	0 $\boxed{.01}$	.02	.01	.04
s_1	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$
s_2	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$

Iniciamos la primera bipartición, colocando en el vértice $(\overline{t_{10}, p_3})$ la suma del valor de la raíz más el valor del cero escogido.



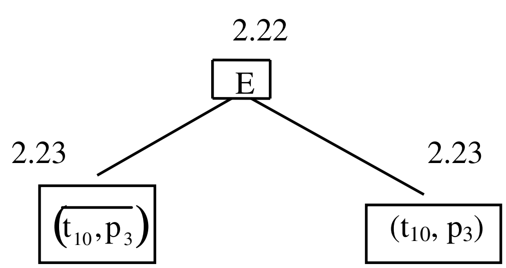
Eliminamos la fila t_{10} y la columna p_3 y queda

	p_1	p_2	p_4	p_5	p_6
T_4	.03	.02	.04	.01	.05
T_6	.06	0	0	.02	.07
T_8	.09	0	.06	.02	.04
S_1	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	0	0

Realizamos la correspondiente deducción para que haya por lo menos un cero en cada fila y en cada columna.

	P_1	p_2	p_4	p_5	p_6	
t_4	.02	.01	.03	0	.04	.01
t_6	.06	0	0	.02	.07	0
t_8	.09	0	.06	.02	.04	0
s_1	0	0	0	0	0	0
s_2	0	0	0	0	0	0

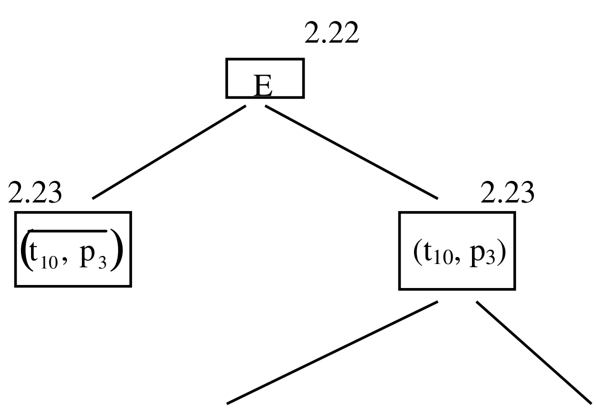
Asignamos valor al vértice (t_{10}, p_3).



Continuamos con el resto de fases del algoritmo[9].

	p_1	p_2	p_4	p_5	p_6
t_4	.02	.01	.03	.01 0	.04
t_6	.06	0 0	0 0	.02	.07
t_8	~~.09~~	~~.02 0~~	~~.06~~	~~.02~~	~~.04~~
s_1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
s_2	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

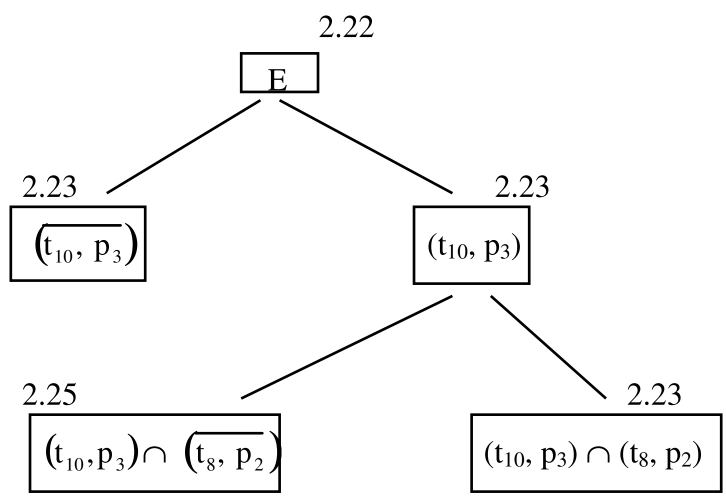
Habida cuenta que las cotas de los vértices que cuelgan tienen el mismo valor, vamos a seguir con una cualquiera de ellas, por ejemplo (t_{10}, p_3).



Eliminación de fila y columna:

	p_1	p_4	p_5	p_6
t_4	.02	.03	0	.04
t_6	.06	0	.02	.07
s_1	0	0	0	0
s_2	0	0	0	0

Damos al vértice $(t_{10}, p_3) \cap (t_8, p_2)$ el mismo valor que el vértice que le precede:

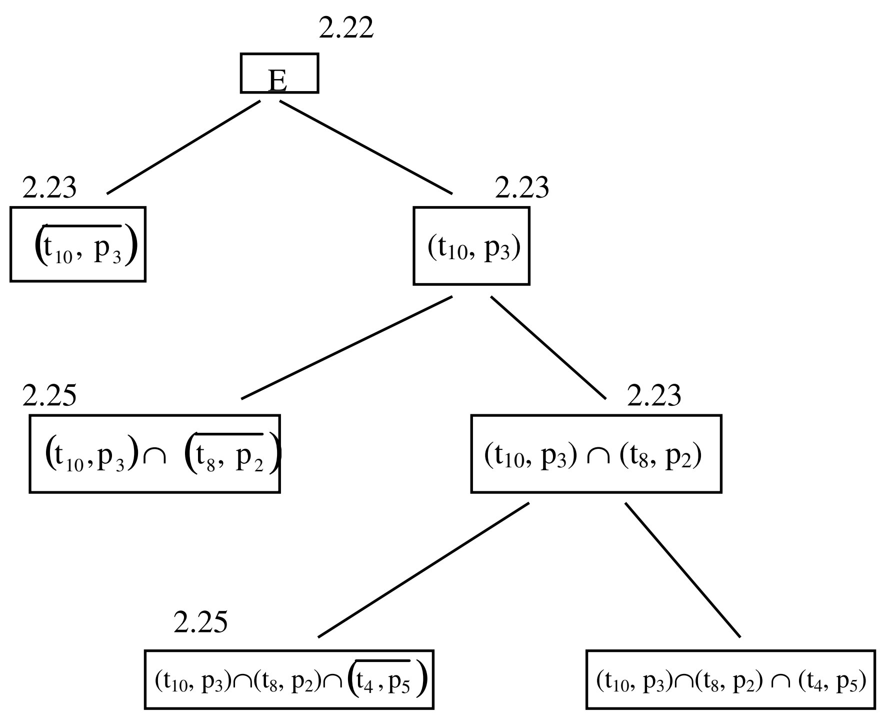


Encuadre, valoración y tachadura:

	p_1	p_4	p_5	p_6
t_4	.02	.03	0 .02	.04

t_6	.04	$0^{.02}$	.02	.07
s_1	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}
s_2	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}

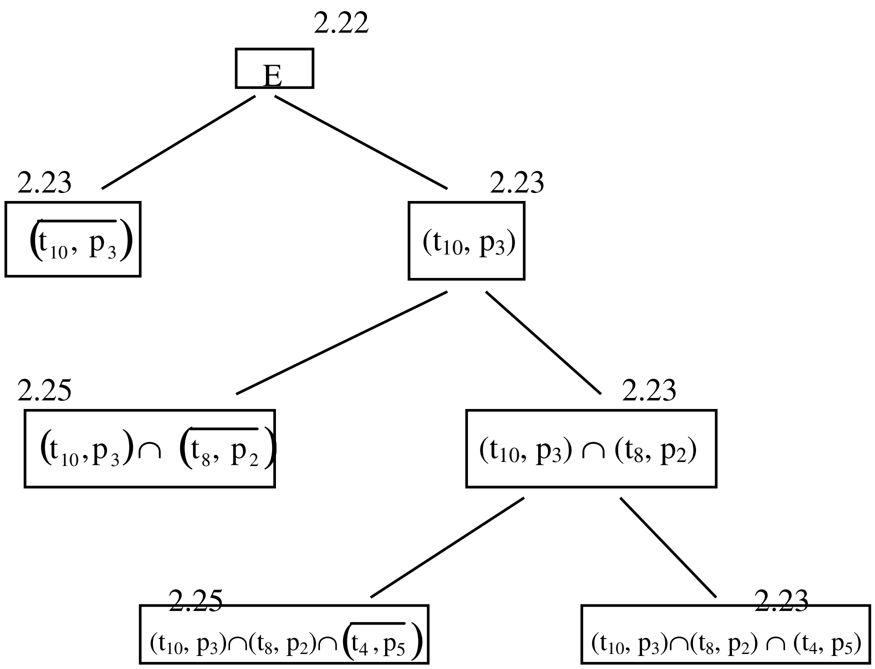
Arborescencia:



Eliminación de fila y columna de la matriz:

	p_1	p_4	p_6
t_6	.06	0	.07
s_1	0	0	0
s_2	0	0	0

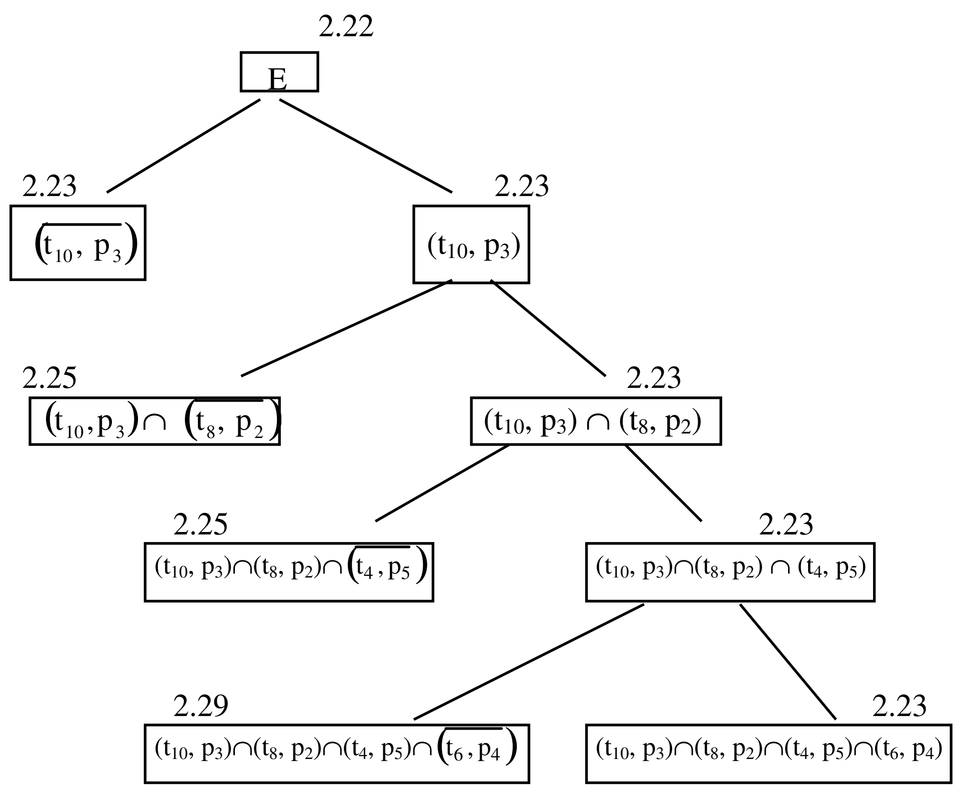
Colocación del correspondiente valor a la cota $(t_{10}, p_3) \cap (t_8, p_2) \cap (t_4, p_5)$ de la arborescencia:



Llegamos, prácticamente a la fase final:

	p_1	p_4	p_6
t_6		.06	
	.06	0	.07
s_1	0 0	0 0	0 0
s_2	0 0	0 0	0 0

Pasamos a la arborescencia:



Se ha hallado las siguientes asignaciones:

Deportistas titulares		*Posiciones equipo*
p_2	$\longrightarrow$	t_8
p_3	$\longrightarrow$	t_{10}
p_4	$\longrightarrow$	t_6
p_5	$\longrightarrow$	t_4

Resultado coincidente con el obtenido con el algoritmo húngaro.

Reflexiones en torno a la asignación de jugadores

El problema de la asignación de jugadores a los distintos puestos de un equipo se ha ido haciendo cada vez más patente, en los últimos tiempos, como consecuencia de la tendencia observada en los responsables deportivos para lograr los servicios de deportistas con reconocidas capacidades de polivalencia. Sucede, entonces, que en un mismo club, se dispone de un porcentaje elevado de jugadores capaces de desarrollar su actividad en dos o más posiciones en el terreno de juego. Es entonces cuando las técnicas que hemos desarrollado, presentadas en forma de algoritmos, pueden ser de gran utilidad. Y decimos de “gran” utilidad porque conocemos la soledad con que se encuentran los entrenadores en el momento de tomar un tipo de decisión tal que comporta hacer jugar a un deportista en lugar de otro, o bien colocar a uno de ellos y no a otro, en un puesto del equipo. Creemos, pues, que toda ayuda técnica puede ser útil como “compañía” y, asimismo, como elemento de seguridad o simplemente de confirmación de opiniones, muchas veces basadas en la intuición.

Dicho esto, es conveniente señalar que estas técnicas no pretenden, en caso alguno, sustituir los conocimientos, experiencia y, en definitiva, el saber hacer de los responsables deportivos, sino constituir una ayuda, un soporte, eso sí valioso, para aquellos en los que recae la necesidad de tomar estas decisiones. Una prueba evidente de ello la tenemos en el hecho de que la base de los procedimientos desarrollados se halla en la expresión de la opinión de los “expertos” tanto sobre el nivel que deberían poseer los deportistas “ideales” en cada una de las cualidades requeridas para las diferentes posiciones en el equipo, como del nivel que se posee de ellas por parte de los deportistas disponibles. Este es un elemento básico que permitirá distinguir los “buenos” técnicos de los “mediocres” y los “malos”. Su subjetividad resultará a la postre definitiva para la obtención de buenos resultados.

Hemos presentado, en el inicio de esta parte de nuestro trabajo, unos elementos básicos que constituyen el punto de partida de los desarrollos posteriores. Éstos han sido elaborados en forma de algoritmos, es decir procedimientos de cálculo, que permiten establecer unos fáciles automatismos. Al hacerlo así, hemos creído prestar un servicio a las necesidades reales, como consecuencia de la posibilidad de introducir estos esquemas en los ordenadores, lo cual puede ser la fuente de una eficaz utilización de nuestras propuestas. En efecto, colocados en las “memorias” los datos e informaciones necesarias, el responsable deportivo puede disponer, prácticamente de manera instantánea, de las asignaciones óptimas, incluso a lo largo de un encuentro, cuando por cualquier circunstancia, favorable o adversa, considere que es necesario realizar cambios de posición con posibilidad o no de incorporar deportistas adicionales.

Esta emergencia, citada únicamente a título de ejemplo, es una de las muchas en las que una nueva asignación o la reconsideración de la ya realizada, puede consolidar un resultado o dar la vuelta a uno existente, no deseado.

Finalmente, digamos que los tres algoritmos básicos desarrollados, no son los únicos existentes. Muchas variantes son posibles, e incluso pueden considerarse otras propuestas en base a elementos distintos de los que hemos elegido como soporte de nuestro trabajo. Con él, sólo hemos pretendido abrir un nuevo camino que creemos puede dar en el futuro fructíferos resultados.

Referencias

[1] Nos referimos al libro de Gil-Aluja, J.(1997). *The interactive management of the human resources in uncertainty*. Dordretch,The Netherlands Kluwer Academic Publishers.

[2] Kaufmann, A. y Gil-Aluja, J. (1993). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas* (3ª Ed.). Santiago de Compostela: Ed. Milladoiro, pp. 157-158.
Gil-Aluja, J. (1987). *Selección de personal: el problema de la polivalencia y el de la uniformidad.* Cuadernos CEURA, Madrid 1987, pp. 8-10.

[3] König, D. (1916). *Théorie der endlichen und unendlichen graphen,* reimpreso posteriormente por Chelsea Publ. Cº., New York, 1950. Este trabajo fue dado a conocer por Kuhn, H. W. (1955) en el artículo “The hungarian method for the assignment problem”, *Naval Research Logistics Quaterly*, vol. 2, núms. 1-2, marzo-junio, pp. 83-98.

[4] Gil-Aluja, J. (1997) *The interactive management of the human resources in uncertainty*. Dordretch. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 170-171.

[5] Gil-Aluja, J. (1997) *The interactive management of the human resources in uncertainty*. Dordretch. The Netherlands Kluwer Academic Publishers, p. 172.

[6] Little, J. D. G. y otros (1963). *An algorithm for the travelling salesman problem*. I.O.R.S.A., vol. 11, pp. 972-989.

[7] Kaufmann, A. (1971). *Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones*. Barcelona, España: Ed. C.E.C.S.A, p. 402.

[8] Hemos escogido, para ello, la propuesta contenida en Gil-Aluja, J. (1997). *The interactive management of the human resources in uncertainty*. Dordretch, The Nederlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 196-197.

[9] Prescindimos, ahora, para no alargar el proceso, de la representación sagitada así como de los comentarios que constituirían una repetición de lo expresado en el desarrollo anterior.

Bibliografía

Gil Aluja, J. (1987). *Selección de personal: el problema de la polivalencia y el de la uniformidad*. Cuadernos CEURA, Madrid.

Gil Aluja, J. (1997). *The interactive management of the human resources in uncertainty*.. Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kaufmann, A. (1971) *Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones*. Barcelona, España: Ed. C.E.C.S.A.

Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1993). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas* (3ª Ed.). Santiago de Compostela: Ed. Milladoiro.

König, D.: *Théorie der endlichen und unendlichen graphen* (1916), reimpreso posteriormente por Chelsea Publ. Cº., New York, 1950. Este trabajo fue dado a conocer por Kuhn, H. W. (1955) en el artículo "The hungarian method for the assignment problem", *Naval Research Logistics Quaterly*, vol. 2., núms. 1-2, marzo-junio.

Little, J. D. G. y otros (1963). An algorithm for the travelling salesman problem. *I.O.R.S.A.*, Vol. 11.