cuadernos
educere

Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas

Fredy E. González

Cuaderno Nº 5

Programa de Perfeccionamiento
y Actualización Docente

Escuela de Educación

Universidad de Los Andes

2004

Título de la colección Colección Cuadernos Educere

Serie roja La docencia especializada

Fundación Octubre, 1998

Director / Editor Pedro J. Rivas

Título del Cuaderno Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas

Cuaderno Nº 5

Autor Fredy E. González

Instancia editora Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente (PPAD).

Diseño de carátula Luis Edgardo Márquez
Diagramación Freddy Parra Cepeda
Corrección de texto Freddy Parra Jahn
fparrajahn@hotmail.com

Universidad de Los Andes. Núcleo Universitario "La Liria".
Facultad de Humanidades y Educación, Edificio A. Piso 2.
Oficina del PPAD. Teléfono (0274) 2401870. Fax: 2401870
Mérida - Venezuela • educere@ula.ve • rivaspj@yahoo.com
http://www.saber.ula.ve/educere/cuaderno

Red de Distribución PPAD - Educere • Mérida
Pedro Alejandro Rivas Briceño

1ª edición, 2004
500 ejemplares

HECHO EL DEPÓSITO DE LEY
Depósito legal: LF 23720045101892
ISBN COLECCIÓN 980-11-0768-5
ISBN CUADERNO 980-11-0795-2

Impresión: Producciones Editoriales, C. A./ Mérida / 2004
Impreso en Venezuela / Printed in Venezuela

Índice

Presentación

La Colección Cuadernos EDUCERE es una iniciativa editorial del Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente, PPAD, de la Escuela de Educación de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad de Los Andes, creada con el propósito de contribuir a la comprensión de la educación venezolana a través de la difusión del conocimiento sobre la realidad de la escuela, proveniente de la investigación y la capacidad propositiva del profesorado universitario y del magisterio vinculado al programa

La Colección Cuadernos EDUCERE es una publicación hemerográfica no periódica dirigida a los docentes en servicio de los diferentes niveles y modalidades del sistema educativo venezolano, así como a los estudiantes en proceso de formación inicial de las Escuelas de Educación e Institutos Pedagógicos y otras instituciones de Educación Superior del país, en cuyos planes y objetivos se encuentra la formación docente.

La política editorial de la Colección está orientada a la publicación de propuestas didácticas inéditas, documentos y materiales de alto valor pedagógico y de pertinencia educativa con las políticas y planes de formación docente del Estado Venezolano, de la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes, de sus planes de educación permanente y, en particular, para responder a los requerimientos del docente en servicio, a quien se le destina todo la atención por parte del Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente, instancia académica editora de los Cuadernos.

La Colección está formada por ocho series de temas que abordan el espectro teórico-conceptual, metodológico y fenomenológico de la educación, así como sus contextos jurídicos, sociales, políticos, culturales, históricos, económicos y, por supuesto, pedagógicos.

En esta oportunidad, presentamos a nuestros lectores el quinto Cuaderno de la Colección Cuadernos EDUCERE, destinado a contribuir al desarrollo de la Educación Matemática de los estudiantes universitarios en proceso de formación docente y de los maestros y profesores que laboran en las escuelas básicas, unidades educativas, liceos y colegios de los niveles de Educación Básica y Educación Media Diversificada y Profesional.

En esta oportunidad, el Dr. Fredy González, Profesor Titular del Instituto Pedagógico de Maracay de la Universidad Experimental Pedagógica Libertador, UPEL, expone su experiencia y conocimiento para reflexionar y examinar la dinámica cognitiva y metacognitiva de un grupo de estudiantes universitarios que hacen carrera docente, quienes participaron de un curso diseñado para desarrollar una actividad intelectual dirigida a la búsqueda de la solución a problemas formulados en el marco de textos escritos con verdadera conflictualidad y sentido lógico.

El autor diseñó un modelo didáctico que se enfatiza en la toma de conciencia, por parte del resolutor, de su accionar cognitivo puesto en juego durante la actividad resolutoria. El contexto de discusión del Cuaderno en referencia, considera a la Matemática como una forma especial de pensamiento y concibe al aula de clases y a sus procesos académicos como una comunidad productora y socializadora de saberes y conocimientos matemáticos. Las formas de organización del trabajo de resolución de problemas contempladas en el modelo se establecieron a través de modalidades de trabajo tales como la actividad individual realizada en parejas y en pequeños y grandes grupos, las cuales son descritas y caracterizadas exhaustivamente a lo largo de un relato pedagógico que se elaboró con esmero y perseverancia a objeto de que el lector pueda sentir la sensación de estar transitando por un mundo desconocido lleno de interrogantes más que de soluciones o respuestas.

La Colección Cuadernos EDUCERE del Programa de Perfeccionamiento y Actualización Docente de la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes, se complace en editar una obra que se inscribe en el terreno de la Didáctica de la Matemática, escrita por un maestro que se ha consagrado desde hace muchos años a promover y desarrollar desde las aulas del magisterio universitario un pensamiento didáctico integral de la matemática, acorde con las exigencias del desarrollo evolutivo del puberto y adolescente y que involucre los contextos socioculturales, que considere la lógica de la estructura matemática e hinque sus reflexiones en los principios y fundamentos epistémicos y ontológicos de esta interesante y controversial disciplina del currículo escolar. De esto trata justamente este Cuaderno que esperamos sea del agrado del lector.

Pedro Rivas
Mérida, agosto - 2004

Introducción

Investigar acerca de la resolución de problemas parece ser una actividad permanente entre los educadores matemáticos que asumen este asunto como preocupación prioritaria de su quehacer investigativo; numerosos son los hallazgos relativos a este tema, y al parecer, los problemas y su didáctica serán materia de investigación siempre vigente en el ámbito de la Educación Matemática como campo para la producción profesional de saberes. Dos asuntos particularmente atractivos son: el uso didáctico de la resolución de problemas por parte de los profesores de Matemática, y la posibilidad de generar saberes matemáticos mediante la participación en actividades de resolución de problemas matemáticos en el ámbito escolar; con este propósito, el autor llevó a cabo una investigación (González, 1997), de la que se derivó el presente trabajo, el cual tuvo como sujetos a un grupo de *Estudiantes para Profesor* (EPP), y por el modo como se llevó a cabo, permitió derivar un modelo didáctico (González, 2003c) intitulado la *Dinámica P²MA* (Profesor-Problema, Matemática, Alumno), el cual se concibe como una manera diferente de desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática sobre las siguientes bases:

- La resolución de problemas.
- Enfatizando la toma de conciencia, por parte del alumno, de su propio accionar cognitivo, llevado a cabo durante la actividad resolutoria.
- Considerando a la Matemática como una forma especial de pensamiento y al aula de clases como una Comunidad

Matemática en cuyo contexto se llevan a cabo procesos de producción y socialización del conocimiento matemático.

- Desarrollando cuatro modalidades de trabajo que son las que se exponen en este trabajo.

La propuesta comienza planteando la problemática asociada con la dualidad presente en la formación inicial de los estudiantes para profesores de Matemática derivada de la necesidad que éstos tienen, por una parte, de aprender a resolver problemas y, por la otra, de aprender formas de enseñanza de resolución de problemas. Luego, se exponen la metódica empleada en la ejecución de la investigación y las coordenadas teórico conceptuales que sirvieron de sustento a este estudio; después, se presentan las cuatro modalidades de trabajo en clases centradas en la resolución de problemas. Finalmente, se hace un ejercicio de prospectiva formulando recomendaciones y sugerencias para los profesores de Matemática en cuanto al uso de la resolución de problemas en sus clases.

Planteamiento del asunto

De los problemas se ha dicho que son *"el corazón de la Matemática"* (Halmos, 1980); y, casi cuatro décadas atrás, el célebre matemático George Polya había escrito su, hoy clásico, texto: *How to Solve it?* (Polya, 1945). Desde entonces y, seguramente, desde siempre (Suárez Alemán, 2003), los problemas y su resolución han marcado el desarrollo de la historia de la Matemática; de hecho, varias de las ramas de ésta han nacido, crecido y desarrollado a partir del esfuerzo por resolver algún problema que en un momento dado convocó la atención y el esfuerzo de matemáticos notablemente esclarecidos, véanse, por ejemplo, los trabajos de De Guzmán, 1983, 1996; y la revista en línea *Maticias*, disponible en Internet.

La relevancia de los procesos de búsqueda de solución a problemas trasciende el campo de la Matemática; de hecho, se considera que resolver problemas es una habilidad transversal, es decir, requerida prácticamente como condición *sine qua non* para el éxito en cualquier actividad humana relativamente compleja. De aquí que en el diseño de los planes de formación de prácticamente todos los tipos de profesionales actuales se incluyan objetivos relacionados con la formulación y la resolución de problemas.

De esta manera, los problemas y la dinámica de su actividad resolutoria asociada, es un asunto que provoca la reflexión de los responsables de los procesos de formación (tanto inicial como permanente) en todas las profesiones, en particular, la de profesor de Matemática. Así, que resolver problemas es uno de los saberes que han de poseer quienes se dediquen profesionalmente a la enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles escolares.

Ahora bien, existe un espacio en donde este asunto cobra particular relevancia; se trata de las instituciones encargadas de la formación de los docentes de Matemática (maestros y profesores) tales como las escuelas normales superiores, los institutos pedagógicos y las Escuelas de Educación de las universidades[1]; en efecto, quienes allí laboran son *formadores de formadores;* esto, en el caso específico de los problemas de Matemática, incorpora un elemento adicional; ya no se trata sólo de procurar que los alumnos (quienes son vistos como estudiantes para profesor, EPP, profesores en proceso inicial de formación *preservice mathematic´s teachers*) aprendan a resolver problemas, sino que, además, ellos deben *aprender a enseñar a aprender a resolver problemas*; esta última expresión no es un *galimatías;* al contrario, refiere a una problemática didáctica aún no del todo resuelta.

En efecto, los EPP, como alumnos de una institución formadora de docentes de Matemática deben, ellos mismos, aprender a resolver problemas; y, además, (como futuros profesores) deben aprender cómo enseñar a resolver problemas a quienes, en el futuro, serán sus alumnos. Surgen, entonces, varias interrogantes en quienes son sus formadores (es decir, los profesores encargados de su formación inicial a nivel superior): ¿Cuál es la formación en resolución de problemas que ha de recibir un futuro profesor de Matemática? ¿Cómo debe llevarse a cabo dicha formación? ¿De qué tipo han de ser las experiencias sobre resolución de problemas en las que han de participar los futuros profesores durante su proceso de formación inicial?

En la búsqueda de respuestas a estas y otras cuestiones asociadas, se han generado varias investigaciones. Así, por

[1] Aquí se hace referencia al contexto de los países latinoamericanos.

ejemplo, Puig (1996) realizó una exhaustiva indagación en la cual abordó con profusión elementos claves de la resolución de problemas. Del mismo modo, Callejo (1994) ha trabajado con intensidad en la búsqueda de conocimientos que permitan generar proposiciones didácticas a partir de la reflexión sobre experiencias de resolución de problemas en las que participan estudiantes. En este mismo orden de ideas ha trabajado Blanco Nieto (1996), quien se ha dedicado al estudio de las concepciones y creencias sobre la resolución de problemas que tienen los EPP y, con base en ello, ha planteado diversas propuestas curriculares.

Otros investigadores que se han ocupado de la resolución de problemas son: Schoenfeld (1985a, 1985b, 1992) quien concibe la resolución de problemas como característica distintiva de un modo matemático de pensar; De Guzmán (1991) quien ha desarrollado un conjunto de herramientas heurísticas útiles en la resolución de problemas matemáticos de variados tipos; Lester (1994) quien hizo una interesante revisión acerca del estado del arte de la investigación en resolución de problemas en Estados Unidos a la luz de una indagación sobre los énfasis investigativos y metodológicos referidos en los artículos sobre solución de problemas publicados en la revista estadounidense *Journal for Research in Mathematics Education* durante los 25 años comprendidos entre 1970 y 1994; Santos (1996), por su parte, estableció principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática.

Finalmente, para obtener más información en relación con este asunto resulta beneficiosa la lectura de las obras fundamentales: Kilpatrick, Rico y Sierra (1994) y Kilpatrick (1992), quien hace un recuento histórico de cien años de investigación en Educación Matemática; y, D´Amore (2003) quien realizó una minuciosa reconstrucción histórica de la Didáctica de la Matemática verdaderamente actualizada e internacional y cuyo capítulo 9 está dedicado al examen minucioso de los conceptos de *ejercicio, problema y situación problemática.*

Sobre la base de todo este acervo indagatorio, alguien no avisado podría pensar que la investigación en resolución de problemas es un asunto ya agotado; sin embargo, al menos en el ámbito latinoamericano y, particularmente, en Venezuela, esto no es así; prueba de ello son los resultados de la Prueba de Aptitud Académica (PAA) que se aplica a quienes desean ingresar a las instituciones de educación superior.

Tal instrumento de medición de competencias contempla dos aspectos: la habilidad verbal y la numérica; esta última ha de demostrarse mediante la solución efectiva y eficiente de problemas cuyo contenido corresponde a la Matemática que ha debido ser estudiada en los niveles educativos anteriores (educación básica y educación media). Con base en, al menos, los resultados de la PAA que han de presentar todos los aspirantes a ingresar en la educación superior, puede conjeturarse que estos bachilleres tienen fallas en la resolución de problemas; pero, ¿cuál es el origen de tales fallas?

Para la interrogante anterior, pueden proponerse varias respuestas; una de ellas está asociada con la actuación de los profesores de Matemática que ellos han tenido en los niveles educativos pre-universitarios, quienes, a su vez, han sido formados en las universidades o institutos superiores de formación docente. Es decir, los alumnos se gradúan de bachilleres sin saber resolver problemas porque no han sido enseñados por sus profesores y éstos, a su vez, no han adquirido tal competencia durante su proceso de formación inicial. Es aquí donde podría residir el *quid* del asunto: incorporar estrategias para que los EPP aprendan, no sólo a resolver problemas, sino que también aprendan cómo enseñar a otros a resolver problemas; en esta dirección se orientó la investigación de la que se derivó el presente trabajo, cuya metódica se expone a continuación.

Metódica

En virtud de su naturaleza, orientación disciplinaria, la clase de información recabada, el tratamiento dado a ésta, y la concepción asumida en relación con las unidades de análisis, el **diseño** del estudio que sirvió de base para la elaboración del presente informe de investigación se corresponde con el de un Estudio de Caso Simple de Orientación Etnográfica Interpretativa.

Tuvo como **escenario** una institución superior de formación docente, en una de cuyas aulas se llevó a cabo el trabajo de campo cuyos protagonistas (**sujetos**) fueron los alumnos participantes en un curso sobre resolución de problemas facilitado por el autor.

Las **técnicas e instrumentos** aplicados fueron: Observación Participante Activa, Entrevistas, Protocolos Verbales del Alumno, Hojas de trabajo, y Cuaderno de Notas.

El **procedimiento** para la recaudación de la información de campo consistió en un curso sobre Resolución de Problemas Matemáticos, diseñado, facilitado y evaluado por el propio investigador; en cada uno de los *Encuentros Edumáticos* constitutivos de este curso, el profesor (investigador) presentaba verbalmente o por escrito, el enunciado de uno o varios problemas (de los denominados "verbales" o "de historia") que tuviesen una alta probabilidad de ser totalmente desconocidos por todos o la mayoría de los alumnos participantes; se instruía a los alumnos para que (individualmente, en parejas, en pequeños grupos, o en grupo total) abordaran el problema durante un lapso determinado (variable según la dificultad que presentase el problema con el cual se estuviera trabajando); luego, se pasaba a la realización de una sesión de socialización (plenaria de trabajo en grupo total); una vez concluida la "puesta en común" del trabajo realizado, se procedía a proporcionar indicaciones y asignaciones, sobre algún otro problema que sirviera de pretexto para iniciar la próxima clase.

La información recabada mediante el uso de diferentes medios, técnicas e instrumentos de recolección, fue sometida a un proceso de análisis cualitativo de contenido, a partir de lo cual se pudieron identificar modalidades de producción de saberes matemáticos propiciadas en el contexto de los Encuentros Edumáticos, centrados en resolución de problemas, que constituyeron el curso.

Referentes conceptuales

Las coordenadas teórico-conceptuales que sirvieron de sustento a este estudio, están referidas a los siguientes aspectos:

Qué significa "Hacer Matemática" en el ámbito escolar

En este estudio, la Matemática está concebida no como un saber técnico expresado en el manejo de artificios y reglas operatorias sino como un quehacer social históricamente situado (González, 2003a). Los problemas propuestos en las clases de Matemática y cuya búsqueda de solución demanda la realización de una actividad intelectual esforzada, constituyen un medio propicio para el ejercicio de acciones propias del quehacer matemático en el aula.

De este modo, la búsqueda de solución a un problema matemático brinda al resolutor la oportunidad de comportarse como lo hacen los matemáticos cuando se abocan a la realización de las tareas específicas que son reclamadas por el trabajo con esta ciencia; es esto lo que, en el marco de este estudio, se denomina "*Hacer Matemática*", expresión utilizada para referirse a los esfuerzos cognitivos, metacognitivos y comportamentales que realiza una persona comprometida en la realización de una tarea que demanda la ejecución de acciones propias del quehacer matemático tales como: inducir, deducir, inferir, conjeturar, demostrar, despejar, formular, simbolizar, graficar, visualizar y calcular, entre otras.

La resolución de problemas como espacio de posibilidades para "Hacer Matemática"

La posibilidad de *"Hacer Matemática"* en el aula de clases utilizando la resolución de problemas, requiere la constitución de un contexto didáctico caracterizado por:

- Una concepción de la Matemática que haga énfasis en los procesos propios del pensamiento matemático (González, 2003b)
- La creación de oportunidades para la realización de Tareas Intelectualmente Exigentes (González, 1998).
- La generación de un clima que propicie la libertad para pensar (Martínez, 2003; Rocerau y Colaboradores, 2002).
- La realización de actividades de mediación cognitiva tanto individual como socializada (González, 1995, 1996; Ruiz Bolívar, 1988, 1998)
- La construcción de un Repertorio de Herramientas Heurísticas (de Guzmán, 1991; González, 1997; Polya, 1975; Schoenfeld, 1985a, 1985b, 1992)
- La adopción de un Modelo Representativo del proceso de resolución de problemas (Polya, 1975)

Modelo representativo del proceso de resolución de problemas

En relación con la representación del proceso de resolución de problemas se han diseñado diversos modelos; entre éstos, para los efectos de este estudio, se asumió la proposición elaborada por Polya (1975); esta selección se hizo sobre la base de la sencillez estructural y popularidad de este modelo y porque el mismo fue utilizado sólo como un esquema para viabilizar el manejo de un vocabulario común entre los alumnos participantes en la investigación.

El Modelo de Polya consta de cuatro etapas (Comprensión, Planificación, Ejecución y Evaluación) y proporciona un criterio para organizar la actividad del resolutor, posibilitando la construcción de una plataforma global donde se sustenta todo el accionar cognitivo, metacognitivo y afectivo de quien *Hace Matemática* cuando resuelve problemas.

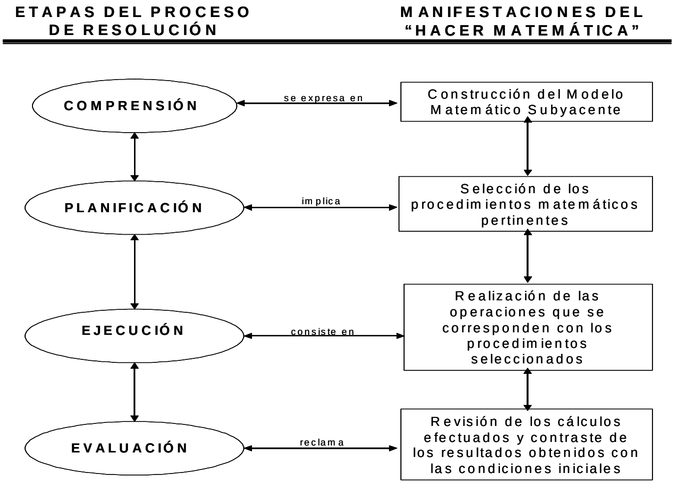
El proceso productivo propiciado mediante el abordaje de problemas con contenido matemático discurre a lo largo de toda la actividad resolutoria y se va manifestando de distinto modo en cada una de las etapas del proceso de resolución.

La primera etapa concluye con la explicitación del Modelo Matemático Subyacente, actuando sobre éste, se continúa el proceso, desarrollando las subsiguientes etapas mediante la selección y consecuente realización de las operaciones matemáticas pertinentes, todo ello acompañado, concurrente o retrospectivamente, de acciones de revisión y/o evaluación del trabajo realizado.

Así que, a cada una de las etapas del modelo que Polya propone para la representación del proceso de resolución de problemas, corresponde una manifestación específica del "Hacer Matemática"; el paralelismo entre éste y la resolución de problemas se muestra en el gráfico 1.

GRÁFICO Nº 1.

PARALELISMO ENTRE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL "HACER MATEMÁTICA"



Es necesario resaltar que, además de las operaciones propiamente matemáticas, en cada una de las etapas del modelo propuesto por Polya se manifiesta una acción observable en la que confluyen, en forma manifiesta o no, exigencias relacionadas con: (a) el manejo de información (procesos cognitivos); (b) mecanismos reguladores de este manejo (procesos metacognitivos); y (c) los sentimientos y emociones que se suscitan al estar comprometido en la realización de una Tarea Intelectualmente Exigente como lo es la resolución de un problema matemático (procesos afectivos). La dinámica generada por la interacción de estas tres dimensiones del resolutor puede apreciarse en el cuadro 1.

CUADRO Nº 1.

EL MODELO DE POLYA COMO ESQUEMA ORGANIZADOR DEL ACCIONAR COGNITIVO, METACOGNITIVO Y AFECTIVO DURANTE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASE	ACCION	PROCESOS		
		COGNITIVOS	METACOGNITIVOS	AFECTIVOS
COMPRENSION Captar la estructura profunda del problema	Lectura Intencional	Capturar información Identificar Esquemas	Tomar conciencia de la intencionalidad de la lectura Tomar conciencia de lo que sabemos Tomar conciencia de bloqueos mentales La tarea cognoscitiva, como por ejemplo sus características, dificultad Evaluar el nivel de entendimiento de una tarea intelectual o de cualquier acto mental Saber lo que se sabe y lo que se ignora, la potencialidad o las limitaciones que tiene, el grado de dificultad o de complejidad de una tarea	Tomar conciencia de las preferencias y estilos Problemas que le gusta resolver Controlar la impulsividad Concepto de sí mismo y de otros, Reconocer fallas y potencialidades
PLANIFICACION Establecer un curso inicial de acción resolutiva	Elaborar planes de ataque	Evaluar los planes elaborados para atacar el problema (cantidad y calidad de las operaciones matemáticas requeridas)	Si no se consiguen, al principio, varias vías para trabajar el problema, se empieza por la que se tenga La estrategia, como conocimiento del mérito relativo de diferentes alternativas, para enfocar una tarea cognoscitiva Predicción de las consecuencias de un evento	
EJECUCION Desplegar las acciones derivables del plan de ataque seleccionado, con el propósito de encontrar la solución del problema	Poner en práctica el plan que se considera más viable y efectivo para encontrar la solución del problema	Poner en práctica el Conocimiento Procedimental (cómo se hacen las cosas: operaciones, algoritmos, fórmulas, procedimientos)	Reconocer círculos viciosos; Si no se llega a nada o se complica se debe evaluar el plan y establecer otro plan que se crea que puede satisfacer la solución en el tiempo esperado; Cualquier camino que potencialmente pueda llevar a la solución debe ser recorrido en su totalidad Manejo de las actividades a realizar Práctica en el uso de la retroalimentación Hacer preguntas adecuadas, decidir con propiedad cuándo se requiere releer un material	Activar mecanismos de autocontrol, cuando no se logra la solución de un problema en el tiempo que se ha estimado suficiente para resolverlo. Evitar la desesperación y la angustia.
VERIFICACION Comparar el Estado Final con el Estado inicial (pertinencia, verosimilitud de la solución); proyección de la información (aprender a partir del problema)	Revisar proceso y resultado		Verificación de los resultados de las propias acciones	Satisfacción Sensación de plenitud, disfrute y gozo Refuerzo del Autoconcepto Matemático Confirmación de la Vocación hacia el trabajo con la Matemática Incremento de la Autoestima Superación de fobia y miedo hacia la Matemática Aumento de la Confianza en Sí mismo

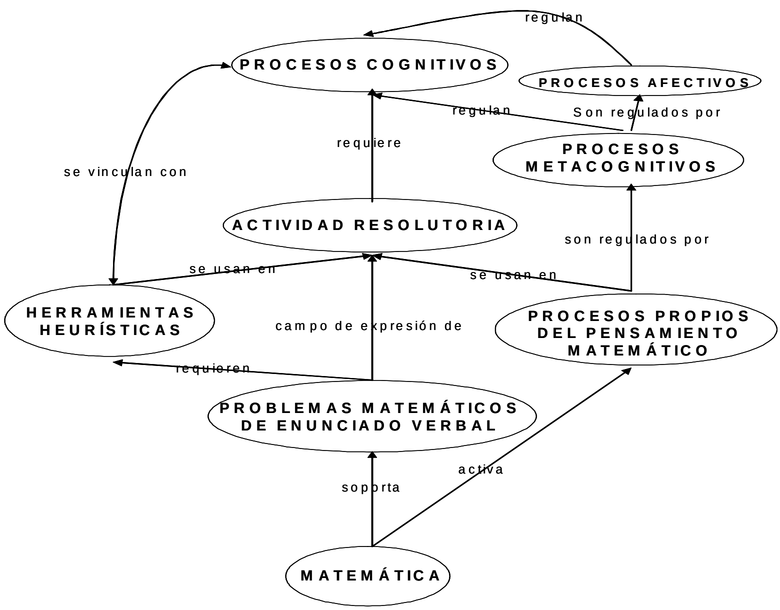
Con base en lo anteriormente expuesto, puede afirmarse que en la actividad resolutoria de problemas matemáticos el resolutor pone en juego los siguientes elementos:

- Conocimientos de contenido matemático
- Herramientas Heurísticas para el abordaje del problema
- Una representación mental del proceso de resolución de problemas
- La conciencia de sus propias debilidades y fortalezas como resolutor.

El último de los aspectos antes nombrados es de naturaleza metacognitiva (González, 1993-1996), lo cual se manifiesta como toma de conciencia y reflexión en torno a la dinámica e interrelación de todos los aspectos implicados en la resolución (matemáticos, cognitivos y comportamentales); ello se muestra en el gráfico 2.

Gráfico Nº 2

Relaciones entre la Matemática, cognición y metacognición durante la resolución de problemas



En resumen, el Modelo de Polya proporciona un sistema común de códigos que permite la negociación y el intercambio de significados entre varias personas que se abocan a la solución de un problema o de varios problemas distintos; dicho modelo actúa como un contexto donde pueden ser ubicadas las diversas acciones llevadas a cabo individualmente por cada uno de los sujetos en procura de la solución del (o de los) problema(s) planteado(s). A continuación se expone parte de la reflexión realizada por uno de los alumnos participantes en el estudio en relación con su propio perfil como resolutor de problemas; en este relato se aprecia la mención implícita a las etapas del Modelo de Polya como referencias para evaluar su pericia en el momento de resolver problemas.

> *Con respecto a la forma de enfrentar un problema, puedo decir que he tomado cierto grado de conciencia del orden lógico de los pasos o etapas en la resolución de un problema. Anteriormente fallaba en las etapas de comprensión del problema y el planteamiento de vías para resolverlo, ya que muchas veces no me daba cuenta de los errores tratando de resolver el problema. He aclarado que el comprender y planificar vías de ataque de un problema facilita grandemente el éxito en la búsqueda de la solución de un problema* (Víctor, clase Nº. 6).
>
> *¿Cómo resolvíamos problemas antes (al inicio del taller) y cómo resolvemos problemas en este instante?*
>
> *Antes: Bueno, la primera etapa de comprensión del problema la realizaba prácticamente igual que ahora, pero sin conciencia de que era una de las etapas del modelo de resolución de problemas. Muchas veces me ocurría que al tratar de captar la estructura profunda de un problema se me presentaban muchos pensamientos negativos: "está muy difícil" , "este problema me asusta", etc.*
>
> *Respecto a la etapa de planificación, realmente no la cumplía, sino que lo primero que se me ocurría lo hacía, claro que siempre tratando de llegar a la solución pedida, no pensaba en planes alternativos, sólo ejecutaba lo pensado en una misma acción; y por lo general, una vez encontrada la respuesta, no la comprobaba ya que asumía que estaba bien.*
>
> *Ahora: Tengo conciencia de la primera etapa y la gran importancia que tiene darse cuenta de todos los datos que da el problema así como lo que pide; también trato en lo posible de tener por lo menos dos vías para atacar el problema; esto es, pensar más para luego trabajar menos; sin embargo, no descarto el hecho de encontrar nuevos planes a medida que voy ejecutando uno de ellos.*
>
> *Una vez ejecutado el plan y encontrada la respuesta, verifico los resultados* (Víctor, autobalance Nº. 1).

Como puede inferirse, el Modelo de Polya, además de constituir un esquema para organizar el proceso de búsqueda de solución a los problemas, proporciona un vocabulario que permite la comunicación y el intercambio de ideas entre todos los resolutores; por tanto, dicho modelo puede ser asumido como un marco de referencia general que ofrece la oportunidad de contar con un vocabulario común y un contexto en el cual son interpretables las diferentes circunstancias que se le presentan a los alumnos durante la resolución de los problemas.

La resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor

Si se adopta el enfoque de Procesamiento de Información para interpretar la actividad cognitiva que una persona despliega cuando resuelve un problema (Wittrock, 1986), y además se concibe a la Matemática como una modalidad específica del pensamiento humano, entonces, se puede presumir la existencia de vínculos entre la actividad matemática y la cognición durante la resolución de problemas matemáticos tal como se muestran en el gráfico 3.

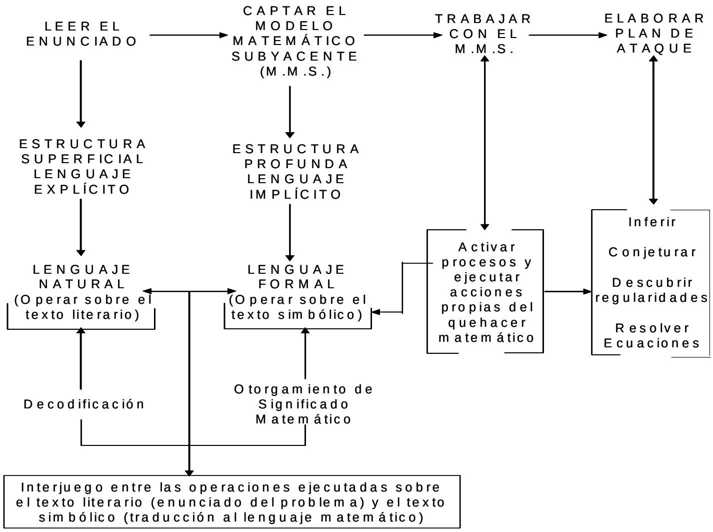
Gráfico Nº 3

Interacción entre Matemática, como área del saber, y las cogniciones del resolutor de problemas

En el caso de los Problemas Matemáticos de Enunciado Verbal (escrito), durante el proceso que conduce desde la decodificación del enunciado hasta su matematización, es decir, su traducción en un texto simbólico que representa al Modelo Matemático Subyacente (MMS), se produce un Interjuego Cognitivo que, partiendo de las operaciones ejercidas sobre el contenido del enunciado, concluye con la realización de las acciones propias del quehacer matemático asociadas con el proceso de búsqueda de la solución del problema. La dinámica de dicho interjuego se muestra en el gráfico 4.

GRÁFICO Nº 4

DINÁMICA DEL INTERJUEGO COGNITIVO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. DE LA DECODIFICACIÓN A LA MATEMATIZACIÓN



La matematización del enunciado del problema implica la penetración en la Estructura Profunda de éste y ello se hace ostensible en la explicitación del MMS correspondiente; esto es la evidencia de que se ha comprendido el problema, lo cual es un aspecto crucial para su resolución; por tanto, es necesario que el resolutor esté muy conciente de las exigencias cognitivas de esta fase de la actividad resolutoria.

> *Al estudiar* (leer el enunciado de) *un problema es necesario interpretar el lenguaje implícito y el explícito y confrontarlos para poder hallar la comprensión global* (Edgar, clase Nº. 5).

Se reconoce que en el enunciado -planteamiento- de un problema, la información se presenta en dos niveles: superficial (explícito) y profundo (implícito); este último es el que refiere al Modelo Matemático Subyacente al problema, su captación es la medida del logro de la comprensión cabal del problema.

La acción de leer se asocia con el proceso cognitivo de interpretar el lenguaje explícito (estructura superficial) en el que viene dado el enunciado a los fines de acceder al MMS (estructura profunda, lenguaje implícito) con lo cual se logra la comprensión cabal del problema.

> *Como consecuencia de* (interpretar) *el lenguaje implícito* (es decir, la estructura profunda, modelo matemático subyacente) *se pueden derivar inferencias lógicas, que pueden ser la clave en la resolución* (del problema) (Edgar, clase Nº 5).

En el gráfico 5 se muestra una representación de las interrelaciones entre las exigencias cognitivas de la Etapa de Comprensión, las estructuras superficial y profunda de un problema y la intencionalidad de la lectura que se hace del enunciado.

Gráfico Nº 5.

Interrelaciones entre la demanda cognitiva de la fase de comprensión, la estructura del problema y el propósito de la lectura de su enunciado

En síntesis, los problemas y su resolución resultan un medio adecuado para Hacer Matemática en el aula de clases; para ello, resulta adecuado asumir un modelo representativo de la actividad resolutoria, entendida ésta como la ejercitación de procesos cognitivos y metacognitivos, concurrentemente y a posteriori de la actividad resolutoria; de esta manera, asumiendo la Matemática como un modo especial de pensamiento, resulta viable incorporar la perspectiva del resolutor en los proyectos de formación inicial de profesores de Matemática que estén sustentados sobre la base de los procesos de formulación, planteamiento y resolución de problemas.

Modalidades de trabajo en clases de Matemática centradas en la resolución de problemas

El modelo didáctico originado en la investigación que dio lugar al estudio aquí reportado, se basa sobre la resolución de problemas realizada conforme a cuatro modalidades diferentes pero complementarias: resolución de problemas individualmente, en parejas, en pequeño grupo y en grupo total. A continuación se expondrá detalladamente cada una de ellas.

Trabajo individual

Esta modalidad corresponde al caso en el cual, todos los alumnos, cada uno trabajando por separado, se enfrentan a un mismo problema, procurando estar atentos a la actividad mental generada por el esfuerzo personal que realizan al intentar resolverlo, de modo que puedan hacerse conscientes de su propia dinámica cognitiva; es decir, de los procesos de pensamiento que desarrollan cuando llevan a cabo la actividad resolutoria. El abordaje individual de un problema es una experiencia idiosincrásica; es decir, cada alumno se enfrenta al problema desde su propia perspectiva; es así como, la representación de la situación problemática que cada sujeto construye tiene carácter personal.

Igualmente, son personales tanto las trayectorias que el alumno traza y/o recorre desde el Estado Inicial hacia el Estado Meta o Solución, como las emociones, sentimientos y demás circunstancias afectivas que se generan en él cuando intenta resolver algún problema. A continuación se muestra un ejemplo.

> *Primeramente leí tres veces el enunciado del problema y lo asocié con un problema que había resuelto anteriormente. Leí nuevamente para ver qué era lo que tenía y qué me pedían; pensé que no debía dejarme influenciar por las dificultades que se me habían presentado en la resolución de otro problema y me dije a mí mismo: tengo que hacer el problema y encontrar la solución.*
>
> *Me quedó claro que tenía que trabajar con ecuaciones; se me ocurrió...*
>
> *El único plan que yo veía era a través de las ecuaciones y me dispuse a sacar los datos...*
>
> > *A = edad de José*
> >
> > *B = edad de Juan*
> >
> > *C = edad de Julio*
> >
> > *A + B + C = 17 años y 6 meses*
> >
> > *D = bolsa de ciruelas = 770 ciruelas*
>
> *No encontraba cómo hacer las otras ecuaciones. Pensé nuevamente en el anterior y leí nuevamente el enunciado para ver si me ayudaba en algo pero no lograba descifrar la relación. Pensé nuevamente en ecuaciones, es decir, en las variables que me involucraban todo esto; y se me ocurrió escribir que entre los tres recibirían 770 ciruelas...*
>
> *No puede ser, José no pudo tomar 11 ciruelas y en total eran 770; es algo absurdo.*
>
> *Vuelvo a leer el problema. Lo que necesito es la relación entre las ecuaciones. Me parece muy difícil, tengo que pensar muy bien cuáles deben ser las verdadera ecuaciones.* (Cristóbal).

Se tiene entonces que la búsqueda individual de solución a un mismo problema, por parte de varias personas, aporta a cada una de éstas una perspectiva particular de la situación. Sobre la base de estas vivencias, experienciadas idiosincrásicamente por cada participante al enfrentarse con problemas específicos, se puede proceder a la *elaboración teórica de conceptos*, propiciando intercambios comunicativos cuyo contenido inicial hace referencia a la experiencia personal vivenciada por cada sujeto.

Para lograr lo anterior, se les insta a que mientras están trabajando con el problema, anoten, escriban, “todo lo que pasa por su mente”; de este modo se obtiene un registro de la actividad mental contentivo de expresiones escritas relacionadas con: (a) planes elaborados para atacar el problema, (b) procedimientos utilizados para verificar la solución encontrada, y (c) cálculos derivados de las diferentes operaciones matemáticas implementadas. Además de lo anterior, también se les solicita que efectúen anotaciones relativas a los pensamientos, emociones y otros aspectos afectivos que se suscitan “mientras están enfrascados en el problema”.

Estos testimonios escritos, donde los alumnos tratan de detallar todo lo que piensan cuando intentan resolver algún problema, son un elemento clave para examinar, a posteriori, su pericia como resolutores; por ello, se debe brindar el máximo de oportunidades posibles para que los alumnos pongan en práctica el registro de su actividad cognitiva personal:

> *Tuvimos todo un mes de ensayos realizando problemas individuales, no me acostumbraba a la idea de transcribir mis pensamientos en el problema pero, poco a poco, fui aumentado mi habilidad para hacerlo* (Erlinda, resumen del curso).

Algunas de las herramientas heurísticas que coadyuvan a la toma de conciencia acerca de la actividad cognitiva personal y su consiguiente registro son las siguientes:

Hablar con el problema

Esta es una heurística sugerida para iniciar el abordaje de un problema; consiste en establecer un “diálogo” con el enunciado, en el cual se toma en cuenta que los problemas “responden” cuando se le formulan preguntas tales como las siguientes: *¿qué me das?, ¿qué me pides?, ¿qué es lo que debo encontrar?;* estas interrogantes pueden ser respondidas satisfactoriamente a partir de la lectura reiterada del enunciado del problema tantas veces como sea necesario.

Autointerrogatorio

Este un procedimiento para orientar la Reflexión Concurrente durante el proceso de resolución.

> *Mientras se está resolviendo un problema, uno debe preguntarse: ¿qué estoy haciendo?, ¿para qué lo estoy haciendo?, ¿adónde me lleva lo que estoy haciendo?)* (José Gregorio).
>
> *¿Cómo es posible darse cuenta, de manera consciente, de que en un momento en que se está resolviendo un problema se está dando, simultáneamente al proceso cognitivo, el proceso metacognitivo?. Respuesta: autoformulándonos preguntas que nos hagan darnos cuenta de estos procesos: ¿Cómo, para qué, hacia dónde voy? ¿Cómo está funcionado el plan seguido? ¿Estoy tardando demasiado en resolver el problema?, ¿qué conocimientos poseo que me pueden ser útiles para resolver el problema? ¿Domino correctamente este conocimiento o tengo dudas al usarlo?* (Víctor)

Además de lo anterior, con la ayuda del docente, el alumno en su condición de resolutor individual de problemas, puede darse cuenta de las exigencias cognitivas del proceso, lo cual se vincula con la adquisición de una conciencia metacognitiva.

> *Mis impresiones acerca del proceso que seguí para tratar de encontrarle una solución a este problema son las siguientes: es necesario mantener una conducta de autocontrol de las acciones realizadas para constatar o advertir cualquier irregularidad durante el desarrollo de resolución; es necesario observar detallada y concienzudamente los pasos efectuados y preguntarse a sí mismo: ¿qué se esta haciendo?, ¿por qué? y ¿para que? Estas preguntas pueden servir como indicadores y alertas, para detectar algún aspecto contraproducente durante la resolución del problema. Hay*

> *que oír las voces internas, las cuales constituyen indicios de meta-cognición en evolución y crecimiento. En general he aprendido sobre la necesidad de considerar en toda su extensión, la eminente importancia de los procesos meta-cognitivos en la resolución de problemas.* (Edgar, clase Nº. 25)

Entre los rasgos de naturaleza metacognitiva que se pueden resaltar, están los siguientes:

- *La conversión de la actividad resolutoria propia en objeto de reflexión*, en este caso, la reflexión se realiza concurrentemente con la ejecución de la actividad resolutoria: “Es necesario mantener una conducta de autocontrol de las acciones realizadas para constatar o advertir cualquier irregularidad durante el desarrollo de resolución”.
- *El resolutor monitorea y regula su propio accionar cognitivo* mediante un procedimiento de auto-interrogatorio: “es necesario observar detallada y concienzudamente los pasos efectuados y preguntarse a sí mismo: ¿qué estoy haciendo?, ¿por qué? y ¿para qué? Estas preguntas pueden servir como indicadores y alertas, para detectar algún aspecto contraproducente durante el proceso de resolución del problema”.
- *Se reconoce la importancia y se aprecian los otros procesos que acompañan a la actividad de procesamiento de información propia de la resolución de problemas*: “Hay que oír las voces internas, las cuales constituyen indicios de metacognición en evolución y crecimiento. En general he aprendido sobre la necesidad de considerar en toda su extensión, la eminente importancia de los procesos meta-cognitivos en la resolución de problemas”.

Trabajo en parejas

Esta modalidad se genera cuando dos alumnos, en cooperación mutua, se abocan a la resolución de un mismo problema. En este caso, los intercambios comunicativos orales que se producen se van registrando por escrito, incluyéndose las operaciones matemáticas efectuadas así como también todas las incidencias propias del proceso referidas a la reflexión que ambos miembros de la pareja realizan acerca de las actividades que están llevando a cabo en búsqueda de la solución del problema que tratan de resolver.

El trabajo en parejas constituye

> *... muy buena idea, ya que como se dice, dos mentes piensan más que una* (Erlinda).

y consiste en

> *...revisar el trabajo o proceso de resolución de problemas pero entre dos* (Víctor).

En este caso:

> *... se trabaja resolviendo un problema entre dos, y se lleva un registro secuencial. Para lograr un mejor registro se procede a usar grabadores, verbalizando todo lo que se piensa..* (Víctor).

Cuando uno de los miembros de la pareja habla mientras el otro se queda callado, el hablante hace las veces de "yo interno" de su compañero diciéndole, en voz alta, cuestiones tales como:

> *no te calles, qué piensas, dilo, qué tiempo llevas trabajando el problema* (Cristóbal, resumen final del Curso).

Con esto se estimula la toma de conciencia por parte del oyente en cuanto a las peculiaridades de su propia actividad resolutoria.

Ejemplos de Resolución de problemas de acuerdo con la modalidad de trabajo en parejas

A continuación se expondrán dos casos específicos de trabajo en parejas; se trata de los problemas intitulados "Confusión" y "Relojes de arena".

Ejemplo Nº 1:
El problema "Confusión"

Enunciado del problema

> "Cuando mi sobrina nació yo tenía 10 años, hoy tengo el doble de la edad que ella tenía cuando mi edad era igual a la que ella tiene ahora. Cuando llegue a mi edad actual, yo estaré con medio siglo. ¿Qué edades tenemos mi sobrina y yo?"

Clasificación del problema

"Confusión" es un problema de los denominados de "traducción simple" o "compleja", éstos "son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática. En el enunciado aparece toda la información necesaria para la resolución del mismo, y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir; el método de solución se reduce a interpretar correctamente el problema; es decir, a elegir el algoritmo adecuado. Su propósito es reforzar la comprensión de los alumnos y conseguir que éstos sean capaces de traducir situaciones del mundo real a expresiones matemáticas" (Blanco Nieto, 1993; p. 52),

El trabajo de resolución de este tipo de problemas implica:

- Interpretar las situaciones a las que se refiere el enunciado, y reconocer las relaciones que se pueden establecer entre las magnitudes que son identificables en ellas.
- Traducir a enunciados simbólicos o ecuaciones numéricas, las relaciones reconocidas entre las magnitudes referidas en el enunciado.
- Resolver esas ecuaciones sucesivas aplicando las técnicas del cálculo numérico.

Solución del problema

En esta clase (a la cual llegué tarde) se propuso la resolución de algunos problemas. En tal oportunidad trabajé junto con Nancy, en la resolución del problema "Relojes de arena" y "Confusión". (Elaboración de protocolos) *Iniciamos el análisis de tales problemas, registrando la información y el proceso en forma protocolar. Mis impresiones acerca del problema "Confusión" son las siguientes: aparentemente el planteamiento sugería la aplicación de elementos algebraicos sencillos para la obtención de la respuesta. Sin embargo la redacción de ciertas ideas, no lucían tan claras y directas; lo cual lleva a hacer un seguimiento más integral del problema.*

La parte clave para mi, la constituyó la última frase" ...yo estaré con medio siglo". Esa información facilitará el proceso de resolución. (Heurísticas de iniciación) *Durante el proceso se hicieron algunos ensayos tentativos acerca del problema para visualizar el comportamiento de las edades, lo que corroboró la obtención de la respuesta final. La heurística empleada consistió en la traducción del problema en un lenguaje simbólico bajo un contexto algebraico.*

Representación gráfica de la solución

Nací X-10 X+10

X=sobrina

Y=yo

0 10 X X+10 Y=X+10

$$Y = X + 10 = 2(X - 10)$$
$$X + 20 = 50 ===> x = 30$$
$$\therefore Y = 40$$

INFORME RETROSPECTIVO DEL PROBLEMA "CONFUSIÓN"

ACCIÓN	EXPRESIÓN	COMENTARIO
1era lectura: "Identificar lo que se busca y lo que se da"	"Aparentemente el planteamiento (enunciado) sugería la aplicación de elementos algebraicos sencillos para la obtención de la respuesta"	Esto es lo que, en general, hacen primero (enfoque algebrizante)
	Sin embargo, la redacción de ciertas ideas no lucían tan claras y directas	Generador de demanda cognitiva que evidencia la existencia de un problema auténtico para este sujeto./ Contrarresta la impulsividad
Segunda lectura	Lo cual conllevó a hacer un seguimiento más integral del problema	
"Identificar información relevante e irrelevante (examinar con toda la información dada)"	La parte clave para mi la constituyó la última frase "yo estaré con medio siglo"; esta información facilitó el proceso de resolución	
	Durante el rpoceso se hicieron algunos ensayos tentativos acerca del problema para visualizar el comportamiento de las edades, lo que corroboró (permitió) la obtención de la respuesta final	Ensayo y Error Traducción de representación textual a representación gráfica
	La heurística empleada consistió en la traducción del problema en un lenguaje simbólico bajo un contexto algebraico	Hay coincidencia con lo que se reporta en la literatura: interpretar las relaciones contenidas en el enunciado y traducir a ecuaciones

Revisión del protocolo correspondiente al problema "Confusión"

Comprensión del problema

- Lectura
- Traducción al lenguaje algebraico
- Identificación de información clave
- Identificación de lo que dan y lo que piden
- Ensayo sistemático

No hay referencia a la acción inicial de leer el enunciado; dado que el enunciado del problema vienen dado en forma de texto, es de suponer que tal lectura haya ocurrido aun cuando no se haya expresado explícitamente que ello se hizo.

¿Cómo se le "entró al problema? a) Usó como estrategia la traducción del lenguaje natural al lenguaje formal (asignar variables a cada afirmación, 1 y 3); b) Nueva lectura en voz alta ("realiza un análisis verbal del problema", 3); c) Identificación de la información clave ("Yo estaré con medio siglo"); d) A partir de la primera afirmación derivaron una diferencia de diez años, "si cuando ella tenga lo que yo tengo hoy, yo tendré 50 y le llevo diez, entonces, hoy yo tengo 40 y por tanto la sobrina 30")

Socialización del conocimiento matemático; intercambio de puntos de vista 5, 9: En 4 Nancy, por ensayo, había resuelto el problema; Edgar parece insatisfecho y propone verificar mediante una discusión más cuidadosa (¿uso de herramientas algebraicas?).

Resolución algebraica del problema

- Considerar el enunciado en su totalidad
- Traducción al lenguaje algebraico

Nancy insiste en sólo verificar.

Edgar (aunque ve posible y sabe cómo hacerlo) se resiste a sólo verificar e insiste en continuar con el procedimiento algebraico (10) vía por la cual accede a la solución que ya Nancy había conseguido (por ensayo sistemático) en 4 (La insistencia de Edgar puede estar asociada con su inclinación hacia los problemas del tipo "planteo algebraico o traducción").

Nancy confirma (acepta, reconoce) lo hecho por Edgar.

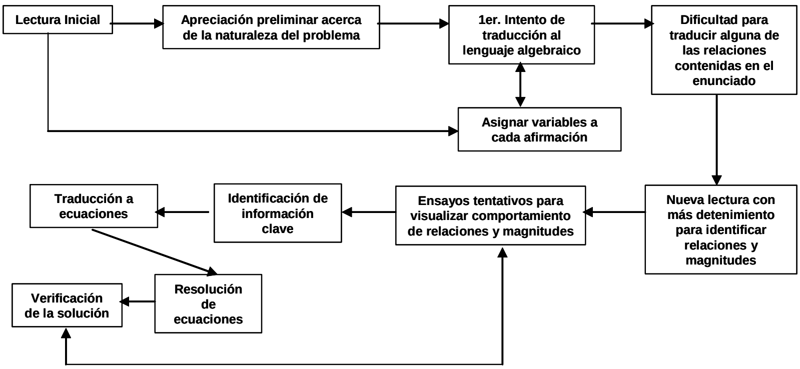
Verificación de que los resultados obtenidos satisfacen la condición inicial.

Visión retrospectiva del proceso.

La representación gráfica del proceso de solución del problema "Confusión" puede apreciarse en el gráfico 6.

Gráfico Nº 6

Representación gráfica del proceso seguido para resolver el problema "Confusión"



Ejemplo Nº 2:
El problema "Relojes de arena"

Enunciado del problema

En la partida de un rally de velocidad, parten carros cada 15 minutos, y el reloj superelectrónico del director de pruebas se dañó. Un burlón aparece con dos relojes de arena de siete y once minutos, ¿será posible marcar con ellos intervalos de 15 minutos?

Clasificación del problema

Según Blanco Nieto (1993), este es un problema de procesos, porque en el enunciado no aparece explicitada "la forma de cálculo, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución [...] no aparece una estructura clara en el enunciado que posibilite la traducción fácil a una expresión matemática. Esto posibilita diferentes formas de abordar el problema ya que al no disponer fácilmente de un algoritmo que lo resuelva, obliga al alumno a pensar sobre el mismo y buscar una estrategia de solución" (p. 54). Algunas estrategias para solucionar este tipo de problemas son:

1. Simular una situación real
2. Ensayo sistemático y formulación de un modelo general que incluya como caso particular el enunciado del problema dado, y
3. Utilizar diagramas o alguna otra representación gráfica que facilite la tarea.

Las dificultades asociadas con este tipo de problemas tienen que ver con: las limitaciones para hacer representaciones gráficas y para establecer procesos de generalización; no obstante, permiten incentivar la imaginación y la creatividad y buscar caminos nuevos que lleven a la solución.

Solución del problema

> *El segundo problema resuelto fue: "Relojes de arena", ante el mismo, estudiamos algunas situaciones particulares factibles. Debo admitir que hubo en mí la tendencia de desechar los recursos visuales que podían contribuir a solventar el problema.* (Metacognición: reconocimiento de bloqueos) *Me imaginé dos relojes de arena que drenaban simultáneamente, cuando el reloj de 7 minutos se detenía, continuaba funcionando el reloj de 11 minutos por espacio de 4 minutos, al fin del cual se detenía también; seguidamente éste último reloj se invertía para registrar un nuevo período de 11 minutos. El reloj de 7 minutos se mantenía inalterado. Los 4 minutos más 11 minutos contabilizaban un total de 15 minutos tal como se sugiere en el enunciado del problema.* (Revisión del Proceso y Evaluación de la Solución) *Esta solución tiene la particularidad de hacer tedioso el seguimiento del tiempo, especialmente porque hay que esperar 7 minutos para iniciar el registro de los 15 minutos. La idea que imaginé fue la elaboración de un 4, teniendo el 7 y el 11; ya que con sólo estos dos últimos datos no se consigue el 15. 7 + 11 = 18; 11-7 = 4. La última operación me parecía ajustada a la realidad, porque se trataba de establecer la diferencia entre los registros de los relojes antes indicados.* (Edgar, clase Nº. 20)

Informe retrospectivo de la solución de "Relojes de arena"

EXPRESIONES	INTERPRETACIÓN
Después de leer el enunciado del problema)" Estudiamos (ensayamos) algunas situaciones particulares factibles.	Ensayo sistemático
Debo admitir que hubo en mi la tendencia a desechar los recursos visuales (representaciones gráficas) que podría contribuir a solventar el problema.	Persistencia de esquemas; desvalorización de modos de representación del conocimiento matemático diferentes al algebraico; arraigo del modelo algebrizante
Me imaginé dos relojes de arena que drenaban simultáneamente. Cuando el reloj de 7 minutos se detenía, continuaba funcionando el reloj de 11 minutos por espacio de 4 minutos, al fin del cual se detenía también; positivamente éste último reloj se invertía para registrar un nuevo período de 11 minutos. El reloj de 7 minutos se mantenía inalterado. Los 4 minutos más 11 minutos contabilizaban un total de 15 minutos tal como se sugiere en el enunciado del problema.	Ejecución del plan Razonamiento lógico Visualización
Esta solución tiene la particularidad de hacer tedioso el seguimiento del tiempo, especialmente porque hay que esperar 7 minutos para iniciar el registro de los 15 minutos	Evaluación de la solución
La idea que imaginé fue la elaboración de un 4, teniendo el 7 y el 11; ya que con sólo estos dos últimos datos no se consigue el 15. 7 + 11 = 18; 11-7 = 4. La última operación me parecía ajustada a la realidad, porque se trataba de establecer a diferencia entre los registros de los relojes antes indicados. Esta operación facilita la orientación de la solución.	Elaboración de un plan Traducción del lenguaje simbólico al lenguaje total
Debo agregar que (a) en plantea-mientos de esta naturaleza, se hace necesario fijar un estrategia concre-ta y (b) detallada con respecto al proceso, porque ella permite realizar un (c) seguimiento riguroso y minu-cioso de las diversos factores que intervienen en el problema; más aun cuando el problema tiene nume-rosos elementos que pueden hacer más compleja la situación.	a) Percepción de que este problema pertenece a cierta categoría que se caracteriza por tener numerosos elementos que pueden hacer más compleja la situación, ameritan ser cuidadosos y detallados con respecto al proceso; (b) y (c) Estrategia para la solución de problemas de esta categoría.

Revisión del protocolo de la solución del problema "Relojes de arena"

Entre las acciones ejecutadas por los resolutores del problema están las que se indican a continuación:

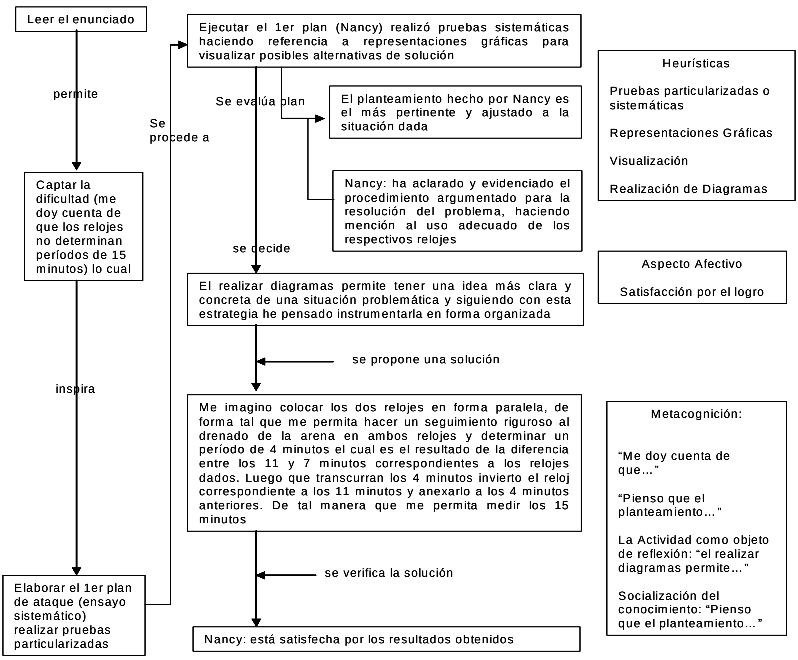
- Lectura del enunciado, captación de la dificultad (comprensión del problema), diseño del primer plan de ataque.
- Ejecución del primer plan (siendo ensayo sistemático, se está atento al surgimiento de regularidades)
- Se evalúa el primer plan; se reconoce el mérito de una estrategia heurística -realizar diagramas-; se asume la estrategia y se toma la decisión de implementarla.

- Visualización
- Verificación y confirmación de que procedimiento ideado como solución del problema es correcto

La representación gráfica del proceso de solución del problema "Relojes de arena" puede apreciarse en el gráfico 7.

GRÁFICO Nº 7

REPRESENTACIÓN DEL PROCESO SEGUIDO POR UNA PAREJA PARA RESOLVER EL PROBLEMA "RELOJES DE ARENA"



TRABAJO EN PEQUEÑOS GRUPOS

Esta modalidad se presenta cuando 3, 4 ó 5 alumnos se dedican a resolver, entre todos ellos, un mismo problema; en este caso, el 'pequeño prupo' constituye una microcomunidad matemática en cuyo seno se llevan a cabo acciones tales como las que se mencionan a continuación:

- Intercambio de opiniones.

- Proposición de ideas diversas para resolver los problemas planteados.
- Activación de procesos, tanto del pensar matemático (trabajar con propiedades y establecer relaciones con una definición), como cognitivos (visualizar).
- Evaluación de planes de ataque propios y de sus compañeros.
- Revisión retrospectiva de planes ejecutados y de procesos de resolución desarrollados.
- Reflexión autocrítica en torno a su propio accionar como resolutores de un problema en particular.
- Identificación de contradicciones con esquemas habituales de pensamiento

Etapas del trabajo en pequeños grupos

Cuando los alumnos constituyen grupos pequeños (no más de cinco integrantes) para trabajar cooperativamente en la resolución de problemas matemáticos, son perceptibles las siguientes cuatro etapas: Familiarización, Evaluación de Planes, Ejecución y Revisión.

A continuación se detallan los pormenores de cada una de ellas.

Etapa I: Familiarización

Durante esta etapa se producen los primeros contactos con el enunciado del problema los cuales tienen como propósito identificar las relaciones que corresponden al Modelo Matemático Subyacente (MMS). Con estas acciones, los integrantes del pequeño grupo procuran formarse una idea global en torno al problema (condiciones iniciales, exigencias, conocimientos matemáticos requerido, cursos de acción posibles, apreciación subjetiva acerca de la dificultad del problema, etc.); este esfuerzo por familiarizarse con el problema, subjetivarlo, apropiarse de él, puede lograrse a través del desarrollo de una *lluvia de ideas*; es decir, una interacción en la que cada participante del grupo tiene la oportunidad de expresar libremente, sin censura alguna, todas las ideas que se le ocurran en relación con el problema, aun aquellas que puedan parecer descabelladas.

> *Desde un principio se argumentaron* (consideraron) *varias ideas o estrategias orientadas a resolver el problema pero sin un horizonte definido.*

Esta acción propicia un intercambio de opiniones en torno al enunciado; cada miembro del grupo expresa su punto de vista en cuanto a cómo interpreta las expresiones constitutivas del enunciado y qué plan propone para intentar resolver el problema.

Sin embargo, se debe tener cuidado (*conciencia de los aspectos a tener en cuenta cuando se resuelven problemas en pequeños grupos*) de no desechar inmediatamente una vía de resolución sin antes evaluarla en toda su extensión.

ETAPA II: Evaluación de planes

> *Se deliberaron (evaluaron) diversas opiniones en torno a las condiciones expuestas en el enunciado del problema.*

Durante la etapa de Familiarización, se espera que surjan varias opciones que se traducirán en planes para enfrentar al problema; cada uno de estos planes se estudia y evalúa colectivamente; igual que en la etapa de familiarización, aquí debe haber plena libertad para pensar.

PLAN 1

> *Particularmente asomé la idea de trabajar con las propiedades de los logaritmos <u>para tratar de visualizar</u> una mayor información en cuanto a la estructura del problema y establecer las relaciones con respecto a la definición de progresión aritmética.* (Conciencia del propósito, el "para qué" sirve de regulador y control de la actividad).

Evaluación

Admito que la idea anterior también carecía de rumbo fijo, pero (había la expectativa) de que a la larga podía revelar alguna pista más significativa para orientar una vía de resolución efectiva" (El propio resolutor tiene oportunidad de evaluar y criticar el plan que él mismo propone).

PLAN 2

En medio de la disertación Víctor (otro compañero) asomó la idea de expresar los logaritmos en una misma base, para luego aplicar propiedades inherentes a los mismos

Evaluación

Esta idea no se concretó en su oportunidad (es decir, no se le consideró totalmente y por tanto no se puso en práctica). Sin embargo, después de realizar el proceso de resolución, nos dimos cuenta de la trascendencia de dicho comentario para resolver la situación planteada." (La visión retrospectiva del proceso, permite darse cuenta de debilidades y fortalezas, y reconocer cuál es la información o el aspecto clave que permitió enrumbarse hacia la solución del problema) (En este caso, hay la conciencia de que un plan, descartado al principio, al final puede ser revalorizado).

PLAN 3

Tanto Víctor como Gustavo (otros compañeros), *propusieron trabajar con la tesis es decir, aplicar logaritmos a x18, y21, z28 y luego indagar algún comportamiento especial.*

Evaluación

Al principio no compartí esa vía, porque no me parecía familiar con mi esquema habitual de razonamiento (Conocimiento acerca de su propio proceso de pensamiento/ Metacognición). *Hubiera sido interesante partir de manera lineal desde la hipótesis hasta llegar a la tesis.* (Esta es la típica modalidad de abordar la resolución de un problema como si fuera la demostración de un teorema).

PLAN 4

En últimas instancias predominó la estrategia (plan) *sugerida por Gustavo, la cual consistió en expresar relaciones entre la razón r y las diversas variables involucradas (x,y,z). Sin embargo, a pesar de concretarse varias igualdades alusivas* (es decir, de ensayarse, ejecutarse el plan –lo dicho por Gustavo–)*; no se logró dar con la solución esperada* (hacer la demostración).

Evaluación

Es posible que éste último plan no esté mal desde un punto de vista algebraico, sólo que no se consiguen los objetivos propuestos (no se llega a la demostración).

ETAPA III: Ejecución

Una vez que se ha logrado construir el MMS y discutido y evaluado los posibles planes de ataque, y se ha puesto en marcha alguno de ellos, se entra plenamente en la fase de ejecución, durante la cual los resolutores ejercen su accionar cognitivo, activando procesos propios del quehacer matemático que resultan aplicables al problema.

Es conveniente señalar que es probable que el plan que se esté ejecutando no conduzca a la solución; por el contrario, se puede estar muy "ocupado con el problema" sin hacer avance alguno; en este caso, se debe evitar caer en círculos viciosos así como también identificar y superar los atascos y las "trancas"; una de las opciones para lograr esto consiste en poner en duda la veracidad del enunciado, por lo cual, se debe volver a la etapa anterior realizando una relectura del planteamiento mismo del problema.

Finalmente se puso en duda la veracidad del enunciado en vista de los resultados obtenidos.

Etapa IV: Revisión

Aun cuando se haya obtenido algún resultado que, posiblemente, constituya una solución del problema, resulta provechoso y conveniente realizar una visión retrospectiva de todo el trabajo realizado; ello permitirá que se tome conciencia de la dinámica del proceso, así como también, darse cuenta de posibles círculos viciosos, en los que haya podido incurrir.

> *Haciendo una visualización general del proceso seguido, pienso que se exploraron las posibles vías de resolución* (se ensayaron varios planes) *sin el resultado esperado, pero es importante destacar la naturaleza* (tipo) *del problema* (no se logró hacer la demostración, quizás debido a la dificultad del problema), *es evidente* (que la complejidad del problema crea) *la necesidad de articular la parte cognitiva y meta-cognitiva en el individuo para detectar alguna pista que resuelva la situación.*

Aspectos sociales de la resolución de problemas trabajando en pequeños grupos

En la resolución de problemas trabajando en pequeños grupos, son apreciables los siguientes aspectos sociales: *Comunicación*, *Cooperación*, *Control*; conviene destacarlos con el fin de aprovechar al máximo las posibilidades de este modo de organizar actividad didáctica en el marco de una clase de Matemática centrada en la búsqueda de solución a problemas.

1. Efecto de la *Comunicación grupal* sobre cada individuo: en el grupo se crea un clima cooperativo de trabajo que permite que cada uno de los integrantes incremente su acervo de herramientas para abordar el problema, con base en la información aportada por sus compañeros.

   Es importante destacar que la comunicación grupal puede enriquecer el contexto de ideas y conceptos que sobre el problema se tiene, es decir, amplía el margen de acción en cuanto a la instrumentación de estrategias convenientes y razonables. Esta pluralidad de ideas y opiniones es positiva porque ofrece una variedad de posibles vías de resolución.

2. *Clima Cooperativo:* cuando se trabaja en un pequeño grupo, se genera un clima que hace posible el respeto de las ideas ajenas y la evaluación de las mismas en función del propósito compartido de encontrar la solución al problema además, el grupo acumula un acervo colectivo de saberes que puede ser aplicado al proceso de resolución.

   Desde luego que la interacción grupal es otro factor que promueve la expansión de ideas, planes y estrategias variadas. El conocimiento de fórmulas y herramientas matemáticas puede determinar el grado de fluidez en la resolución de problemas (Edgar).

   Otro de los aspectos relevantes es que cada uno de los miembros del grupo se convierte en mediador del aprendizaje de sus compañeros:

   a. Sugiriendo planes para abordar el problema:

      Tanto Elvira como Víctor habían sugerido de manera inicial (1er. plan de ataque) el análisis del problema a través de los citados ensayos. (información clave aportada en el enunciado del problema)

   b. Colaborando en la construcción del Modelo Matemático Subyacente:

      Luego de realizar los particulares análisis (es decir, después de ejecutar el plan) se llegó a la conclusión (se observó la siguiente regularidad) de que se establecía una estrecha relación entre el número de recorridos y la cantidad de distancia transitada en el proceso. Se llegó a inducir la fórmula matemática que determinaba el comportamiento inmerso en el problema (es decir, se hizo la formalización matemática, se expresó el Modelo Matemático Subyacente en el enunciado del problema).

c. Participando en la realización de las operaciones de cálculo pertinentes:

...y luego que se calculó la distancia total recorrida, mediante un simple despeje...

3. *Control de la impulsividad:* la disminución de la propensión a actuar irreflexivamente es otra de las cuestiones que se puede lograr cuando se trabaja en pequeños grupos:

   La proposición de planes de acción debe ser el producto de una reflexión impregnada de los diversos elementos metacognitivos que interaccionan con el problema en sí (Control de la impulsividad).

La valorización del proceso de resolución de problemas en función de los aspectos sociales del trabajo en pequeños grupos, se muestra en el cuadro 2.

Cuadro Nº 2

Aspectos sociales de la resolución de problemas trabajando en pequeños grupos

ASPECTO	CARACTERIZACIÓN
Comunicación grupal: dialéctica de lo individual y lo colectivo	"Esta pluralidad de ideas y opiniones es positiva porque ofrece una variedad de posibles vías de resolución.": (a) enriquece el contexto de ideas y conceptos que se tienen sobre el problema, y (b) amplía el margen de acción en cuanto a la instrumentación de estrategias convenientes y razonables
Clima Cooperativo de trabajo (respetuoso, estimulante, no descalificador, no agresivo)	Actitud de respeto hacia las ideas de los demás Cada miembro tiene la opción de proponer el plan que estime conveniente y "se debe tener cuidado (Conciencia de los aspectos a tener en cuenta cuando se resuelven problemas) de no desechar inmediatamente una vía de resolución sin antes evaluarla en toda su extensión.
Interdependencia: el grupo como control del individuo	Posibilidad de controlar la impulsividad individual: "La proposición de planes de acción debe ser el producto de una reflexión impregnada de los diversos elementos metacognitivos que intera-ccionan con el problema en sí"

Factores que contribuyen al éxito en la resolución de problemas cuando se trabaja en pequeños grupos

- El grupo, como equipo, posee un conocimiento acumulado que puede ser compartido cooperativamente por cada uno de los miembros individuales; esto refuerza el valor didáctico del trabajo colectivo:

  En el grupo teníamos (los siguientes) *conocimientos* (matemáticos que se requerían para hallar la solución) *progresiones y operaciones con términos de una progresión.*

- Al trabajar en forma colectiva, se brinda la posibilidad de compartir distintas opciones y modalidades para abordar el problema, lo cual permite la superación de esquemas rígidos y bloqueos mentales, ya que se valorizan los distintos modos de enfrentar los problemas:

  Otro factor que ayudó a "desglosar la situación planteada" fueron las herramientas heurísticas que se aplicaron: "diagramación o traducción gráfica del enunciado del problema", "abordar casos particulares" de manera concreta y objetiva. (Esto es una manifestación de la superación del enfoque algebrizante, y plantea la valorización de otros modos de abordar los problemas distintos al planteamiento de ecuaciones algebraicas).

- El trabajo grupal genera una fuerza supraindividual apoyada en el conocimiento compartido:

  Desde luego que la interacción grupal es otro factor que promueve la expansión de ideas, planes y estrategias variadas.

- Al compartir la información matemática que posee cada uno de los integrantes del grupo, se compensan sus debilidades y deficiencias con las fortalezas de los otros compañeros:

  El conocimiento de fórmulas y herramientas matemáticas puede determinar el grado de fluidez en la resolución de problemas.

Todos estos aspectos se resumen en el cuadro 3

CUADRO Nº 3

FACTORES QUE CONTRIBUYEN AL ÉXITO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CUANDO SE TRABAJA EN GRUPOS

FACTOR	APORTE
El grupo como colectividad	Conocimiento acumulado que puede ser compartido cooperativamente por cada uno de los miembros individuales
Amplitud y variedad de Herramientas heurísticas aplicables	Cada miembro puede aportar ideas y sugerencias acerca de las posibles Herramientas heurísticas que pueden utilizarse: diagramación o traducción gráfica, ensayo sistemático, etc.
Interacción grupal	Promueve la exposición de ideas, planes y estrategias variadas
Conocimiento matemático específico	Manejo de fórmulas y herramientas matemáticas aplicables a la situación.

TRABAJO EN GRUPO TOTAL

Concepto

Esta modalidad se presenta cuando todos los alumnos, con la mediación del profesor, se abocan a la búsqueda de la solución de un mismo problema. Todos los participantes (alumnos y profesor) se ubican de un modo tal que sus asientos estén organizados en forma circular y tengan la posibilidad de mirarse unos a otros; el docente, en su rol de facilitador, conduce una Discusión dirigida y utiliza el Interrogatorio guiado a fin de ir recorriendo las diferentes etapas del proceso de resolución del problema.

Etapas de desarrollo

La resolución de problemas de acuerdo con la modalidad de “grupo total” se organiza en las siguientes etapas: formulación del problema, lectura del enunciado, mediación de la comprensión y ejecución de plan de ataque.

A continuación se presentan detalles de cada una de estas etapas.

ETAPA I: Formulación del problema

El trabajo en grupo total comienza con la selección del problema que se intentará resolver; su enunciado puede ser formulado por el profesor o por uno cualquiera de los alumnos; una vez que se haya seleccionado el problema, se giran las correspondientes instrucciones para el trabajo; entre éstas se destacan las siguientes: (a) cada alumno tiene derecho a opinar libremente en relación con su perspectiva acerca del problema; (b) no se debe descalificar a priori ninguna idea acerca de la posible solución del problema.

Esta modalidad de trabajo se ilustrará con el problema cuyo enunciado es el siguiente.

> Considere los siguientes números: 234234, 123123, 777777, 518518.
>
> ¿Qué se puede decir de los números indicados?
>
> Enuncie y demuestre una propiedad que, en general, cumplan todos los números de la forma ABCABC, donde A, B y C son dígitos entre 1 y 9.

En este enunciado aparecen varios números que comparten una propiedad, el asunto consiste en descubrirla, formular una conjetura en torno a ella y luego demostrar dicha conjetura. Se estima que la búsqueda de la solución de este problema requiere la activación de procesos propios del quehacer matemático, tales como: analizar, particularizar, inferir, conjeturar, verificar y demostrar, entre otros.

ETAPA II: Lectura del enunciado del problema

El soporte físico del problema considerado es un planteamiento formulado por escrito (enunciado escrito en lenguaje natural - idioma castellano); por tanto, la primera acción que debe hacer quien intente encontrarle solución es leer dicho enunciado, lo cual supone que el potencial resolutor debe llevar a cabo una actividad decodificadora de procesamiento de información (Todos los alumnos deben hacer individualmente una lectura silenciosa del enunciado)

Así que el contacto inicial con problemas de este tipo se hace mediante una lectura de su enunciado, el cual no constituye una entidad monolítica; por el contrario, en su estructura son perceptibles dos niveles: Superficial y Profundo (González, 1997; Stacey y Scott, 2000).

> *En cualquier problema siempre existe lo explícito* (aparente) *y lo implícito* (profundo). *Un problema jamás se podrá resolver en tanto no sea captada su profundidad. Cuando no se comprende profundamente el problema ocurre, comúnmente, que se le agrega o se le elimina información y entonces el problema es cambiado.* (Víctor, clase Nº. 4).

El primer nivel es explícito, se le denomina *Estructura Superficial del Problema* y está conformada por los párrafos contentivos de las expresiones, oraciones o frases constitutivas del enunciado; el otro nivel está implícito, se le designa como *Estructura Profunda del Problema* y está constituida por las relaciones entre los elementos del enunciado que son expresables matemáticamente.

A la primera de esas dos estructuras se tiene acceso mediante una lectura conciente del enunciado, cuya intencionalidad es hacer explícita la Estructura Profunda del Problema; esto significa que la lectura que se hace con la finalidad de tratar de resolver este tipo de problemas matemáticos, tiene la intención de buscar y captar el sentido y significado matemático de las relaciones expresadas en el enunciado, las cuales constituyen su Modelo Matemático Subyacente (MMS); por esta razón, es necesario que el resolutor de un problema matemático con texto esté conciente de que, cuando lee su enunciado, lo que está procurando con ello es *acceder a su estructura profunda y, en consecuencia, establecer su MMS correspondiente.*

> *Cuando una persona lee el enunciado de un problema con la intención de solucionarlo, se activa toda su maquinaria intelectual como resolutor, procurando capturar la estructura profunda del problema y llevando a cabo acciones en función de resolverlo* (Víctor, clase Nº. 6)

Esta etapa del trabajo con el problema constituye una fase de familiarización durante la cual la intervención mediadora del docente se manifiesta mediante la formulación de algunas preguntas tales como *¿qué están haciendo?* y *¿cómo lo están haciendo?* y luego dejar que los alumnos continúen leyendo atenta y concientemente el enunciado del problema, trabajando con suficiente autonomía, tanto individual como grupal.

ETAPA III: Mediación de la comprensión del problema

Tomando en cuenta que comprender un problema consiste en formular su Modelo Matemático Subyacente, es decir, explicitar su Estructura Profunda, después que los alumnos han tenido tiempo suficiente para leer el enunciado, el docente enfatiza su rol como mediador y, usando la Discusión dirigida y el Interrogatorio guiado, procura que los alumnos identifiquen los vínculos matemáticos implícitos entre los diferentes elementos referidos en el enunciado:

> *Luego de pasar cierto tiempo, el profesor comenzó a preguntar lo que había respondido cada alumno; cada quién comenzó a decir lo que pensaba de la formación de esos números...* (Cristóbal, clase Nº. 3).

Se puede comenzar formulando preguntas de tipo genérico, relacionadas con el modo de abordar el problema, que hagan posible que varios alumnos compartan con el resto de sus compañeros lo que cada uno de ellos observó durante el período de lectura silenciosa individual. Esto permite conocer diversas formas de enfocar el problema y, a la vez, identificar posibles dificultades enfrentadas por los alumnos.

Luego, se continúa la discusión insistiendo en que antes de proceder a efectuar los cálculos, debe pensarse en al menos dos modos para abordar el problema. Durante esta etapa se estimula a los alumnos para que, de manera libre, espontánea y sin restricciones, expongan sus ideas, las que sean positivas se alientan; sin embargo, no se descarta ni se descalifica a priori ninguna de ellas, aún cuando luzca descabellada; al contrario, todas deben ser escuchadas atentamente y ser sometidas a la consideración y evaluación por parte del grupo.

F = Fredy / C = Cristóbal

C.- Uno comenzó por allá diciendo: "Traté de hacerlo pero en realidad no sabía por donde empezar"; otro dijo: "Yo creo que ese número expresado de esa forma debe ser divisible por algún número".

F.- Tiene la idea, por ahí va.

C.- Otro dijo: "Y si descomponemos esos números en sus factores primos"

F.- Buena idea.

(Cristóbal, clase Nº. 3)

Después de plantear varias opciones, éstas deben ser evaluadas; para ello se sugiere que el resolutor se auto-interrogue formulándose, entre otras, preguntas tales como: ¿Qué operaciones debo ejecutar? ¿Cuál es mi grado de pericia en cuanto a su ejecución? ¿Cuánto tiempo requiero para ejecutarlas? ¿De qué clase son? Todo ello con el fin de lograr que los alumnos tomen conciencia acerca de la cantidad y calidad de las operaciones que deben efectuar así como también de la pericia que ellos poseen para llevarlas a cabo.
Siempre que sea posible, se deben escoger varios modos de abordaje (planes de ataque) para ensayar todos aquellos que luzcan plausibles; cuando se tengan dos o más planes, el grupo total se subdivide en sendos subgrupos y a cada uno de éstos se le asigna uno de los planes.

No obstante, lo que habitualmente ocurre es que, con las intervenciones de los alumnos, se obtienen diversas ideas para "atacar" el problema, y a partir de ellas se elabora un "plan de ataque", el cual se construye sobre la base de las aportaciones de los estudiantes y, de hecho, se convierte en un plan compartido para enfrentar el problema.

Así transcurrieron varios minutos y Fredy nos dijo:

F.- ¿y por qué no hacen lo que dijo la compañera?, descompongan los números en sus factores primos, y a su vez traten de buscar otros números con la misma forma y descompónganlos para ver qué sucede, pero tomando en consideración que el mayor número de esa forma es 999999.

(Cristóbal, Clase Nro. 3)

ETAPA IV: Ejecución de plan de ataque

Una vez que se ha construido en forma colectiva un plan de ataque se procede a ponerlo en práctica.

F.- Empiecen

C.- Cada quién copió un número diferente y empezó a descomponerlo. "Se identifican factores primos y se halló M.C.D."

(Cristóbal, clase Nº. 3)

Con este trabajo, se aspira a que cada uno de los alumnos tenga la oportunidad de encontrar las relaciones matemáticas que constituyen el MMS correspondiente al problema.

C.- ... Luego de todo esto, se formuló la primera conjetura: todo número que tiene la forma ABCABC es divisible por 11.

F.- Bueno, ¿no habrá otra forma de enunciarla?.

C.- La mayoría dijo que sí. El mismo profesor escribió en el pizarrón.

"Todo número de la forma ABCABC, con A, B, x S_{10} es divisible por 11".

(Cristóbal, clase Nº. 3)

La mediación por parte del docente ha de orientarse hacia la construcción del MMS; para ello, el interrogatorio puede ser dirigido hacia la formulación de conjeturas basadas en el comportamiento regular de las variables implicadas en el enunciado del problema; estas conjeturas puede ser formuladas, primero, en forma verbal y luego simbólicamente procurando diseñar o llegar a una expresión general; el proceso se conduce hasta que alguno de los alumnos enuncie de manera explícita alguna conjetura basada en las propiedades comunes compartidas por los elementos o variables referidos en el enunciado del problema.

"Todo número de la forma ABCABC es múltiplo de 11"

En este caso, aun cuando el enunciado es correcto, todavía se está en el plano del lenguaje natural; es necesario avanzar más para llegar al MMS; dependiendo del nivel de pericia matemática de los alumnos, aquí podría resultar imprescindible una intervención más directa del docente para ayudarlos a dar el salto hacia la simbolización:

Después hubo otra pregunta:

F.- ¿No habrá forma de generalizarla?
C.- Víctor dijo: "Sí hay"
F.- Bueno, ¿por qué no pasas a escribirla?

Víctor (dirigiéndose al pizarrón) escribió:

11/ABCABC M⫤N wnxZ, xn.11 = ABCABC

(Cristóbal, clase Nº. 3).

Esta última expresión sí constituye el Modelo Matemático Subyacente correspondiente al problema; las próximas acciones de la actividad resolutoria no se ejecutarán sobre el enunciado original sino sobre este modelo donde: (a) están planteadas las relaciones entre los elementos del problema; (b) aparece la información no explícita en el enunciado; y, (c) se complementa el conjunto de interacciones entre datos e incógnitas y los vínculos entre estos dos conjuntos de elementos de un problema.

A partir de aquí se entra en el terreno netamente matemático, manejando el lenguaje formal correspondiente.

Luego el profesor recalcó algo:

> F.- Recuerden que, cada vez que en una proposición aparezca un "existencial", w, la demostración exige una construcción". (Cristóbal, clase Nº. 3).
>
> Después (el profesor) dijo, bueno como tenemos a ABCABC podemos convertirlo en forma de polinomios, pero de base 10 (Cristóbal, clase Nº. 3).

Después de todos estos comentarios (procedimos a hacer la demostración).

$$A10^5 + B10^4 + C10^3 + A10^2 + B10^1 + C10^0 = ABCABC$$
$$A(10^5 + 10^2) + B(10^4 + 10^1) + C(10^3 + 10^0) = ABCABC$$
$$A10^2(10^3 + 1) + B10(10^3 + 1) + C(10^3 + 1) = ABCABC$$
$$(10^3 + 1)(A10^2 + B10 + C) = ABCABC$$
$$ABC(1001) = ABC(1000 + 1) = ABC(1000) + ABC = ABCABC$$

(Cristóbal, clase Nº. 3)

Se trabajó en función de los casos particulares que se tenían y se llegó a la conclusión de que el valor de "n" era 1001 (Víctor, clase Nº. 3).

Conclusiones

El estudio aquí reportado destaca las modalidades de trabajo que se pueden implementar en una clase de Matemática centrada en la resolución de problemas; a partir de la experiencia del autor, son dos las conclusiones principales: (a) la posibilidad de "Hacer Matemática" utilizando la resolución y problemas; y (b) el carácter del papel protagónico que debe desempeñar el docente como mediador de los procesos cognitivos y metacognitivos asociados con la actividad resolutoria. Seguidamente de desarrollará cada una de estas conclusiones.

Conclusión 1:
"Hacer Matemática" utilizando la resolución de problemas es posible

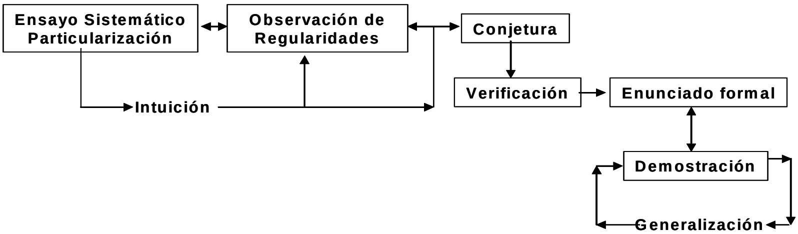
De acuerdo con el enfoque de la actividad resolutoria que se ha mostrado hasta aquí, puede afirmarse que el enfrentamiento con problemas matemáticos con texto propicia la oportunidad de poner en práctica procesos propios del quehacer matemático; de este modo, durante la búsqueda de solución a este tipo de problemas, los alumnos, desde el punto de vista del esfuerzo intelectual que deben realizar, pueden actuar como lo debe hacer un matemático (De Guzmán, 1996).

Así, por ejemplo, mediante la particularización y el ensayo sistemático, en el problema utilizado como ilustración de la modalidad de trabajo en grupo total, fue posible detectar *una posible condición, que evidenciaba una regularidad permanente, para un cierto conjunto de números y que por tanto ameritaba un enunciado formal y su correspondiente demostración.* (Edgar, clase Nº. 3).

Los pormenores de ese proceso, planteados en un plano de interpretación abstracto, se muestran en el gráfico 8.

GRÁFICO Nº 8

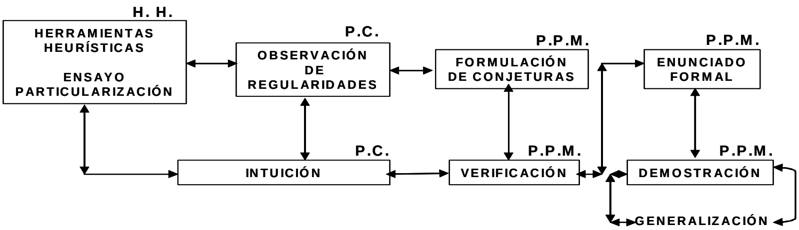
PROCESOS DEL QUEHACER MATEMÁTICO VINCULADOS CON LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA QUE EXIGE LA FORMULACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE UNA PROPIEDAD



Los vínculos entre las Herramientas Heurísticas (H.H.), los Procesos del Pensamiento Matemático (P.P.M.), y los Procesos Cognitivos (P.C.) aplicados en el mismo problema se muestran en el gráfico 9.

GRÁFICO Nº 9

INTERACCIONES ENTRE APLICACIÓN DE HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS (H.H.), PROCESOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO (P.P.M.), Y PROCESOS COGNITIVOS (P.C.)



Conclusión 2: El papel del docente en las clases de Matemática centradas en la resolución de problemas es el de mediador de procesos cognitivos y metacognitivos.

> *En esta clase, el docente realizó una conversación con los alumnos, acerca de los procesos implementados en la solución de problemas y su incidencia en áreas afines a la matemática. El docente propuso la resolución de un ejercicio de manera democrática y libre. En particular seleccioné el problema 6 porque lo observé familiar con conocimientos adquiridos en secundaria, acerca de los logaritmos y sus propiedades* (Edgar).

El docente, como parte de la comunidad matemática que se constituye en el aula cuando ésta se convierte en escenario para la resolución de problemas, desempeña un papel preponderante; gracias a su mediación, la experiencia de resolver problemas se convierte en oportunidad de aprendizaje, dándole trascendencia y posibilitando la toma de conciencia por parte de los resolutores, acerca de aspectos relevantes del proceso.

Las intervenciones del docente se producen después que los alumnos (individualmente, en parejas, en pequeños grupos, o en grupo total) hayan trabajado en forma independiente, y tienen la finalidad de hacerlos tomar conciencia de los procesos de resolución que han instrumentado y ayudarlos a reconocer las incidencias generales claves que acontecieron durante el trabajo realizado. Con base en las "ideas, criterios, y opiniones" que los alumnos emiten acerca de su actividad resolutoria propia, el docente contribuye a la construcción de un discurso interpretativo, que explica lo acontecido, le da sentido, y lo relativiza, mediante referencias a las situaciones comunicadas por los participantes:

Una de las estrategias que puede emplear el docente es el *Interrogatorio guiado*, con éste se busca estimular un proceso de reflexión individual pero compartido y público, en el contexto del grupo total, que permita a los integrantes de éste tomar conciencia de los *procesos activados* durante la resolución del problema; así como también de las *Herramientas heurísticas* utilizadas, a fin de consolidar lo aprendido y garantizar la posibilidad eventual de transferirlo a otros contextos o problemas.

> *Después que el grupo hizo los respectivos comentarios; el docente se acercó para indagar qué procesos de resolución habíamos instrumentado y cuáles fueron las incidencias generales del trabajo realizado. Ante las preguntas del profesor; expuse a grandes rasgos los resultados obtenidos y, además, describí los pasos realizados en forma general.*

El docente, al proponer la modalidad de trabajo y el problema que se trabajará, sigue desempeñando un papel protagónico: selecciona los problemas, elabora el soporte físico que sostiene a sus respectivos enunciados o planteamientos (guías) y "propone" la forma como los alumnos han de organizarse (individualmente, en parejas, en pequeños grupos, o en grupo total) para "resolver" los problemas:

> *La clase se inició con el respectivo saludo del profesor, y luego se propuso trabajar de manera grupal en la resolución de algunos problemas; yo me agrupe con Nancy y realizamos el análisis al problema de la "pelota rebotadora".*

Además, el docente como integrante de la comunidad, es un recurso humano disponible; su labor mediadora resulta conveniente y oportuna, sobre todo en casos cuando se presentan dificultades que no pueden ser superadas por los resolutores.

Ante la constatación de que el trabajo de un grupo o pareja se encuentra atascado, el docente puede acercarse al mismo y extenderles una invitación para que revisen la actividad realizada, con base en la reconsideración de las anotaciones que han quedado consignadas por escrito en las "Hojas de Trabajo" (expresión usada para denominar al soporte material en el que quedan registradas las operaciones y demás cálculos matemáticos realizados por los alumnos durante su actividad resolutoria).

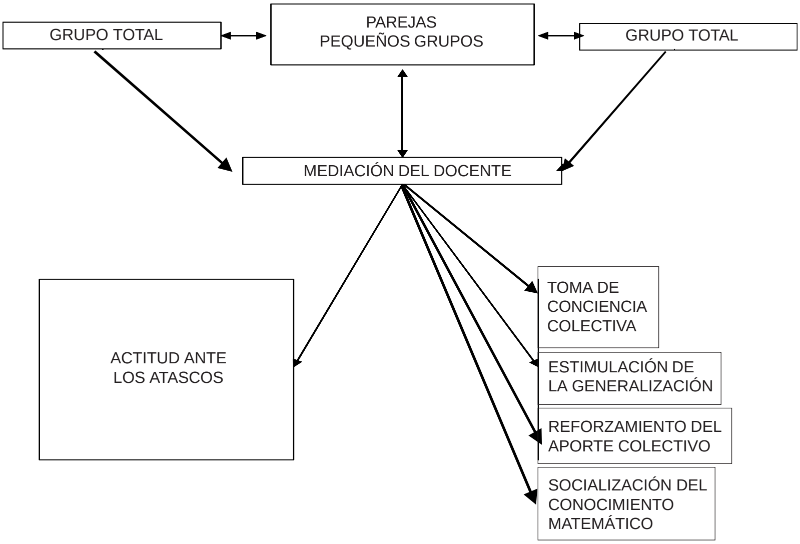
Esta reconsideración puede abarcar tanto el aspecto específico de cómputo (operaciones de cálculo) como el heurístico, es decir, el modo, procedimiento, o estrategia que se ha utilizado para abordar la tarea; en este último caso, se recomienda una re-evaluación de los planes de ataque ejecutados:

> *Afortunadamente el docente se acercó y nos orientó en cuanto al proceso de resolución, lo cual ciertamente llevó a reconsiderar el producto de la actividad intelectual realizada para determinar fallas o errores.*
>
> *Finalmente el docente se unió con el conjunto de alumnos y estableció una conversación para recoger ideas, criterios, opiniones de los alumnos con respecto a la actividad realizada en clase. Sin embargo, el docente mencionó la evidente interrelación y articulación de los procesos metacognitivos y cognitivos, durante la actividad de resolución. El docente hizo alusión a ciertas conductas psíquicas que denotan descalificación y desvalorización de la capacidad de razonamiento cuando, por ciertas circunstancias, no se consigue la solución a un determinado problema, debe evitarse concebir tales inquietudes negativas y contraproducentes (Edgar, clase Nº. 26)*

En el gráfico 10 se puede apreciar el conjunto de interacciones que sirve de base al proceso de socialización del conocimiento:

GRÁFICO Nº 10

INTERACCIONES BÁSICAS EN EL PROCESO DE SOCIALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO



Después que los alumnos trabajan con algún problema, se organiza la Puesta en Común, una actividad a la que se incorporan todos los participantes, destinada a propiciar el intercambio de experiencias, enfoques, puntos de vista, procedimientos, formas de abordar, métodos, soluciones, etc. generadas por cada uno de los resolutores en el proceso de búsqueda de la solución del problema planteado.

> *...una vez resuelto o, por lo menos, encontrados varios planes de ataque, el docente hacía preguntas de reflexión sobre lo que se aprendía o lo interesante que cada uno observaba al resolver problemas y esto quedó grabado por el profesor en algunas cintas del reproductor.* (Víctor, clase Nº. 22).

Así que, después del Tiempo para Trabajar, se realiza una reunión en grupo total para compartir las experiencias individuales; esta reunión es presidida por el profesor quien, actuando simultáneamente como facilitador y mediador de procesos, conduce una Discusión guiada en la que, a través de preguntas convenientemente formuladas, propicia la autorreflexión, orientada a extrapolar y generalizar lo hecho y aplicado durante la actividad resolutoria; de este modo cada alumno puede convertir su enfrentamiento individual con el problema en una experiencia personal de aprendizaje.

Para ello es necesario generar un clima de aula en el cual: (a) se estimule el sentido de igualdad y no de competencia; (b) se propicie el respeto a las ideas de los demás como un asunto valioso; (c) se impulse el trabajo cooperativo, (d) se recurra a las expresiones y vivencias de los participantes; y (e) se estimule permanentemente la reflexión y la toma de conciencia.

El propósito de la Puesta en Común es que los alumnos compartan sus vivencias (¿qué aprendió?, ¿cómo lo resolvió, ¿qué le pareció el problema?, etc.) como resolutores y puedan convertir el proceso de resolución del problema en una experiencia de aprendizaje. Para esto resulta imprescindible hacer que el alumno se dé cuenta de lo que hizo (¿cómo?, ¿por qué?, ¿para qué?) durante el proceso de búsqueda de la solución; ello es posible cuando quien trabaja el problema ha desarrollado un alto nivel de conciencia metacognitiva, pero se potencializa cuando varios resolutores comparten sus respectivas experiencias individuales; en este caso el intercambio y la interacción social le brindan a cada uno de los participantes la posibilidad de darse cuenta y de contextualizar lo que hizo y reflexionar acerca de ello.

Esta es la base del aprendizaje mediante la resolución de problemas; en efecto, durante la puesta en común se comparten las respuestas a las siguientes interrogantes, entre otras: ¿cómo se abordó el problema?, ¿a qué categoría pertenece?, ¿es posible generalizar el método?

> *Luego de pasar cierto tiempo, el profesor comenzó a preguntar lo que había respondido cada alumno...*(Cristóbal, clase Nº. 3).

> *Después comenzó a preguntarle a cada alumno cómo lo había resuelto y me di cuenta de que cada uno de mis compañeros se lo había planteado de forma diferente, otros coincidían con el planteamiento, pero, en total, es verdad lo que dice Fredy que "hay varias formas de plantearse un problema"; lo cual tomaré bastante en consideración.* (Cristóbal, clase Nº. 3).

> *Cuando todos concluimos nuestro trabajo se hizo una breve reseña de cómo cada uno de nosotros había encaminado el problema, por supuesto, basándonos en el Modelo de Polya.* (Erlinda, clase Nº. 5)

> *Luego de aproximadamente 60 minutos, se procedió a hacer un comentario grupal del problema observando la forma como cada uno atacó el problema y se evidenció una vez más lo arraigado de algunos esquemas cognitivos que tenemos: 'ecuaciones, sistemas de ecuaciones'.* (Víctor, clase Nº. 14).

Si el profesor ha intentado resolver el problema, comportándose como un participante más, entonces, durante la sesión de reflexión colectiva acerca de lo que cada quien haya hecho, también puede compartir su experiencia con la de cada uno de los demás participantes:

> *cada quién exponía (en voz alta ante el resto de compañeros) cómo había resuelto el problema"; de esta manera es posible darse cuenta de que "no hay una sola forma de plantearse un problema sino varias formas.* (Cristóbal, clase Nº. 3).

Durante la Puesta en Común, el facilitador desempeña el rol de mediador de procesos cognitivos: llama la atención acerca de aspectos relevantes de la actividad resolutoria, propicia la negociación de significados, invita a la comparación de los abordajes individuales y a la toma de conciencia acerca de las perspectivas adoptadas por cada uno de los participantes.

Algunos de los aspectos sobre los que se ejercita la reflexión, son, entre otros, las heurísticas empleadas, los procesos afectivos, y las estrategias de trabajo. El profesor puede comenzar formulando preguntas generales: *¿cómo lo hicieron? ¿Cómo se sintieron durante el proceso? ¿Cómo abordaron el problema? ¿Qué opinión les merece la estrategia empleada?* Esto hace posible que varios alumnos compartan con sus compañeros lo que han hecho, lo cual permite conocer diversas formas de enfocar el problema y, a la vez, identificar posibles dificultades confrontadas por los alumnos.

Esta interacción social es fuente de aprendizaje y puede constituir un evento que contribuya a incrementar la habilidad como resolutor de problemas de cada uno de los participantes. En efecto, cuando se comparten las experiencias personales adquiridas durante el proceso de búsqueda de solución de algún problema, cada resolutor puede tomar conciencia plena de las características de su propio desempeño; al compararlo con el de sus compañeros se dará cuenta de que, probablemente, éstos han adoptado otros puntos de vista y otras maneras para enfocar el problema.

También puede observar que son diversos los planes de ataque que los alumnos han diseñado y que los errores cometidos por él no han sido los mismos de sus compañeros; de igual modo, las reflexiones sobre los modos personales de resolver problemas que estos últimos hacen, actúan sobre él como "voces interiores", permitiendo que el momento de compartir grupalmente las experiencias se convierta en un reforzador de la actividad metacognitiva individual.

Finalmente, durante la discusión grupal correspondiente a la Puesta en Común se reflexiona acerca de:

ºLa forma como cada uno atacó el problema: de esta manera es posible observar tendencias o preferencias para atacar problemas que sean predominantes en el grupo.

> *Se siguieron resolviendo problemas en grupo y al final se recogieron opiniones acerca de cómo nos sentimos ante el problema*

> *y nuestras impresiones de por qué sí o por qué no se resolvía el problema* (José Gregorio, clase Nº. 23).

º*El proceso seguido para resolver el problema*: con lo cual se procura que los participantes realicen una visión retrospectiva de lo que cada uno hizo.

º*El método aplicado*: para ver si se puede aplicar en otros problemas de la misma clase; es decir, estudiar en qué medida el método usado para resolver un problema determinado es aplicable o utilizable en la resolución de otros problemas que sean del mismo tipo, aunque aparentemente sean diferentes.

º*Los enfoques preferidos para abordar problemas*: no tener conciencia de los mismos puede generar bloqueos a la hora de resolver problemas específicos:

> *tenemos muy arraigado el enfoque algebraico para resolver problemas (uso predominante de ecuaciones) sin tomar en cuenta otros posibles enfoques.* (Víctor, clase Nº. 15).

Referencias

Blanco Nieto, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon (Revista de la S.A.E.M. THALES) 25*; 49-60.

Blanco Nieto, L. J. (1996). *Concepciones y Creencias sobre la "resolución de problemas" de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares.* [Disponible en: http://www.terra.es/personal/ljblaco/pag3e.html]. Consultado el 04/04/04: 18:43 PM.

Callejo, Mª. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Madrid: Narcea S. A. de Ediciones.

De Guzmán, M. (1983). *Algunos Aspectos Insólitos de la Actividad Matemática.* [Disponible en: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/aspectosinsolitos/aspectosinsolitos.html] Consultado el 04 de abril de 2004, a las 18:10 PM.

De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona (España): Editorial Labor, S. A.

De Guzmán, M. (1996). El papel del matemático en la educación matemática. (*Conferencia en el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8 (Sevilla 1996), publicada en las Actas del Congreso, Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla, 1998).* [Disponible en: http://usuarios.bitmailer.com/mdeguzman/guzmanpa/papeldelmatematico.htm] Consultado el 05/04/04; 09:19 am D'Amore, Bruno. (2003) *Elementos de Didáctica de la Matemática.* México: Editorial Iberoamérica. (La edición original es de 1999: *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora Editrice).

González, F. (1993/96). Acerca de la metacognición. *Revista Paradigma, XIV-XVII*. [Disponible en: http://cidipmar.fundacite.arg.gov.ve/volumenes/articulo1p.html]

González, F. (1995, Octubre). Algunas ideas en torno a la mediación cognitiva. *Colecciones CIEAPRO, 2*; 39-59.

González, F. (1996). El sistema de mediación tutorial. *Enfoques (Revista de Investigación del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro), 1* (2, Enero-Julio): 56-71.

González, F. (1997). *Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos.* Tesis doctoral no publicada. Valencia (Venezuela): Universidad de Carabobo.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la resolución de problemas matemáticos. Zetetiké, 6(9).

González, F. (2000) Agenda latinoamericana de investigación en educación matemática para el siglo XXI. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (México), 12 (1); 107/128.

González, F. (2003a). Matemática, educación y ciudadanía. Conferencia pronunciada en el *II Encontro Internacional de Ensino da Matemática*, Universidad Luterana del Brasil (ULBRA), Campus Canoas, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil; 6, 7 y 8 de noviembre de 2003.

González, F. (2003b). Cognición matemática: ¿Modelo de inteligencia o para el desarrollo de la inteligencia? *Acta Scientiae* (Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad Luterana del Brasil) 2003/1, 7-33.

González, F. (2003c). La dinámica P²MA: Una opción didáctica frente a la enseñanza tradicional de la Matemática. *Anais do II Congresso Internacional de Ensino da Matemática.*

Universidade Luterana do Brasil (ULBRA): Canoas-RS, Br. 6 al 8 de noviembre de 2003. Conferencia de Inauguración. Entregado para publicación en la Revista Investigación y Postgrado. UPEL (Caracas, Venezuela)

Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*; 519-524.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En D. A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Co., 3-38.

Kilpatrick, J. Rico, L y Sierra, M (Editores). (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Colección Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis.

Lester, F. K. (1994) Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education. 25 (6)*, 660-675.

Martínez P., O. (2003). *El Dominio Afectivo en la Educación Matemática: aspectos teórico-referenciales a la luz de los Encuentros Edumáticos.* Trabajo de ascenso no publicado, presentado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro"; Turmero, Edo. Aragua, Venezuela.

Maticias disponible en http://www.nacho.unicauca.edu.co/Maticias/Maticias.htm

Polya, G. (1975). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas. [Traducción al Castellano hecha por J. Zugazagoitía del original de 1945 *How to Solve it?.* editado en Princeton, NJ, por Princeton University Press].

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada (España): Editorial COMARES. Colección MATHEMA, Nº 6.

Rocerau, Mª C., Valdez, G., Oliver, Mª, Vilanova, S., Jolis, Mª, (2002, Octubre 23 al 27). Factores afectivos, socio-culturales y heurísticos en la resolución de problemas matemáticos. Ponencia presentada en el *2do. Encuentro Latinoamericano (6to. Encuentro Argentino-Cubano) Misión Educar*. Mar del Plata. Disponible en: http://www.mision-futuro.com/www/congresos/cuba/014Octubre2002.doc. Consultado el: 23 de Febrero de 2004. 05:51 PM

Ruiz Bolívar, C. (1988). La Estrategia Didáctica Mediadora: una alternativa para el desarrollo de procesos en el aula. *Investigación y Postgrado*, *3* (2), 57 -73.

Ruiz Bolívar, C. (1998). La Estrategia Didáctica Mediadora: ocho años después. *Investigación y Postgrado, 13* (1), 15 – 37.

Santos, L. M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1985a). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985b). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Assocciates, Publishers. 361-380.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition an Sense-Making in Mathematics. En D. Grows, Ed. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan; Capítulo 15, pp 334-370.

Stacey, K. y Scott, N. (2000). Orientation to deep structure when trying examples: a key to successsful problem solving. En: J. Carrillo Yáñez & L. C. Contreras González. *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: Una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos*. Huelva (España): Hergué, Editora Andaluza; Capítulo 4, 119-146

Suárez Alemán, C. (2003). Aplicaciones de la historia de las matemáticas en el aula. *Épsilon, Nº 56*, 259-285.

Wittrock, M (1986). Student´s Thought Processes. En.M. C. Wittrock (Ed). *Handbook of Research on Teaching* (Third Edition) New York: Macmillan Publishing Company. Parte 2, Cap. 10; 297–314.