



Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

SINCRONIZACIÓN Y COMPLEJIDAD EN SISTEMAS
DINÁMICOS CON FORZAMIENTO Y RETARDO

Trabajo de grado presentado por:

Br. Leonardo A. Molina T.

como requisito parcial
para optar al título de:

LICENCIADO EN FÍSICA

Tutor: **Dr. Mario Cosenza**

Mérida

Junio de 2008

Resumen

Se estudia el fenómeno de la sincronización en redes de mapas caóticos acoplados en diferentes topologías, con interacciones retardadas y con forzamiento externo. Mediante cálculos numéricos se caracteriza el estado sincronizado de estos sistemas en su espacio de parámetros. Nuestros resultados muestran que el retardo favorece la sincronización tanto en redes regulares como en redes aleatorias. De forma similar, el forzamiento externo también induce sincronización en el sistema, tanto total como generalizada. Por otro lado, se implementa un algoritmo para calcular la evolución temporal de la complejidad de series de tiempo de sistemas dinámicos. Como una importante aplicación, se calcula la complejidad en función del tiempo de canales individuales de electroencefalograma de un sujeto sano y de un paciente con crisis epiléptica. Los resultados sugieren que la epilepsia corresponde a un estado patológico de menor complejidad en relación con el estado sano del cerebro.

A la fuente inagotable de inspiración en todas mis metas: mis padres, Lady y Laudín.

Agradecimientos

Llegue mi palabra de agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que colaboraron en la realización de este trabajo de investigación:

Un agradecimiento muy especial al profesor Mario Cosenza, tutor excepcional con quien pude encontrar orden en el caos que gobernaba esta tesis; al profesor Javier González por sus detalladas correcciones; al profesor Kay Tucci por la guiatura en cuestiones de programación algorítmica; al profesor Orlando Álvarez por las valiosas sugerencias; a Miguel Escalona por ser parte activa en el desarrollo del capítulo de complejidad; y en general, a todo el grupo de *caóticos* por permitirme aprender de temas complejos y reir de asuntos mas simples.

Gracias a Rita, Fredderick y Doris por ser los amigos con quienes compartí y hablé de ciencia en toda mi carrera de licenciatura.

Gracias a quienes ofrecieron recursos computacionales para realizar los cálculos numéricos de esta investigación: Dr. Kay Tucci (Sistema Unificado de Microcomputación Alicada [SUMA]), M. Sc. Vanessa Hammar (Centro Nacional de Cálculo Científico [CECALCULA]) y Lic. Jimer Ramírez (Laboratorio de Electrónica de la Universidad de Los Andes).

Gracias a mi preciosísima familia. A mis padres y hermanos por la motivación que generaron en mí y porque colaboraron desde la programación algorítmica hasta la corrección ortográfica de este trabajo. A mis primos y tíos, gracias por los consejos ligados a la defensa de tesis y por ofrecerme mil momentos gratos por cada situación de estrés.

...there is a God precisely because Nature itself, even in chaos, cannot proceed except in an orderly and regular manner.

Immanuel Kant

Índice general

1. Introducción	1
2. Sincronización en Sistemas Dinámicos	6
2.1. Sincronización en Sistemas Simples	6
2.2. Sincronización en Sistemas Caóticos	7
2.3. Mapas Caóticos como Sistemas Dinámicos	8
2.4. Sincronización en Redes de Mapas Acoplados	10
2.5. Caracterización de Sistemas Caóticos	15
3. Modelo RMA con Retardo y Forzamiento Externo	19
3.1. Ecuaciones de Dinámica	20
3.2. Algoritmo y Metodología	22
4. Sincronización con Retardo y Forzamiento	25
4.1. Sincronización en el Espacio de Parámetros	25
4.2. Influencia del Retardo	29
4.3. Convergencia hacia la Sincronización	32
5. Complejidad en Series Temporales: Una Aplicación	35
5.1. Procesamiento de Series Temporales	38
5.2. Señales Electroencefalográficas	40

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
5.3. Aplicación a Señales EEG	44
6. Conclusiones	49
Bibliografía	52
A. Condición de estabilidad para un caso especial.	55

Spontaneous order is not just possible, it is inevitable, if the conditions are right.

Steven Strogatz

Capítulo 1

Introducción

La sincronización es una de las dinámicas colectivas más fascinantes que un sistema puede presentar. Un sistema está completamente sincronizado cuando todos sus elementos evolucionan idénticamente en el tiempo. Los procesos de sincronización son frecuentes en la naturaleza y están presentes en diferentes contextos. Por ejemplo, a nivel biológico, se observa la descarga sincronizada de impulsos nerviosos por las neuronas, lo cual causa epilepsias; o en la sincronización del ritmo cardíaco con la respiración según las necesidades de oxígeno. En el contexto tecnológico, este fenómeno se observa en una gran cantidad de equipos electrónicos y mecánicos, desde relojes de péndulo hasta generadores electrónicos y láseres [1]. La fenomenología de estos sistemas es, en general, de carácter no lineal, y en su modelado usualmente se utilizan sistemas caóticos.

La posibilidad de que dos o más sistemas caóticos sincronicen en forma coherente no es trivial. Una de las principales características asociadas con el comportamiento caótico

es la sensibilidad a las condiciones iniciales; entonces se podría concluir –erróneamente– que la sincronización no es factible en estos sistemas debido a la dificultad de poder reproducir condiciones iniciales idénticas, o por el hecho de no poder encontrar los parámetros exactos en sistemas similares. Tecnológicamente, podemos construir sistemas *casi* idénticos, pero siempre habrá desviaciones infinitesimales, debido a ruido o desajustes, que resultarán eventualmente en la divergencia de órbitas inicialmente cercanas. En este contexto, Pecora y Carroll [2] encontraron que *sí* es posible sincronizar sistemas caóticos al introducir *acoplamiento unidireccional* (un oscilador que influencia la dinámica del otro pero no vice-versa). Tal posibilidad es conocida como *sincronización de sistemas caóticos*, y el elemento con dinámica independiente se denomina *forzador*. La generalización de esta idea consiste en reproducir el problema en forma de cascada [2], en donde cada oscilador forzado es a su vez el forzador de otro subsistema, obteniendo que la totalidad de los subsistemas sincronizan con la señal principal de forzamiento. Otro método fue desarrollado por B. Zhou y R. Roy [3]; utilizando dos osciladores no lineales con acoplamiento simétrico y retardo en la transmisión de información, consiguieron sincronización generalizada a través del forzamiento de un tercer oscilador. En la *sincronización generalizada* todos los elementos forzados en el sistema evolucionan idénticamente, pero en una trayectoria diferente a la del forzador.

Los sistemas de mayores dimensiones requieren modelos más complejos. Las redes de mapas acoplados han emergido como uno de los modelos más apropiados para este propósito. Una *red de mapas acoplados (RMA)* es un sistema formado por muchos elementos o *nodos* interactivos cuya dinámica está descrita por una función no lineal llamada *mapa*. Su uso está justificado por la simplicidad de las expresiones matemáticas que lo definen, la riqueza en la dinámica de sus componentes y la ventaja de ser computacionalmente eficiente, lo cual permite hacer experimentos controlados y descripciones

estadísticas en tiempos razonables.

Varios ingredientes pueden ser incluidos al construir modelos con RMA:

- Dinámica local: forma funcional que rige la dinámica de cada elemento.
- Acoplamiento: modo de interacción entre elementos enlazados.
- Topología de la red: estructura generada como consecuencia de los acoplamientos.
- Retardos en el acoplamiento: tiempo que demora en transmitirse la información entre elementos acoplados.
- Forzamiento externo: interacción con uno o varios elementos cuya dinámica es independiente del estado de los mapas de la red.

La mayoría de los trabajos con RMA hasta ahora habían incluido solo algunos de los ingredientes anteriores. En la presente tesis proponemos un modelo de RMA que contiene todos estos ingredientes simultáneamente.

Recientemente, F. Atay y J. Jost [4] consideraron RMA con interacciones que involucran retardos distribuidos uniformemente. Utilizaron redes de tipo “scale-free”, aleatoria, “small-world” y regulares (vecinos más cercanos), mostrando que el retardo aumenta las posibilidades de sincronización en todas ellas. Sin embargo, estos investigadores muestran que, al igual que el caso sin retardo, la topología de la red es determinante para su sincronización; redes del tipo small-world y regulares no sincronizan en ausencia de retardos, mientras que en el caso retardado la sincronización ocurre aunque en menor rango de parámetros. Por su parte, C. Masoller y A. C. Martí [5] investigaron la dinámica de RMA con retardos distribuidos en forma no uniforme y reportaron

que, a pesar de los retardos aleatorios, la red es capaz de sincronizar cuando sus elementos son acoplados apropiadamente. La dinámica de la solución sincronizada es un estado regular y homogéneo en vez de la dinámica caótica seguida por cada mapa. En contraste con el resultado del modelo de F. Atay y J. Jost [4], la sincronización de la red dependerá principalmente del número promedio de enlaces por nodo. En lo que se refiere a interacciones globales y forzamiento externo, M. Pineda y M. G. Cosenza [6] obtuvieron varios resultados interesantes: la adición de una interacción global a una red con acoplamiento local posibilita la sincronización caótica, la cual no sería posible en ausencia de ésta. El forzamiento externo induce sincronización de órbitas inestables de la dinámica local de los elementos, y también produce sincronización caótica cuando tiene la forma funcional correspondiente a dichas dinámicas. Adicionalmente, la sincronización caótica en el caso de una red con forzamiento externo o de una red con interacción global ocurre para el mismo rango de valores del parámetro de acoplamiento.

En la presente investigación se estudia el fenómeno de la sincronización sobre redes de mapas acoplados con retardos uniformemente distribuidos y con forzamiento externo. Utilizando diferentes tamaños y topologías de red, encontramos que el forzamiento externo propicia la sincronización en estos sistemas. Además, el carácter de la solución sincronizada sin retardo depende exclusivamente de la magnitud del forzamiento; cuando el forzamiento supera un valor crítico, que depende únicamente del exponente de Lyapunov de la dinámica local, existe sincronización total. Por debajo de este valor crítico, la sincronización es generalizada.

Adicionalmente, en la presente tesis, calculamos la complejidad en series de tiempo de mapas y hacemos una aplicación a señales electroencefalográficas, utilizando la medida de complejidad introducida por López-Ruiz *et al* [7] en 1985.

Los tópicos de esta tesis están organizados de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se hace una descripción general del fenómeno de sincronización. En el Capítulo 3 se presenta formalmente el modelo “Redes de Mapas Acoplados con Retardo y Forzamiento Externo” y en el Capítulo 4 se presenta la solución sincronizada en el espacio de parámetros. Seguidamente, en el Capítulo 5 se muestra el cálculo de complejidad en series de tiempo aplicada a una señal de electroencefalograma de un paciente epiléptico durante una crisis convulsiva. Finalmente, el Capítulo 6, está dedicado a las conclusiones.

Not only in research, but also in the everyday world of politics and economics, we would all be better off if more people realised that simple nonlinear systems do not necessarily possess simple dynamical properties.

Robert May

Capítulo 2

Sincronización en Sistemas Dinámicos

2.1. Sincronización en Sistemas Simples

La primera comprensión científica del fenómeno de la sincronización se debe a Christian Huygens, quien en 1665 llevó a cabo una serie de experimentos para entender por qué emergía esta dinámica en dos relojes de péndulo, colgados de una pared. Huygens observó que el movimiento de los péndulos de éstos relojes se ajustaban automáticamente hasta que ambos oscilaban con la misma frecuencia y con una diferencia de fase de 180 grados ¹. Si los péndulos eran apartados del estado sincronizado, éstos lo retomaban poco tiempo después (cerca de 30 minutos). Huygens concluyó que la

¹ Experimentos posteriores [8] demuestran que dos osciladores acoplados pueden sincronizar en fase o anti-fase dependiendo del modo en que se introduzca el acoplamiento.

sincronización era consecuencia de la interacción ² entre ambos relojes, debida a “movimientos imperceptibles” transmitidos a través del soporte común.

La sincronización resulta razonable en un sistema de dos elementos con movimiento armónico simple. Sin embargo, un sistema puede estar formado por elementos con dinámica compleja y, a pesar de ello, sincronizar.

2.2. Sincronización en Sistemas Caóticos

Las ecuaciones de Lorenz ³

$$\dot{u} = \sigma(\nu - u)$$

$$\dot{\nu} = ru - \nu - u\omega$$

$$\dot{\omega} = u\nu - b\omega,$$

producen una señal caótica en sus variables u, ν, ω . Dos sistemas que evolucionen según estas ecuaciones pueden sincronizar si se acoplan de la siguiente manera [9]:

Sistema Forzador	Sistema Forzado	(2.1)
$\dot{u}_e = \sigma(\nu_e - u_e)$	$\dot{u}_r = \sigma(\nu_r - u_r)$	
$\dot{\nu}_e = ru_e - \nu_e - u_e\omega_e$	$\dot{\nu}_r = ru_e - \nu_r - u_e\omega_r$	
$\dot{\omega}_e = u\nu_e - b\omega_e$	$\dot{\omega}_r = u_e\nu_r - b\omega_r$	

² Esta interacción se denomina comunmente *acoplamiento* y es una constante asociada a una función que transmite energía o información entre elementos. La interacción puede ser muy débil, incluso imperceptible como en el experimento de relojes de péndulo de Huygens, y sin embargo inducir transiciones hacia la sincronización

³ Las ecuaciones de Lorenz representan el movimiento convectivo de una celda de fluido que es calentado en la zona inferior y enfriado en la parte superior, desarrolladas con la motivación de “modelar alguno de los comportamientos impredecibles que normalmente asociamos con el clima”.

El sistema forzador evoluciona según las ecuaciones de Lorenz, mientras que la dinámica del sistema forzado depende de la variable u_e del sistema forzador (denominada *señal de forzamiento*). El resultado es que ambos sistemas evolucionan caóticamente y en sincronía a pesar de la información parcial que un sistema posee del otro.

La naturaleza de los sistemas caóticos –caracterizada por la ausencia de periodicidad, la aparente aleatoriedad y la alta sensibilidad a las condiciones iniciales– es muy apropiada en diversas aplicaciones prácticas, en particular en las comunicaciones cifradas. El problema consiste en transmitir un mensaje desde un punto forzador A hasta un punto forzado B utilizando alguna señal que permita encubrirlo en el trayecto y finalmente decodificarlo en el destino. Sumando un mensaje a la señal caótica del forzador de la ecuación (2.1), encontramos que el sistema forzado se sincroniza con la señal caótica y no con el mensaje. Como resultado de esto, el mensaje cifrado puede recuperarse en el sistema forzado a través de la operación $u_e - u_r$, es decir, restar la señal caótica de la señal transmitida.

2.3. Mapas Caóticos como Sistemas Dinámicos

“Muchos sistemas deterministas no lineales pueden comportarse en forma aparentemente impredecible y caótica” fue una observación hecha por el matemático francés Henri Poincaré a principios del siglo XX. En la misma línea de ideas, Robert May (1976), enfatizó que incluso mapas no lineales simples pueden tener dinámicas muy complicadas. Estas observaciones han traído implicaciones importantes desde que fueron cuantificadas sus consecuencias con la aparición de las computadoras, con las cuales se ha podido realizar descripciones de fenómenos tanto naturales como sociales y económicos, todo ello a través del uso de modelos matemáticamente simples, como por

ejemplo, los mapas.

Mapas Caóticos

Una de las formas más simples de generar caos es a través de un *mapa no lineal*. Los mapas son sistemas dinámicos con tiempos discretos cuya evolución se construye evaluando composiciones sucesivas de una función no lineal sobre una condición inicial x_0 . La expresión matemática para un mapa unidimensional es

$$x_t = f^t(x_0), \quad (2.2)$$

donde x_t es el estado del sistema en el tiempo discreto (*iterado*) $t \in \mathbb{N}$ y f^t indica la composición funcional t -ésima. Equivalentemente, un mapa puede definirse como la aplicación iterativa de una función:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (2.3)$$

es decir, la imagen de la función en t es el argumento de la misma función en $t + 1$. La sucesión de valores $f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0) \dots$ generada a partir del valor inicial x_0 , se le denomina *órbita*. Si $f^t(x_0) = f^{t+m}(x_0)$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces la órbita es periódica.

Mapa logístico

Un mapa ampliamente utilizado en el estudio de sistemas complejos es el *mapa logístico* debido a la variedad de dinámicas que pueden generarse con éste:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t). \quad (2.4)$$

El proceso iterativo que genera la dinámica de los mapas puede visualizarse en un *diagrama de Verlhulst* [figura (2.1)]. En este diagrama, los segmentos conectan los puntos $(x_0, f(x_0)), (f(x_0), f^2(x_0)), \dots, (f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))$ cuyas componentes x indican la órbita del mapa.

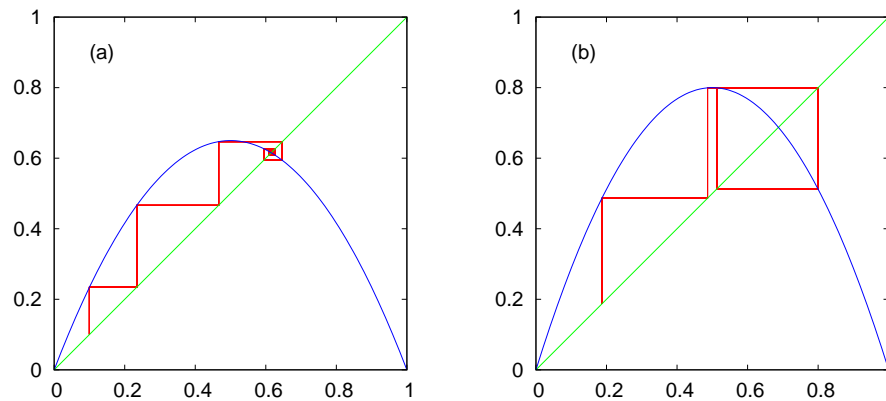


Figura 2.1: Diagramas de Verhulst del mapa logístico para dos valores del parámetro r . (a): $r = 2,6$, el sistema converge a un punto fijo. (b): $r = 3,2$, el sistema converge a una órbita de período 2.

El mapa logístico es un ejemplo claro de como un comportamiento caótico puede ser obtenido a partir de una ecuación no lineal simple.

El mapa logístico fue introducido para modelar el crecimiento de una población animal con limitaciones de espacio, comida, etc. El tamaño de la población es representado por la variable x_t , la cual es una fracción del máximo soportado por el hábitat, y r es un parámetro determinante en la dinámica del sistema que representa la tasa de crecimiento de la especie. A través de aproximaciones numéricas, se encuentra el período de la órbita correspondiente a diferentes valores del parámetro r (tabla 2.3).

2.4. Sincronización en Redes de Mapas Acoplados

Desde los estudios pioneros hechos por Kaneko [10] y Waller y Kapral [11], las redes de mapas acoplados han sido investigadas en una diversidad de dinámicas y topologías [4, 5].

<i>Parámetro r</i>	<i>Período de la órbita</i>
3	2
3.499...	4
3.54409...	8
3.5644...	16
3.568759...	32
⋮	⋮
3.569946...	∞

Tabla 2.1: Período de la órbita asociada a diferentes valores del parámetro r del mapa logístico.

Una *red de mapas acoplados (RMA)* es una red cuyos nodos i evolucionan a través de un mapa de la forma

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + \Phi(\nu_t^j), \quad (2.5)$$

donde x_t^i denota el estado del nodo i en el tiempo t (discreto) y Φ es una función que describe su acoplamiento a los demás nodos j .

Resulta contraintuitivo que un sistema formado por elementos caóticos –cuya dinámica es altamente sensible a las condiciones iniciales– pueda sincronizar, es decir, que sus elementos evolucionen idénticamente en el tiempo. Sin embargo, existen diferentes condiciones que propician la sincronización en las RMA. Estudiar estas condiciones es un problema de gran interés en la comunidad científica contemporánea, ya que existen contextos naturales (crisis epiléptica, centelleo sincronizado en poblaciones de luciérnagas, ...) y tecnológicos (actividad sincrónica en marcapasos, oscilaciones sincronizadas en arreglos de láseres, etc.) [1] donde se desea adquirir un mayor entendimiento del fenómeno de sincronización.

Ejemplo de sincronización en RMA

En la forma más simple, todos los mapas son idénticos e interactúan a través del *campo medio* con un acoplamiento global:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j). \quad (2.6)$$

En la ecuación (2.6), t es un índice discreto que representa al tiempo, i ($i = 1 \dots N$) es el índice que denota a cada elemento, N es el tamaño del sistema, $f(x) = rx(1 - x)$ es el mapa logístico y ϵ ($0 \leq \epsilon \leq 1$) es el acoplamiento al *campo medio* o valor promedio de los estados del sistema. Aún cuando el modelo posee solamente dos parámetros (r y ϵ), éste exhibe una rica variedad de comportamientos [12]. Para valores de ϵ cercanos a 1, los mapas sincronizan y evolucionan siguiendo la dinámica de un mapa individual. Para un acoplamiento intermedio ($\epsilon \sim 0,5$), el arreglo se divide en dos “*clusters*” *dinámicos* (subconjunto de elementos sincronizados entre sí) los cuales oscilan en fases opuestas. Para acoplamientos cercanos a cero, el número de clusters se incrementa y es aproximadamente independiente del número de mapas del sistema. Finalmente, para acoplamientos muy pequeños ($\epsilon \rightarrow 0$), el número de clusters es proporcional a N .

Tipos de redes

La forma como se acoplan los elementos de un sistema definen una red o grafo. Una *red* es un conjunto de elementos, llamados *nodos*, con conexiones entre ellos denominados *enlaces* [figura (2.2)]. Ejemplos de redes lo constituyen: World Wide Web, redes sociales, redes neuronales, rutas aéreas, etc. El número de *nodos* que conforman la red dependerá del sistema a modelar. Gracias a los recursos computacionales actuales, el procesamiento de grandes volúmenes de datos ha hecho posible enfocar las investigaciones a las propiedades estadísticas del sistemas a gran escala en lugar del análisis de

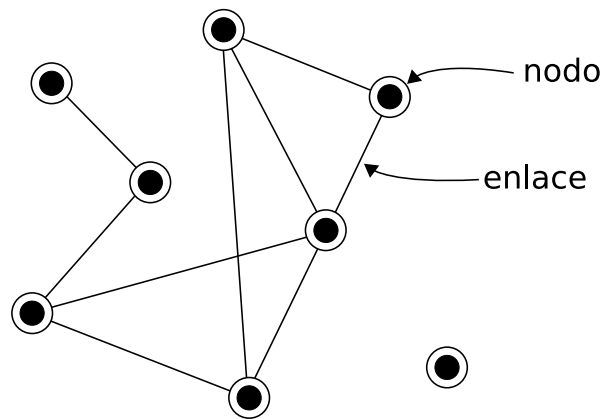


Figura 2.2: Ejemplo de una pequeña red con ocho nodos y nueve enlaces.

pequeños grafos.

Un conjunto de nodos unidos por enlaces constituye el tipo de red más simple. Variaciones de esta red incluyen diferentes tipos de nodos y diferentes tipos de enlaces [figura (2.3)]. Como ejemplo, en una red de personas, los nodos pueden ser hombres o mujeres y los enlaces pueden representar las relaciones de amistad entre ellos. Éstos enlaces pueden indicar, la magnitud de la amistad entre cada uno de los componentes. Además, estos enlaces pueden ser *dirigidos* o *no dirigidos* con lo cual, en el ejemplo, alguna persona tendría amistad hacia otra, pero no viceversa.

Una *red compleja* es una red que posee características topológicas no triviales. Tipos de redes comúnmente utilizadas en las investigaciones sobre sincronización son:

Redes Regulares: En estas redes cada nodo tiene el mismo número de enlaces y el mismo patrón regular de conectividad. Una red regular de primeros vecinos es aquella donde los elementos están conectados a los vecinos más cercanos. Las redes regulares forman *cluster* a nivel local, lo cual significa que, a menos que el número de vecinos sea grande (del orden del tamaño de la red), la *trayectoria* (o

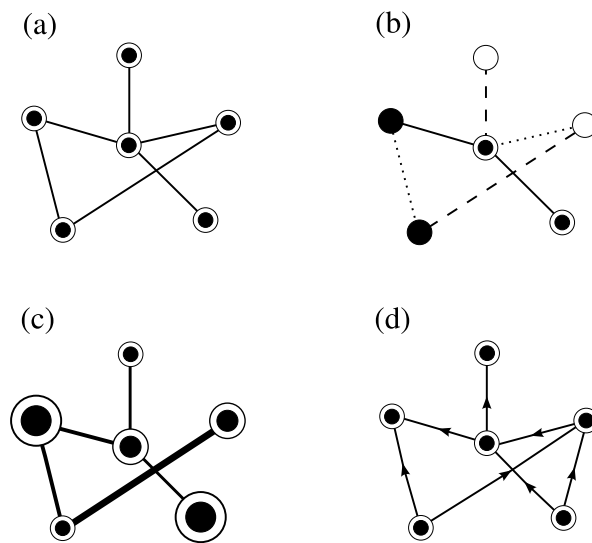


Figura 2.3: Ejemplos de varios tipos de red: (a) una red no dirigida con solo un tipo de nodo y un tipo de enlace; (b) una red con un número variado de nodos y enlaces; (c) una red con diferentes nodos y enlaces con diferentes pesos; (d) una red dirigida en la cual los enlaces tienen dirección.

distancia en término del número de enlaces) entre dos nodos *no* vecinos también será grande.

Redes Aleatorias o “random”: En estas redes los nodos están conectados en forma aleatoria y el grado de distribución obedece una distribución de Poisson (el *grado de distribución* designa la probabilidad de que un nodo esté conectado a otros k nodos).

Redes de Pequeño Mundo o “small-world”: Es una red que tiene origen en los experimentos de Milgram [13] donde se demuestra el efecto de *pequeño mundo*, en el cual, la mayoría de pares de nodos en una red están conectados a través de trayectorias cortas de longitud fija. En cualquier red, los nodos pueden tener asociada una componente geográfica; es entonces razonable asumir que la proximidad en el espacio será determinante en la construcción de la *vecindad* de cada nodo (enlaces que posee un nodo). Las redes de pequeño mundo se construyen

a partir de esta idea comenzando con una red regular de baja dimensionalidad y luego reconectando una fracción de sus enlaces. El proceso de reconexión de enlaces en las redes pequeño mundo permiten interpolar entre redes regulares y redes aleatorias.

Redes Libre de Escala o “scale-free”: Son redes cuyo grado de distribución sigue una ley de potencia $p_k \sim k^{-\gamma}$. La *ley de potencia* implica que el grado de distribución de estas redes es independiente de la escala. Un ejemplo lo constituye una red de rutas de una aerolínea, en la cual pocos nodos son concentradores de muchos enlaces y el resto están conectados a otros nodos con pocos enlaces, una propiedad asociada a distribuciones de ley de potencia.

Las redes pueden ser fijas, donde el número de nodos y enlaces permanece constante, o evolutivas, donde los enlaces cambian según reglas específicas. Cualquiera que sea el caso, la topología de una red tendrá influencia en la dinámica colectiva del sistema.

2.5. Caracterización de Sistemas Caóticos

Existen diferentes formas de caracterizar el comportamiento de los sistemas caóticos. En particular, la sincronización puede verse reflejada a través de series de tiempo, en donde una curva muestra la evolución de cada elemento en el tiempo, o mediante la *desviación estándar instantánea* σ_t del sistema:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \bar{x})^2}, \quad \text{con} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^i, \quad (2.7)$$

en cuyo caso, la sincronización ocurre para $\sigma_t \rightarrow 0$.

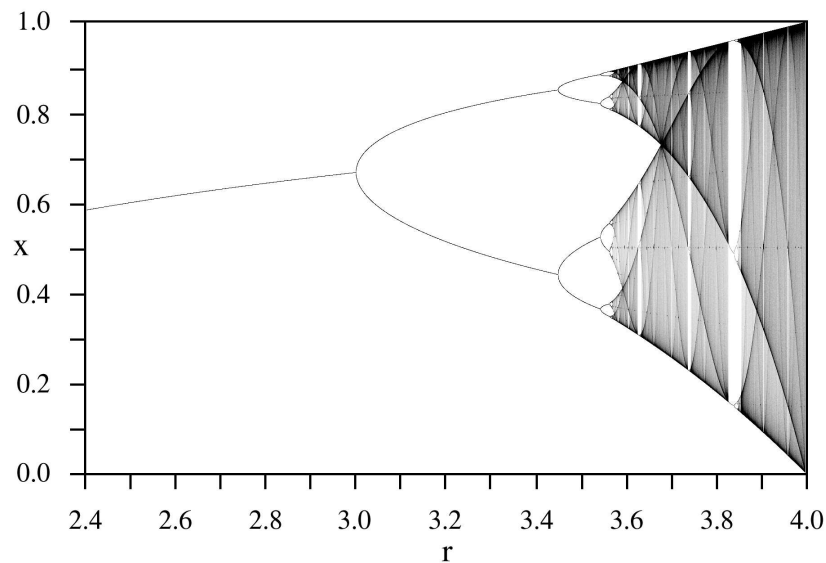


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación del mapa logístico. Los estados pueden ser recorridos periódica o caóticamente según el valor de r .

Diagrama de Bifurcación

La diversidad dinámica que posee un sistema y las transiciones que sufre según sea variado un parámetro pueden observarse en un *diagrama de bifurcación*, el cual representa los estados asintóticos del sistema para cada valor de un parámetro. Las bifurcaciones se refieren a los cambios repentinos en el comportamiento del sistema. En el mapa logístico estos cambios se manifiestan principalmente con la *duplicación de períodos* [figura (2.4), tabla (2.3)]: diferentes rangos del parámetro r conducen a órbitas de período $p = 2^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Debido a que la separación (en términos de r) entre bifurcaciones sucesivas es cada vez menor, existe un valor finito del parámetro r para el cual el período p tiende a infinito, es decir, se pierde la periodicidad, y la dinámica del sistema se vuelve caótica. La convergencia es geométrica y la distancia entre transiciones sucesivas disminuye según un factor constante denominado δ (delta) de Feigenbaum cuyo valor es $\delta = 4,6692\dots$

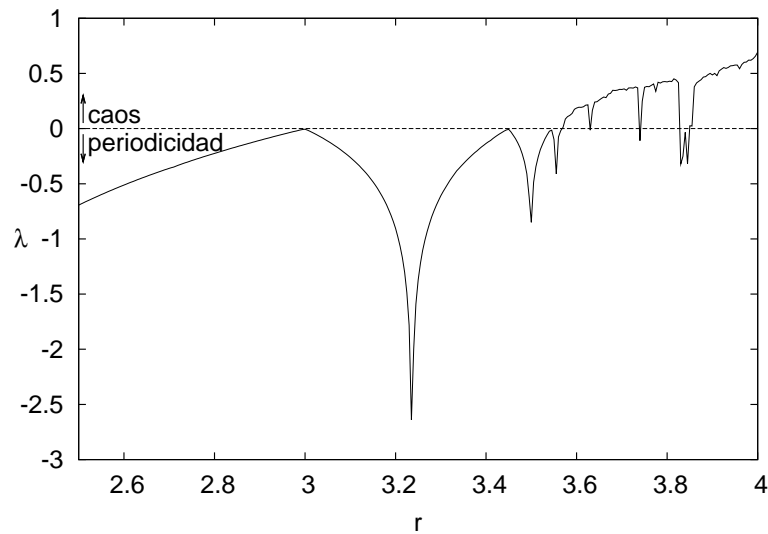


Figura 2.5: Exponente de Lyapunov del mapa logístico como una función del parámetro r .

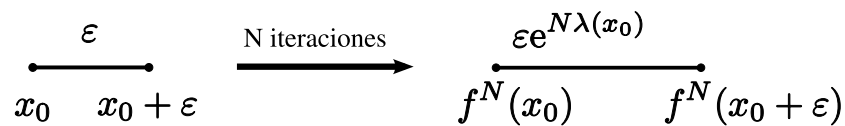


Figura 2.6: Definición del exponente de Lyapunov.

Estabilidad Lineal y Exponente de Lyapunov

El *exponente de Lyapunov* λ es una cantidad que caracteriza la rapidez con la cual divergen dos trayectorias inicialmente cercanas y por lo tanto permite cuantificar el grado de caos de un sistema [figura (2.5)]:

$$\lambda < 0 \rightarrow \text{periódicidad; estabilidad}$$

$$\lambda > 0 \rightarrow \text{caos; inestabilidad}$$

De la figura (2.6) se observa que:

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|, \tag{2.8}$$

lo cual, en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, conduce a la definición formal para el exponente

de Lyapunov λ :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{d}{dx} f^N(x_0)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Aplicando la regla de la cadena en la ecuación (2.9)

$$\frac{d}{dx} f^N(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} |f'(x_i)|, \quad (2.10)$$

se obtiene

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| \quad \text{donde} \quad f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x); \quad (2.11)$$

equivalentemente,

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|. \quad (2.12)$$

Al hacer cálculos numéricos con algoritmos iterativos resulta más conveniente utilizar la segunda forma (haciendo la aproximación adecuada para N).

Por otro lado, la *condición de estabilidad* implica que una función $f(x)$ con órbita de tamaño N cumpla con

$$\left| \prod_{i=1}^N f'(x_i) \right| < 1. \quad (2.13)$$

Si la órbita $N \rightarrow \infty$, puede utilizarse la ecuación (2.11) para reescribir la condición anterior en términos del exponente de Lyapunov

$$|e^{N\lambda}| < 1. \quad (2.14)$$

The next great era of awakening of human intellect may well produce a method of understanding the qualitative content of equations.

Richard Feynman

Capítulo 3

Modelo RMA con Retardo y Forzamiento Externo

Las redes con arquitectura simple, como las redes regulares de primeros vecinos, permiten enfocar el estudio de la complejidad debida a la dinámica no lineal de los nodos, sin la distracción de la complejidad adicional de la propia red [14]. La aproximación con arquitecturas más complejas, como las redes completamente aleatorias, permiten entonces hacer comparaciones cualitativas con las primeras y obtener conclusiones acerca de la influencia de la arquitectura de la red y la dinámica de los nodos.

El retardo en la interacción, además de ser un factor que aparece en forma natural en sistemas reales como efecto de la transmisión de información a velocidades finitas, tiene también un rol crucial en la determinación de la dinámica colectiva. La adición de retardos temporales en la interacción incrementa la dimensionalidad de las redes y, como consecuencia, una nueva variedad de comportamientos complejos emergen.

Particularmente, la utilización de retardos constantes en toda la red puede justificarse como una primera aproximación en sistemas donde domina el tiempo característico de un determinado tipo de interacción [15].

El forzamiento, por su parte, aparece en situaciones naturales como, por ejemplo, en la regulación de ritmos circadianos por agentes externos como el sol; o en contextos sociales como, por ejemplo, la propaganda. Las consecuencias de su aplicación en distintos sistemas han sido reportadas en diversos trabajos: formación de patrones en reacciones químicas [16] y medios granulares [17]; estabilización de órbitas inestables en modelos de redes de mapas acoplados [6]; sincronización en osciladores mutuamente acoplados con retardo en la interacción [3], etc.

3.1. Ecuaciones de Dinámica

Con el fin de analizar el rol de la estructura de la red, utilizamos tres diferentes topologías de red: aleatoria (22 vecinos en promedio: $\bar{k} = 22$), regular (2 primeros vecinos: $k = 2$, 1 dimensión), regular (4 primeros vecinos: $k = 4$, 1 dimensión).

La evolución de cada elemento de la red es una función aditiva de su dinámica local, la de sus vecinos (con un retardo τ) y la del forzador:

$$x_{t+1}^i = \underbrace{(1 - \epsilon - \gamma)f(x_t^i)}_{\text{local}} + \underbrace{\frac{\epsilon}{n^i} \sum_{j=1}^N C^{ij} f(x_{t-\tau}^j)}_{\text{vecinos}} + \underbrace{\gamma f(y_t)}_{\text{forzador}}, \quad (3.1)$$

donde x_t^i describe el estado del nodo i en el tiempo t , C es la matriz de conectividad, n^i es el número de vecinos del nodo i , τ es el tiempo de retardo, ϵ es el acoplamiento entre nodos vecinos, γ es el acoplamiento entre los nodos y el forzador.

La dinámica del forzamiento es independiente del estado de los elementos de la red:

$$y_{t+1} = f(y_t) \quad (3.2)$$

Puesto que el modelo utilizado se basa en redes de mapas acoplados (RMA) es claro que el sistema es discreto en espacio y tiempo:

$$i \in \mathbb{N} \quad | \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.3)$$

$$\tau \in \mathbb{N} \quad | \quad \tau \geq 0. \quad (3.4)$$

Se escogió el mapa logístico con parámetro $r = 4$ para la dinámica local y la dinámica de forzamiento para que el sistema tuviera posibilidades de alcanzar un estado de sincronización total:

$$f(x) = 4x(1 - x). \quad (3.5)$$

Las siguientes condiciones deben cumplirse para que el sistema mantenga una dinámica acotada ¹

$$\epsilon \in \mathbb{R} \quad | \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.6)$$

$$\gamma \in \mathbb{R} \quad | \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.7)$$

$$0 \leq 1 - \epsilon - \gamma \leq 1$$

La matriz C , en el caso de una red aleatoria, se genera con la condición de que la red representada sea conexa y con todos sus enlaces bidireccionales ($C^{ij} = C^{ji} \forall i, j$). Así, los primeros elementos de la red tendrán asociada una matriz de conectividad similar a la representada en la ecuación (3.8) y la forma representada en el esquema de la figura (3.1)

¹ La órbita del mapa logístico diverge cuando toma argumentos mayores que 1.

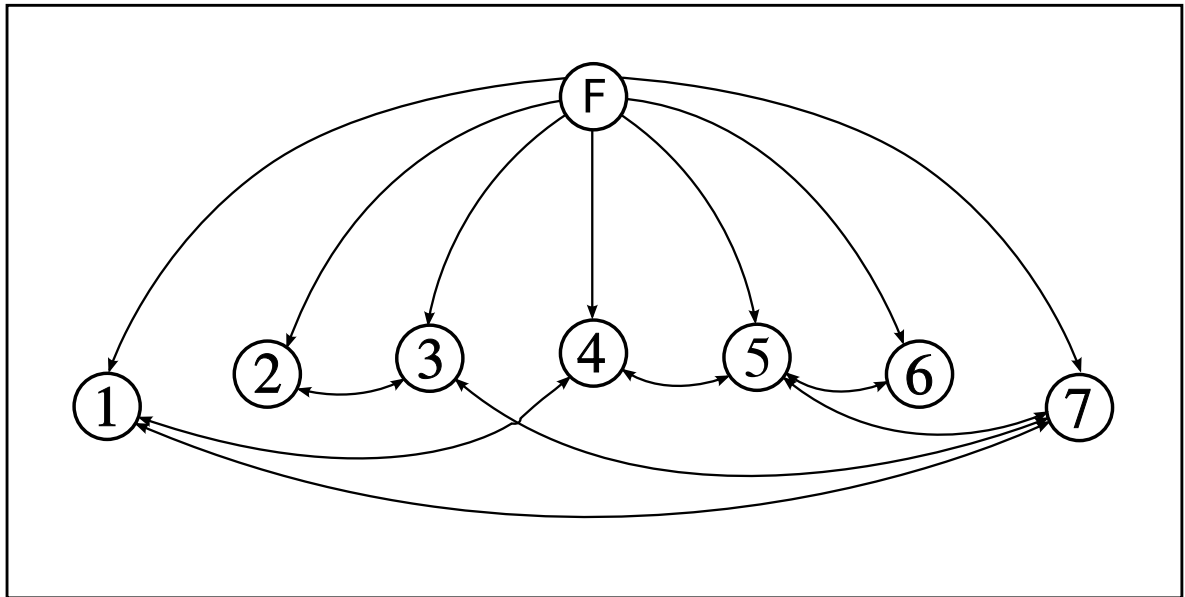


Figura 3.1: Esquema de algunos elementos de la red aleatoria con forzamiento. El elemento F es el forzador, los demás son los elementos de la red.

$$C^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2. Algoritmo y Metodología

El desarrollo de esta tesis requirió la creación de la aplicación computacional que permitió realizar las simulaciones y el análisis de datos [ver figura (3.2)]. El código computacional recibe como entrada el conjunto de parámetros que se desea estudiar,

genera la red de mapas acoplados en función de ellos y hace evolucionar el sistema según las ecuaciones (3.1),(3.5) y (3.2). Los datos generados por la simulación son almacenados en disco para disponer de ellos posteriormente y procesarlos según se necesite; por ejemplo, para promediar los resultados de las simulaciones con diferentes condiciones iniciales.

Los datos generados se utilizaron específicamente para obtener:

1. Desviación estándar [ecuación (2.7)] y sincronización en función de los parámetros (ϵ, γ) ;
2. Órbitas del estado sincronizado;
3. *tiempo de convergencia hacia la sincronización* o número de iterados necesarios para alcanzar la sincronización.

```

veces ← 5.000 ; tamaño_sistema ← 10.000 ; número_enlaces ← 100.000
crear mapas [ tamaño_sistema ]
crear matriz_conectividad [ tamaño_sistema × tamaño_sistema ]
crear vector_forzamiento [ tamaño_sistema ]
preparar( matriz_conectividad, número_enlaces )
para  $\gamma \in \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \}$  hacer
  para  $\epsilon \in \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \dots \}$  hacer
    para  $i$  desde 1 hasta tamaño_sistema hacer
      mapas [  $i$  ] ← aleatorio( 0 .. 1 )
    fin para
    iterar( mapas, veces, matriz_conectividad,  $\epsilon$ ,  $\gamma$  ) arreglo_estados ← vacío
    para  $i$  desde 1 hasta tamaño_sistema hacer
      un_estado ← devolver_estado( mapas [  $i$  ] )
      arreglo_estados ← arreglo_estados  $\oplus$  un_estado
    fin para
    imprimir(  $\gamma$ ,  $p$ ,  $\epsilon$ , arreglo_estados )
  fin para
fin para

```

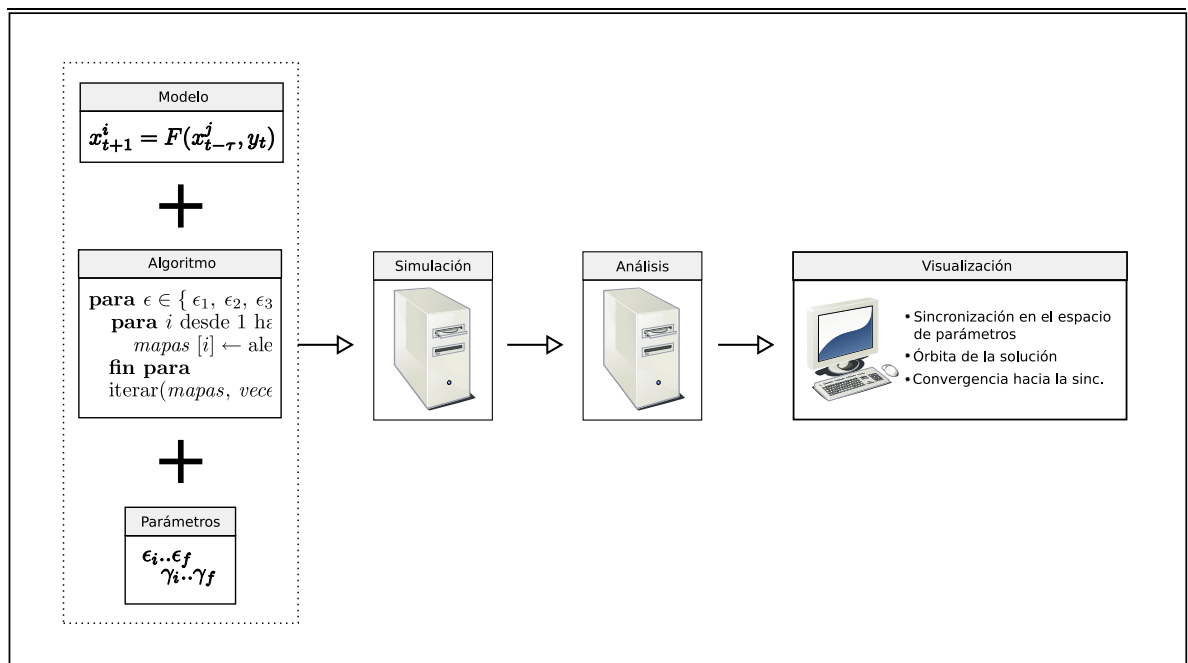


Figura 3.2: Algoritmo y esquema de la metodología seguida para estudiar el modelo.

These systems of curves, these clouds of points suggest sometimes fireworks or galaxies, sometimes strange and disquieting vegetal proliferations. A realm lies here to explore and harmonies to discover”

D. Ruelle

Capítulo 4

Sincronización con Retardo y Forzamiento

4.1. Sincronización en el Espacio de Parámetros

La solución sincronizada en una RMA es aquella para la cual se cumple que $x_t^i = x_t^j = x_t \forall i, j$. La ecuación (3.1) se reescribe como

$$x_{t+1} = (1 - \epsilon - \gamma)f(x_t) + \epsilon f(x_{t-\tau}) + \gamma f(y_t), \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= f(y_t) \\ f(x) &= 4x(1-x). \end{aligned}$$

Cuando hay acoplamiento retardado entre vecinos ($\tau > 0$ y $\epsilon > 0$), existe un término

que desvía continuamente la órbita de la dinámica local y que no está presente en el forzador. Por lo tanto, no puede existir sincronización total con el forzador. Sin embargo, para el caso especial sin acoplamiento a los vecinos ($\epsilon = 0$) y/o sin retardo ($\tau = 0$) la solución sincronizada se reduce a:

$$x_{t+1} = (1 - \gamma)f(x_t) + \gamma f(y_t) \quad (4.2)$$

$$y_{t+1} = f(y_t) \quad (4.3)$$

$$f(x) = 4x(1 - x),$$

lo cual corresponde a la dinámica de dos mapas acoplados unidireccionalmente. Haciendo un análisis de estabilidad lineal para este caso especial [ver apéndice (A)] se obtiene que

$$\gamma > 1 - e^{-\lambda}, \quad (4.4)$$

donde $\lambda \approx 0,69315$ es el exponente de Lyapunov del mapa logístico con $r = 4$, calculado por medio de la ecuación (2.12). Con lo cual, se deduce que sólo puede haber sincronización total cuando $\gamma > 0,5$.

Para los cálculos numéricos deben tomarse en cuenta algunas consideraciones. Debido a la precisión finita del computador, nuestro criterio para considerar la sincronización del sistema fue que $\sigma_t < 10^{-12}$ para $t = 10^4$. Por otro lado, realizando cálculos estadísticos sobre redes de diferentes tamaños (10^4 , 5×10^3 , 10^3) con topología regular de primeros vecinos y topología aleatoria se encuentra que el tamaño de la red no es determinante para los cálculos estadísticos, por lo cual, el modelo se implementó en redes con tamaño $N = 10^3$.

La figura (4.1) muestra la órbita del sistema forzado (4.2)-(4.3) sin retardo en el plano (x, y) para dos valores de parámetro γ . La figura (4.1a) revela un estado de sin-

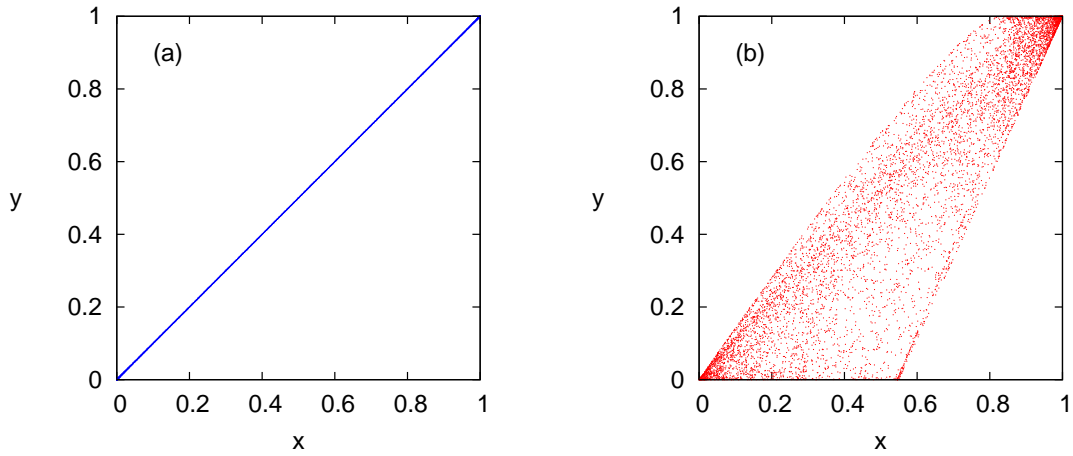


Figura 4.1: Órbitas del sistema forzado [ecuación (4.2)] sin retardo y con acoplamiento a los vecinos $\epsilon = 0,20$. (a): $\gamma = 0,55$; (b): $\gamma = 0,45$.

cronización total, $x_t = y_t$, mientras que la figura (4.1b) muestra la existencia de una relación funcional no trivial (distinta a la identidad) entre las variables x_t y y_t , un atractor extraño en el plano (x, y) , lo cual corresponde a un estado de sincronización generalizada.

La figura (4.2) muestra la desviación estándar asintótica ($t = 10^4$) de una red aleatoria forzada sin retardo. Las soluciones acotadas en el plano (ϵ, γ) ocurren para $\gamma \leq 1 - \epsilon$. En el pequeño recuadro se identifican los estados de sincronización generalizada y sincronización total.

En la figura (4.3) se observan las regiones de sincronización (total y generalizada) en plano (ϵ, γ) para una red aleatoria sin retardo. El panel derecho muestra el diagrama de bifurcación de la solución sincronizada en función del parámetro γ para $\epsilon = 0$. Se observa que a partir de $\gamma = 0,5$ la órbita de la solución se hace independiente de γ ,

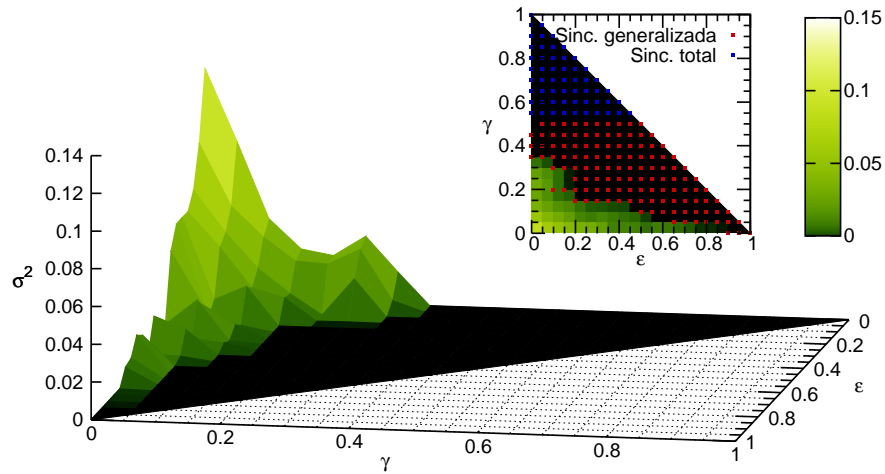


Figura 4.2: Desviación estándar asintótica ($t = 10^4$) en el espacio de parámetros (ϵ, γ) de una red aleatoria ($\bar{k} = 22$) con $\tau = 0$. La barra de colores a la derecha indica los valores de σ_t . El color negro corresponde a $\sigma_t < 10^{-12}$.

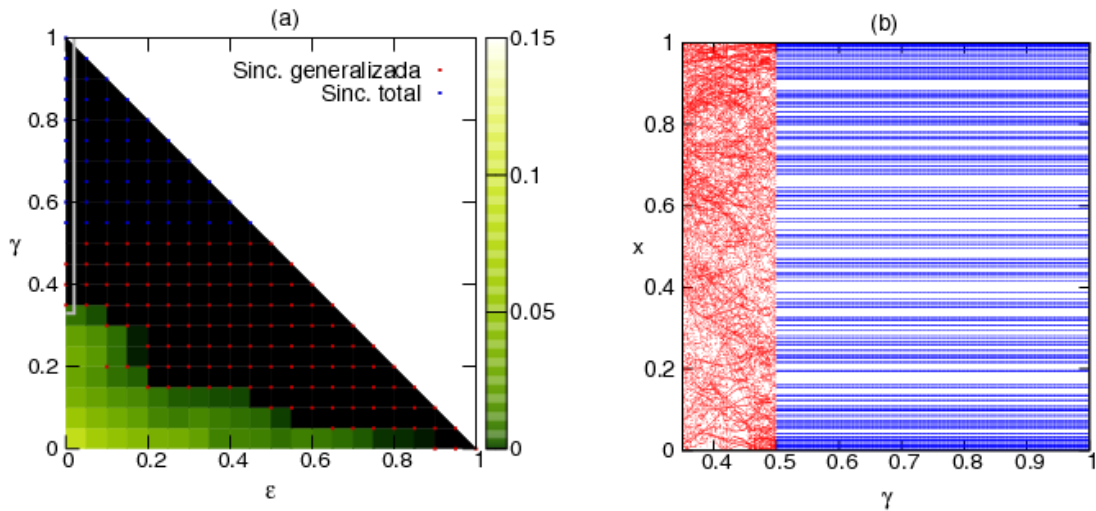


Figura 4.3: Red aleatoria ($\bar{k} = 22$) con $\tau = 0$. (a): desviación estándar asintótica ($t = 10^4$) en el espacio de parámetros (ϵ, γ) . La barra de colores indica los valores de σ_t . El color negro corresponde a $\sigma_t < 10^{-12}$. (b): diagrama de bifurcación del estado sincronizado en función de γ para $\epsilon = 0,00$.

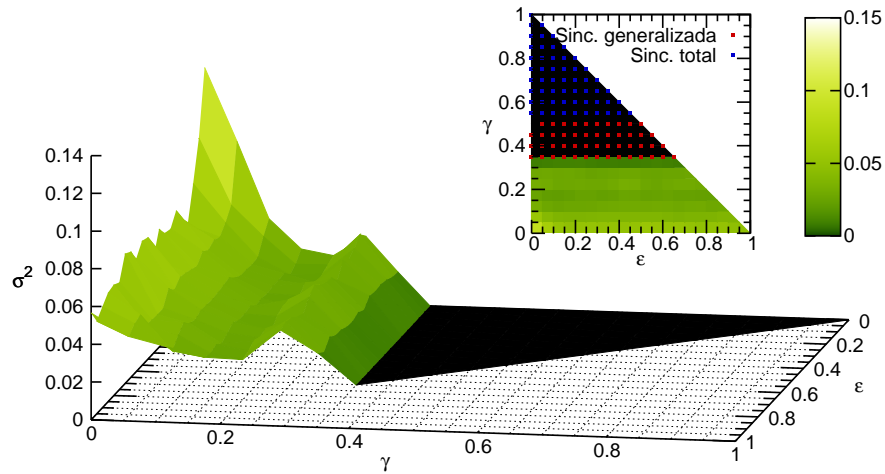


Figura 4.4: Desviación estándar asintótica ($t = 10^4$) en el espacio de parámetros (ϵ, γ) de una red regular ($k = 2$, 1 dimensión) con $\tau = 0$. La barra de colores a la derecha indica los valores de σ_t . El color negro corresponde a $\sigma_t < 10^{-12}$.

pues la ecuación (4.2) se reduce a la de un sólo mapa:

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (4.5)$$

La figura (4.4) muestra la cantidad σ^2 para una red regular unidimensional con $k = 2$, sin retardo, en el espacio de parámetros (ϵ, γ) . Se observa que la región de parámetros donde ocurre la sincronización es más pequeña que en el caso de una red aleatoria [figura (4.2)].

4.2. Influencia del Retardo

Para explorar la influencia del retardo, se estudiaron redes con valores diferentes de este parámetro.

En la figura (4.5) se observan las regiones de sincronización en el espacio de paráme-

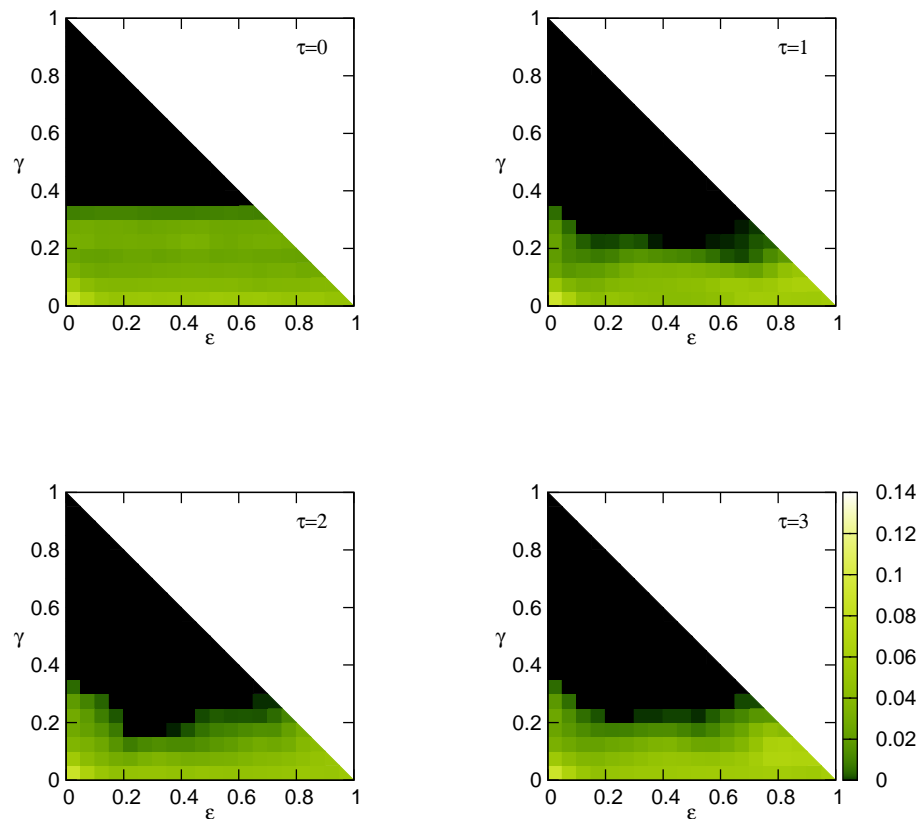


Figura 4.5: Influencia del retardo en la sincronización de una red regular ($k = 2$, 1 dimensión). El color negro indica las regiones de sincronización en el espacio de parámetros (ϵ, γ) .

tros (ϵ, γ) para una red regular unidimensional con $k = 2$ y diferentes valores de retardo. Nótese que el retardo favorece la emergencia de sincronización.

La figura (4.6) muestra las regiones de sincronización en el espacio de parámetros (ϵ, γ) para una red regular unidimensional con $k = 4$ y diferentes valores de retardo. Nuevamente observamos que el retardo conduce a una región de sincronización mayor en el espacio de parámetros. De hecho, diferentes valores de retardo tienen asociadas diferentes zonas de sincronización en el espacio de parámetros.

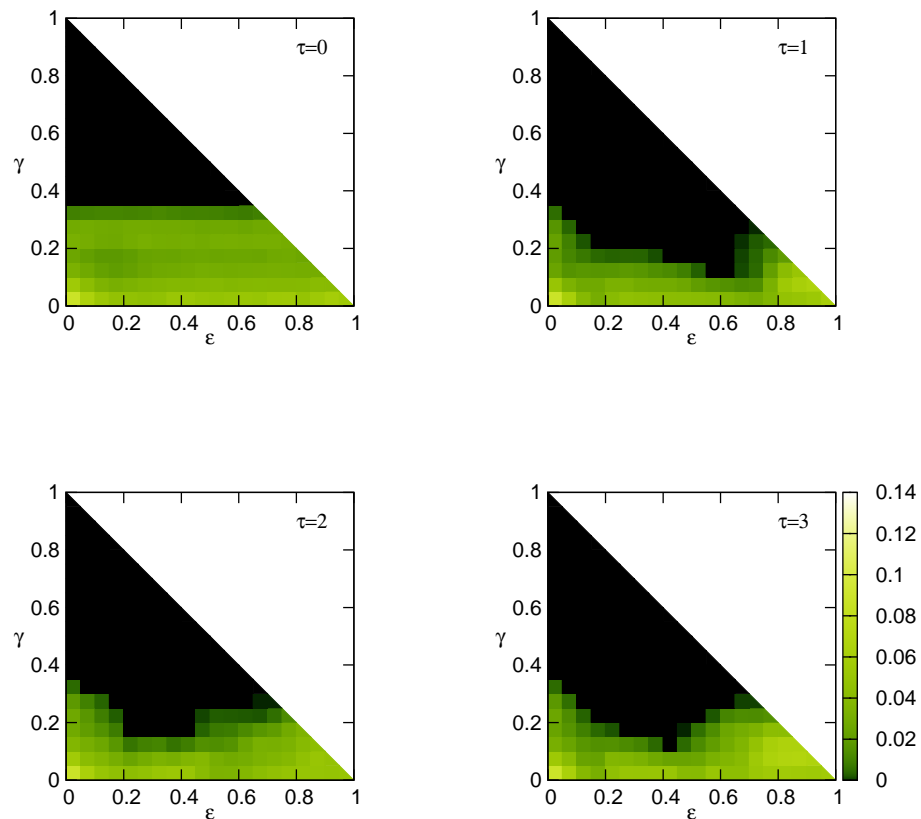


Figura 4.6: Influencia del retardo en la sincronización de una red regular ($k = 4$, 1 dimensión). El color negro indica las regiones de sincronización en el espacio de parámetros (ϵ, γ) .

Hemos verificado que la inclusión del retardo en una red aleatoria forzada también conduce a una mayor región de sincronización en el espacio de parámetros del sistema.

La figura (4.7) muestra las regiones de sincronización en el espacio de parámetros (ϵ, γ) para una red aleatoria con $\bar{k} = 22$ y $\tau = 1$. Además se muestra el diagrama de bifurcación del estado sincronizado sin forzamiento ($\gamma = 0$) en función de ϵ . Nótese que diversos estados sincronizados (caóticos y periódicos) se observan en diferentes rangos

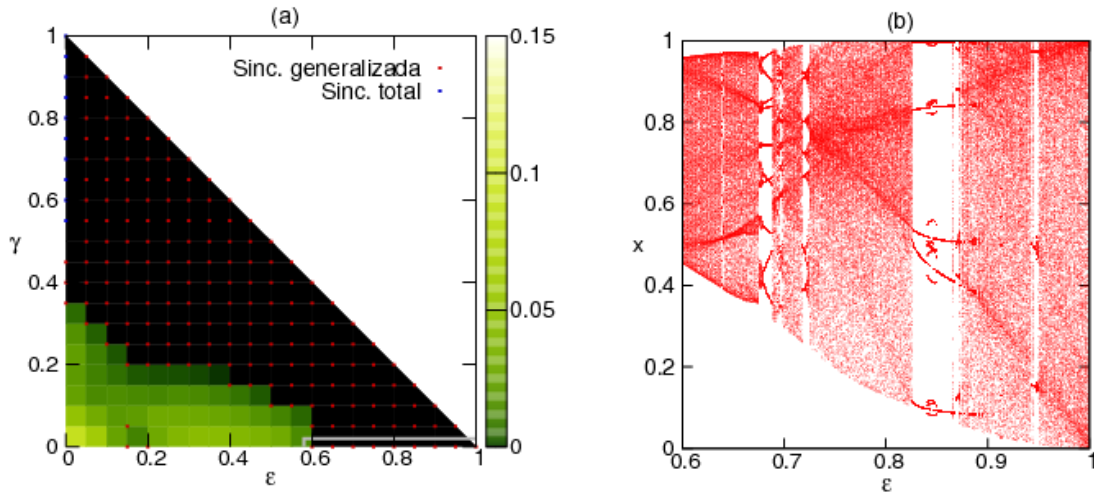


Figura 4.7: Red aleatoria con $\bar{k} = 22$, $\tau = 1$. (a): Desviación estándar en el espacio de parámetros (ϵ, γ) . (b): diagrama de bifurcación con $\gamma = 0,00$.

del parámetro ϵ . Este resultado concuerda con un diagrama similar obtenido por Atay *et al* [4] para una red con retardo $\tau = 1$ y sin forzamiento.

4.3. Convergencia hacia la Sincronización

La figura (4.8) muestra el tiempo de convergencia hacia el estado sincronizado en una red aleatoria, con $\bar{k} = 22$ y retardo $\tau = 1$, en función de los parámetros ϵ y γ . Se observa que el tiempo de convergencia hacia la sincronización se reduce al aumentar tanto el parámetro de acoplamiento a los vecinos ϵ como el parámetro de acoplamiento al forzador γ .

La figura (4.9) muestra el tiempo de convergencia hacia el estado sincronizado en una red regular con $\bar{k} = 22$, sin retardo, en función de los parámetros ϵ y γ . Se observa que los tiempos de convergencia pueden variar con los valores de los parámetros de

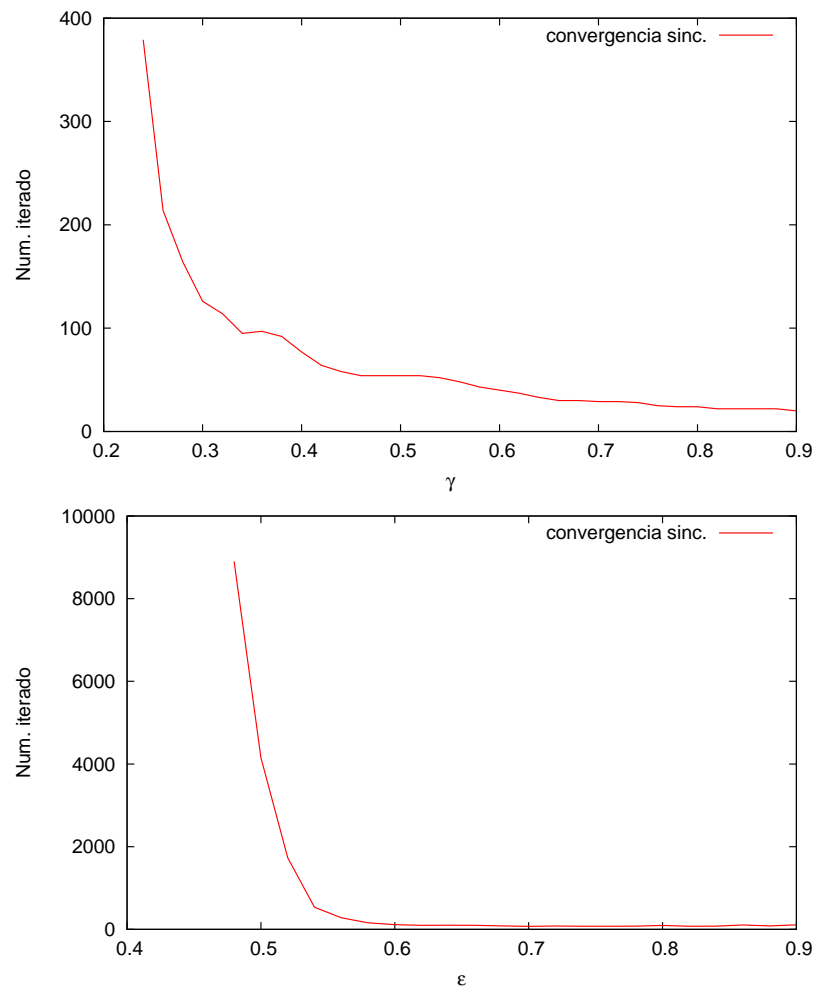


Figura 4.8: Tiempo de convergencia hacia la sincronización en una red aleatoria ($\bar{k} = 22$) con $\tau = 1$. Arriba: tiempo de convergencia vs. γ para $\epsilon = 0,10$. Abajo: tiempo de convergencia vs. ϵ para $\gamma = 0,10$.

acoplamiento.

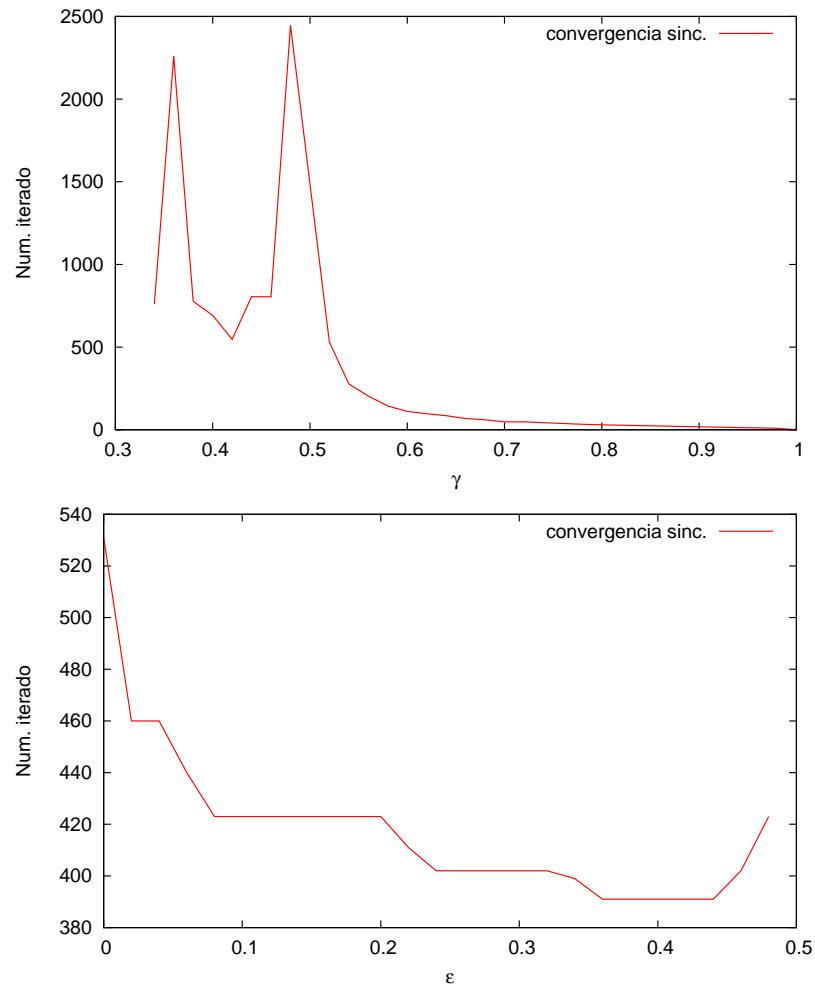


Figura 4.9: Tiempo de convergencia hacia la sincronización en una red regular con ($k = 2$, 1 dimensión) con $\tau = 0$. Arriba: tiempo de convergencia vs. γ para $\epsilon = 0,00$. Abajo: tiempo de convergencia vs. ϵ para $\gamma = 0,52$.

Capítulo 5

Complejidad en Series Temporales: Una Aplicación

La observación de comportamientos colectivos ordenados, que surgen en una gran variedad de sistemas, indican que sus comportamientos son, en general, no triviales y que además presentan características universales que no pueden derivarse del conocimiento de las propiedades de los elementos constituyentes. Por ejemplo, la riqueza dinámica de un cerebro no se puede predecir por mera extrapolación del comportamiento de sus neuronas. Es en este sentido que se hace necesario utilizar herramientas que permitan estudiar estos sistemas desde un punto de vista no reduccionista.

Diversas definiciones operativas de complejidad han sido propuestas para cuantificar el grado de complejidad de un sistema [18, 19, 20, 8, 21], dependiendo de los aspectos colectivos o funcionales que se intentan caracterizar. En los últimos años, López-Ruiz, Mancini y Calbet (LMC) [7] propusieron una medida de complejidad estadística que refleja la complejidad estructural de un sistema y que resulta sencilla de calcular en

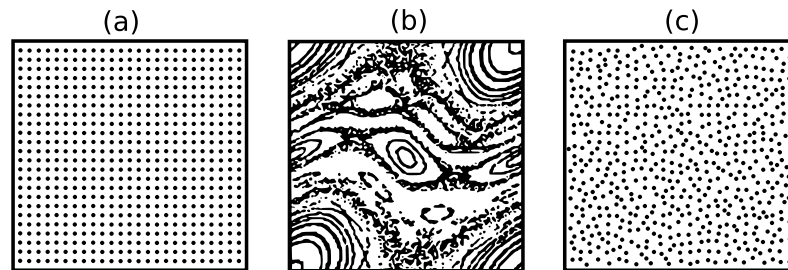


Figura 5.1: Diferentes estructuras. (a): un cristal, (b): una estructura compleja, (c): un gas.

la mayoría de los casos. La noción de complejidad LMC ofrece un novedoso punto de vista basado en la descripción estadística de los sistemas a una escala dada. En este esquema, el conocimiento de las leyes físicas que gobiernan la evolución dinámica en la escala específica debe ser usado para encontrar los estados accesibles de un sistema y su distribución de probabilidad. Este proceso indicaría el valor de la complejidad.

En esencia, la *complejidad LMC* es una interpolación entre la información almacenada por el sistema y la *distancia* a la equipartición (medida de una jerarquía probabilística entre las partes observadas) de la distribución de probabilidad de sus estados accesibles; además, su principal cualidad consiste en ser un concepto intuitivo de complejidad, el cual ha demostrado ser satisfactorio para discernir estructuras reconocidas como complejas. Por ejemplo, a un cristal y a un gas le asociamos una complejidad menor que a una estructura con un grado de desorden intermedio (una estructura compleja) [figura (5.1)], de la misma forma, la complejidad LMC asigna valores de complejidad a estas estructuras ajustándose a nuestras definiciones.

En un sistema, a cierta escala de observación o nivel de descripción, se observan N estados accesibles $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ y una distribución de probabilidad correspondiente $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$. Shannon y Weaver [22] demostraron, bajo las más elementales normas

de consistencia, que la única función que da cuenta de la información almacenada en tal sistema es

$$H = -k \sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad (5.1)$$

donde k es una constante. Es sencillo determinar que la información H contenida en un cristal ordenado es $H_{cristal} \approx 0$, mientras que un gas aislado térmicamente tiene una distribución equiprobable, $p_i = 1/N$, y entonces $H_{gas} \approx -k \log N$; lo cual representa la máxima información posible para un sistema de N estados. Cualquier otro sistema tendrá una cantidad de información intermedia entre estos extremos de orden y desorden.

López-Ruiz, Mancini y Calbet [7] introdujeron el concepto de desequilibrio de un sistema como una medida de la distancia de su distribución de probabilidad a la distribución equiprobable, definida como

$$D = \sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N} \right)^2. \quad (5.2)$$

Esta función de desequilibrio D es máxima para un cristal perfecto y se anula para un gas ideal. Se ha demostrado que en sistemas aislados, fuera del equilibrio, la función D decrece con el tiempo [23].

La complejidad de un sistema resulta de la competencia entre estas dos cantidades. López-Ruiz, Mancini y Calbet definen la complejidad estadística C de un sistema como el producto de la cantidad de información almacenada en el sistema y su desequilibrio [7],

$$C = H \cdot D = -k \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \times \sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N} \right)^2. \quad (5.3)$$

Esta definición concuerda con las propiedades que, de manera intuitiva, debería poseer la caracterización de la complejidad de un sistema; ya que $C \rightarrow 0$ para sistemas

ubicados en los extremos de orden o de desorden (cristal perfecto o gas ideal), mientras que cualquier otro sistema con comportamiento intermedio tendrá $C > 0$. Esta medida de complejidad se ha calculado analíticamente para varios modelos de sistemas físicos, tanto con distribuciones de probabilidad continuas como discretas [24].

Nótese que el valor de la complejidad LMC de un sistema depende de la escala de observación, la cual determina el número de estados accesibles del sistema. Por ejemplo, una célula observada desde una distancia muy grande puede describirse como un punto, el cual posee complejidad cero; sin embargo, a una distancia adecuada, se pueden apreciar estructuras internas que producen comportamientos colectivos emergentes, por lo tanto, la complejidad asociada a este sistema tendrá un valor mayor que cero.

Adicionalmente, debe tenerse en cuenta que los valores de la complejidad LMC están definidos con un factor de escala dado por la constante k . Por lo tanto, lo que tiene relevancia para caracterizar un sistema son los valores relativos de la complejidad [25].

5.1. Procesamiento de Series Temporales

Una serie de tiempo está dada por un conjunto de observaciones ordenadas cronológicamente, que representan los cambios de una variable. Dicha variable puede ser el resultado de un gran número de procesos que se llevan a cabo dentro de un sistema. Ejemplos de este tipo de variables los encontramos en economía, física, química, biología, medicina, etc.

Podemos clasificar las variables de dos maneras, activas y pasivas. Las *variables activas* son aquellas que forzan al sistema a cambiar su estado y por tanto juegan un rol

importante en el desempeño del sistema bajo estudio, este tipo de variable se conoce también con el nombre de *parámetro*. Las *variables pasivas* son aquellas que dependen de otras variables o parámetros, por lo que su cambio es el resultado de algún otro proceso dentro del sistema. Los mapas iterativos son un ejemplo de ambas variables. Una variable pasiva se hace iterar bajo el dominio de una variable activa o parámetro; un cambio en el valor del parámetro puede derivar en un cambio en el comportamiento de la variable pasiva.

A continuación se presenta un método para calcular los niveles de complejidad en un sistema con ambos tipos de variables. Para poder realizar la medida de complejidad LMC en una serie de tiempo, es necesario:

1. Definir la escala de observación o *resolución* N del sistema.
2. Conocer la distribución de probabilidad del sistema para dicha escala de observación.
3. Calcular la complejidad por medio de la ecuación (5.3).

Este esquema dará como resultado el valor de la complejidad para toda la serie de tiempo, lo que es interesante en casos donde se tiene una gran cantidad de series de tiempo con diferentes valores de parámetros. Tal es el caso de los diagramas de bifurcación [figura (2.4)], en el que existe una serie de tiempo por cada valor de parámetro.

Si se desea conocer la evolución de los niveles de complejidad a lo largo del registro, podemos realizar el mismo proceso en fracciones sucesivas del registro, lo que añade un nuevo parámetro: el tamaño de la ventana de tiempo V donde se realizará el cálculo. El conocimiento de las leyes físicas que rigen el sistema bajo estudio nos ayuda a estimar

los parámetros necesarios para realizar el cálculo de la complejidad. Sin embargo, en algunos sistemas, es posible que tengamos que realizar estudios adicionales para escoger apropiadamente estos parámetros:

1. *Resolución N* . Se refiere a la cantidad de estados que pueden ser observados en la totalidad de la serie de tiempo. Si $N = 1$, el sistema se está observando a una distancia muy grande, en la que no se nota detalle alguno, por el contrario si $N \rightarrow \infty$ no se logrará observar la dinámica del sistema y la susceptibilidad al ruido será muy alta. En nuestro caso, un gráfico de la complejidad en función de N bastará para definir un valor.
2. *Tamaño de la ventana V* . El tamaño de la ventana corresponde al intervalo de tiempo utilizado para realizar una medida de complejidad. Este intervalo debe ser lo suficientemente grande para incluir la dinámica del sistema.

5.2. Señales Electroencefalográficas

El cerebro humano está compuesto por más de 10^{10} neuronas, cada una recibe impulsos eléctricos (conocidos como potenciales de acción) de otras neuronas por medio de sinapsis y envía señales de salida a otro número de éstas [26]. Cuando una red de neuronas se encuentra activa, ésta produce una diferencia de potencial que puede ser capturada por un electroencefalograma (EEG). Las señales EEG representan el registro de la actividad neurológica como una función del tiempo. La estructura del EEG representa la actividad entre grandes grupos de neuronas, lo que convierte al EEG en una variable pasiva que contiene información de una gran cantidad de elementos básicos (neuronas). Muchos investigadores han utilizado métodos de dinámica no lineal en aplicaciones médicas debido a que permite explicar algunos mecanismos no evidentes

de la función cerebral [27].

La *epilepsia* es un desorden cerebral caracterizado clínicamente por perturbaciones de la función cerebral que a pesar de ser de corto tiempo, son recurrentes. Estos episodios de perturbación son conocidos como *crisis epilépticas* y pueden estar asociados con pérdida de la conciencia o un comportamiento anormal.

El registro de las señales EEG se realizó en 19 canales a partir de electrodos adheridos a la superficie de la cabeza del paciente con pasta conductora, en los sitios establecidos por el sistema internacional 10-20, midiéndose la diferencia de potencial respecto a una referencia constituida por ambas orejas cortocircuitadas. Se digitalizó la señal a una frecuencia de muestreo de 256 Hz y conversión A/D de 12 bits, filtrada digitalmente entre 0,5 y 30 Hz. Para el análisis, se seleccionaron registros de tiempo variable de actividad en reposo de un sujeto sano y un paciente epiléptico cuyo registro incluye algunos instantes antes y durante una crisis convulsiva.

Nuestro primer estudio se realizó utilizando el mapa logístico,

$$x_{t+1} = r(1 - x_t), \quad (5.4)$$

ecuación que se aplica principalmente a problemas de crecimiento poblacional de especies animales o semejante índole. Siguiendo el esquema descrito anteriormente, escogimos la resolución N . Para ello hemos graficado [figura (5.2)] el valor de la complejidad C vs N .

En este gráfico observamos como varía el valor de la complejidad a medida que N aumenta. Para un $N \rightarrow 1$, la complejidad es casi nula. La complejidad se incrementa a medida que N se hace mas grande, lo que quiere decir que la escala de observación es muy pequeña. Sin embargo, para $N > 200$ la complejidad disminuye su nivel de

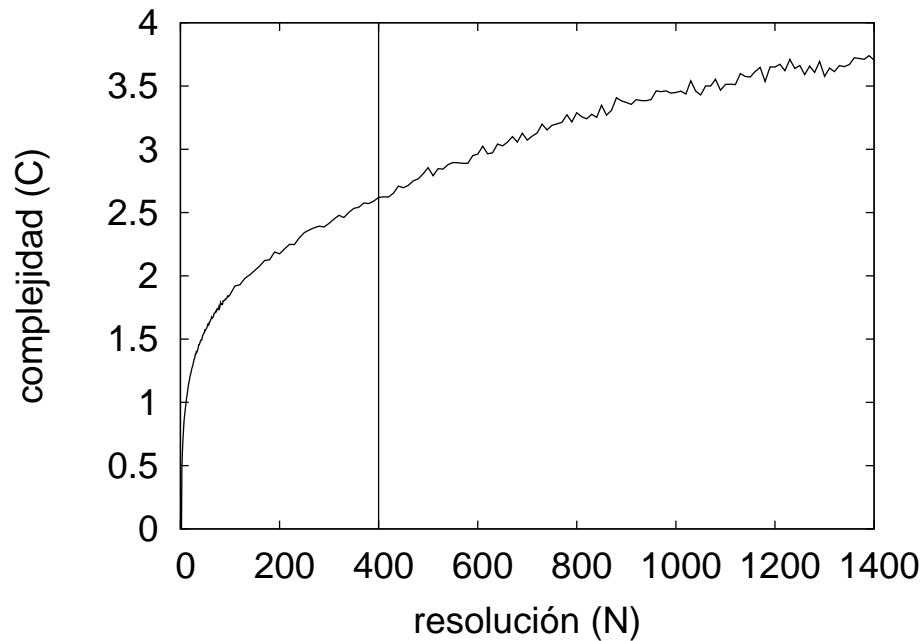


Figura 5.2: Variación de los niveles de complejidad con respecto a la cantidad de estados para una órbita caótica del mapa logístico.

variación y comienza a tener un crecimiento más regular. Esto nos indica que hemos alcanzado un valor de N capaz de resolver cerca del total del estados accesibles del sistema, por lo que el cálculo de la complejidad en este rango de parámetros será satisfactorio.

Nuestro criterio básico para elegir N consiste en verificar que la variación de la complejidad entre N y $N + \Delta N$ no sea muy grande. En este caso hemos escogido $N = 400$. Una vez seleccionado el nivel de descripción N , se obtiene la distribución de probabilidad y se calcula el valor de la complejidad a través de la ecuación (5.3).

En la parte superior de la figura (5.3), se muestra una región del diagrama de bifurcación del mapa logístico donde ocurre la transición caos \rightarrow período tres \rightarrow caos. Esta transición constituye uno de los ejemplos más conocidos en la teoría del caos. En

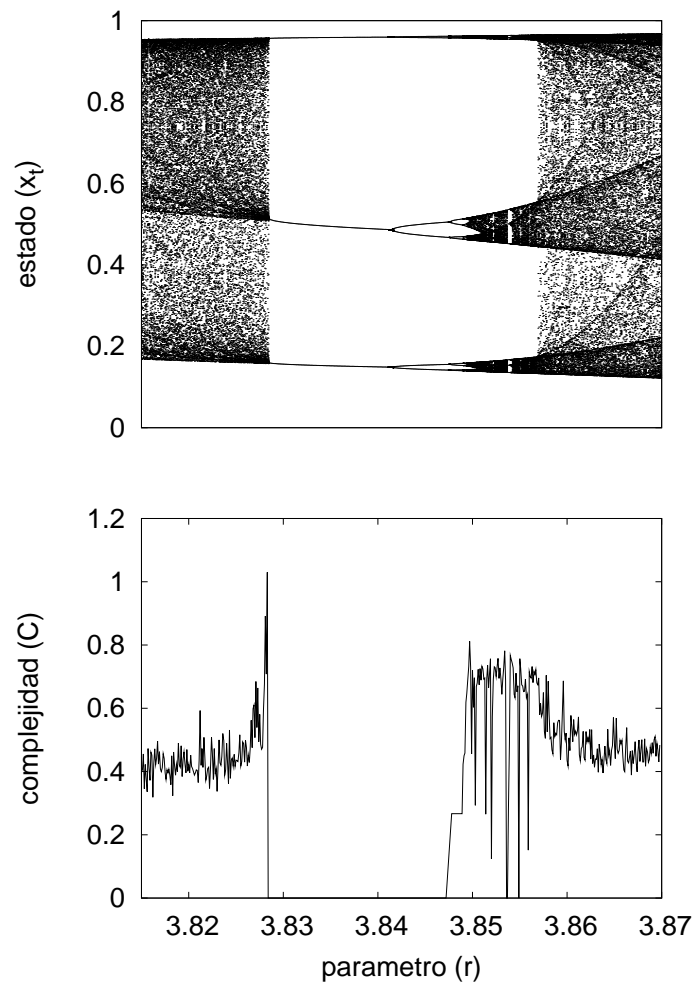


Figura 5.3: Arriba: Detalle del diagrama de bifurcación mostrado en la figura (2.4). Abajo: se muestran los niveles de complejidad para las diferentes regiones de la figura superior.

la figura se observa como los niveles de complejidad deben ser mayores que cero en la región caótica. En la parte inferior de la figura (5.3) se muestra la variación de los niveles de complejidad para cada valor de parámetro y se observa que la complejidad aumenta a medida que se incrementa la cantidad de períodos en el sistema, hasta que el sistema se vuelve caótico.

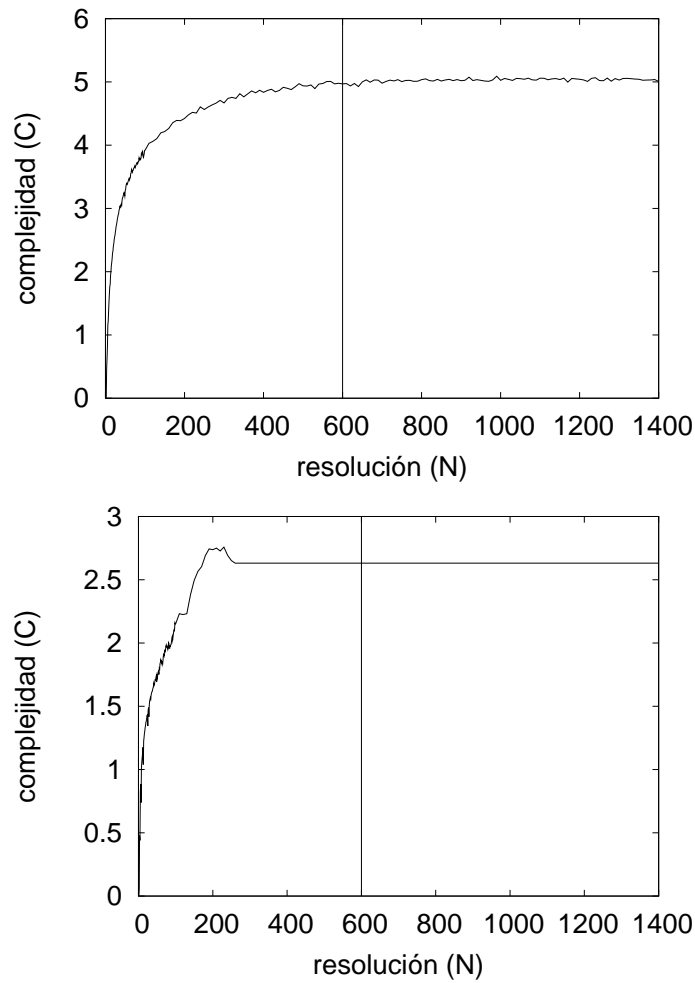


Figura 5.4: Complejidad con respecto a la resolución N , correspondiente a un sujeto sano (arriba) y a un paciente epiléptico (abajo).

5.3. Aplicación a Señales EEG

Los registros EEG han sido analizados siguiendo el esquema de ventanas de tiempo, de este modo los análisis se realizaron en un solo canal y no en el conjunto de canales del registro EEG. Los canales fueron elegidos con la ayuda de un médico especialista que determinó cuales canales poseen menor cantidad de ruido y por tanto cuales son susceptibles al estudio. Como se realizó anteriormente, es imprescindible escoger un valor apropiado para N . La variación de la complejidad con respecto a la resolución N se

muestra en la figura (5.4).

Procediendo de la misma manera que en el mapa logístico, se ha seleccionado como escala de observación $N = 600$. En el caso de los EEG, se desea conocer los diferentes niveles de complejidad en los diferentes estados del electroencefalograma, esto es, la variación de la *complejidad en el tiempo*. Para ello, debemos establecer un tamaño de ventana de tiempo V o fracción del registro, en el cual realizaremos el cálculo de la complejidad. Para determinar el tamaño adecuado, mostramos a continuación la variación de la complejidad media con respecto al tamaño de la ventana [figura (5.5)]. En esta figura se observa un comportamiento similar al presentado en las figuras (5.2) y (5.4), nuestro criterio de selección será por tanto similar al usado en ellas. Nótese que al elegir un tamaño de ventana, para el caso de registros EEG, debe considerarse la no estacionariedad de la señal, sólo algunos segundos pueden ser considerados como estacionarios [28]. Considerando el valor de la complejidad y el análisis de un médico especialista, el tamaño de la ventana se fijó en 1600, lo que equivale a unos 6,25 segundos de registro.

Finalmente, utilizando los parámetros N y V , calculamos la evolución de la complejidad la señal EEG de un sujeto sano y de un paciente epiléptico que experimenta una crisis convulsiva [figuras (5.6) y (5.7)].

En la figura (5.6) se muestra el canal T4-Ref del EEG de un sujeto sano y en la figura (5.7) se muestra el canal C4-Ref del EEG de un paciente epiléptico antes y durante la crisis convulsiva.

Es de hacer notar, que el análisis hecho para escoger el valor de la resolución N en cada sistema, i.e., mapa logístico y señales EEG, ofrece un rango de valores bastante

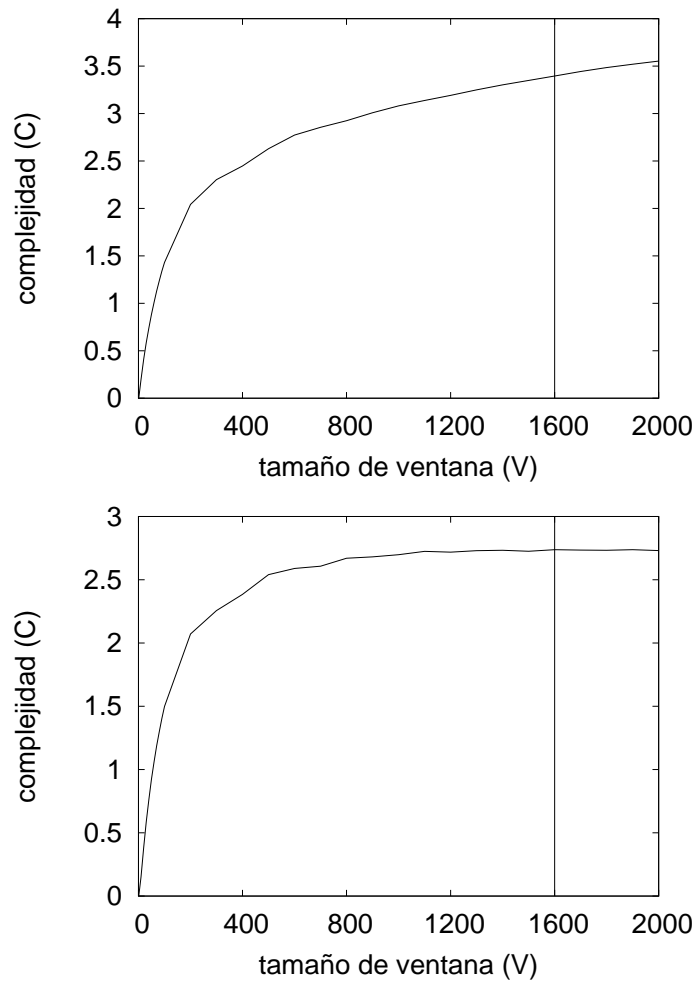


Figura 5.5: Complejidad con respecto al tamaño de ventana V , correspondiente a un sujeto sano (arriba) y a un paciente epiléptico (abajo).

amplio en el que se puede realizar la medida de la complejidad. Por otro lado, el estudio sobre el tamaño de la ventana de tiempo V realizado para el análisis de los registros EEG, muestra para ambos casos (sujeto normal y paciente epiléptico) un comportamiento similar al estudio de la resolución. Sin embargo, en este caso, es necesario tomar en cuenta que el tamaño de la ventana debe ser de por lo menos algunos cientos de datos o lo que equivale a algunos segundos, para evitar la no estacionariedad de la señal. Este tipo de análisis es más restrictivo que el caso de la cantidad de estados, ya que el valor

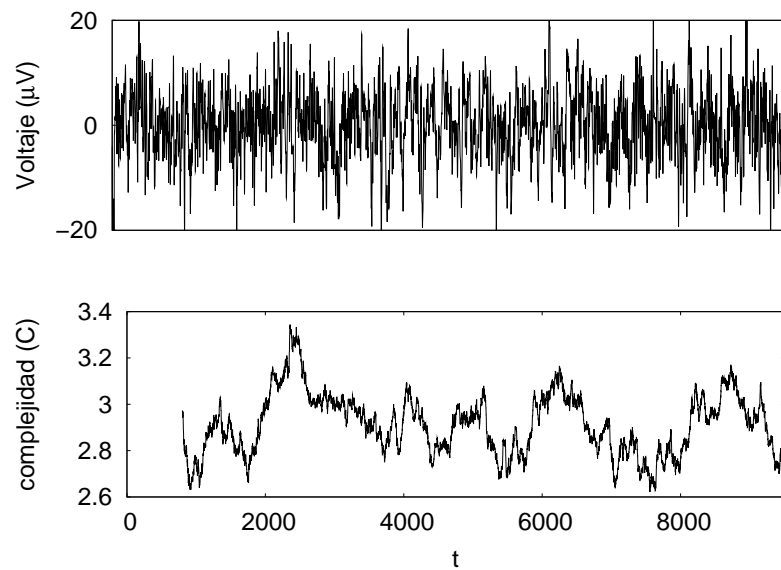


Figura 5.6: Señal EEG de un sujeto sano y complejidad con respecto al tiempo.

está acotado por el lado inferior por la estabilización del valor de la complejidad y por la parte superior por la estacionariedad de la señal.

La medida de la complejidad realizada en las series de tiempo del mapa logístico, y mostradas para diferentes valores de parámetro r [figura (5.3)], muestra la sensibilidad de este tipo de medida de complejidad. Para los diferentes valores de parámetro, el valor de la complejidad refleja el nivel de caoticidad del sistema. En la región caótica justo antes de iniciar el ciclo periódico, se observa que el valor de la complejidad es alto, una vez que el sistema entra en un ciclo periódico, el nivel de la complejidad se hace cero y luego, comienza a aumentar a medida que el sistema tiende al caos nuevamente.

En el caso de los registros EEG, podemos observar que los niveles de complejidad calculados para el sujeto sano son mayores que aquellos del paciente epiléptico, sugiriendo que la patología epiléptica es un estado de baja complejidad. Sin embargo, en

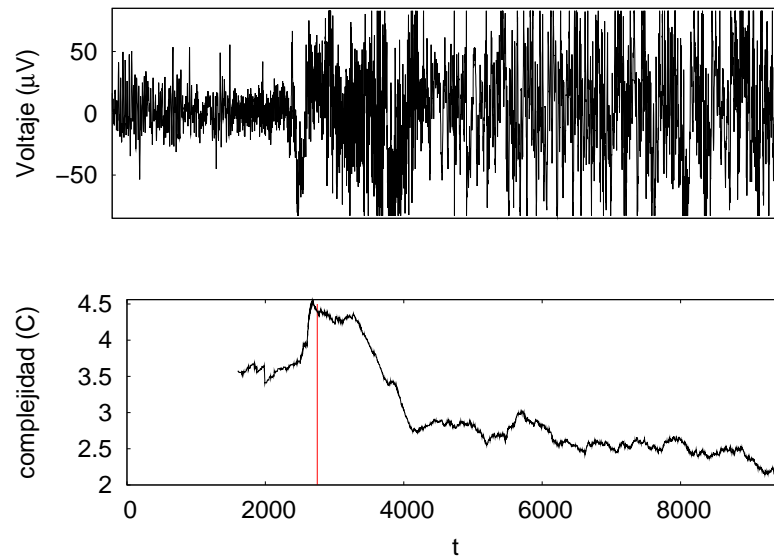


Figura 5.7: Señal EEG de un paciente epiléptico, antes y durante la crisis epiléptica cuyo inicio se indica por la línea vertical.

el caso del paciente epiléptico, encontramos un incremento en el nivel complejidad en el momento del inicio de la crisis. Esto puede ser explicado por el aumento inesperado de la actividad eléctrica cerebral. A medida que la ventana de tiempo se desplaza por el registro realizando el cálculo de la complejidad, en el momento en que los primeros puntos de la crisis epiléptica se consideran para el cálculo, el sistema se hace muy impredecible y por tanto complejo, ya que la mayoría de los datos se encuentran en la zona sin epilepsia. A medida que más datos de la crisis son incorporados en el cálculo, el valor de complejidad disminuye.

Una vez iniciado el episodio convulsivo, un decremento del nivel de complejidad es registrado, sugiriendo un estado menos caótico o más predecible instantes después del inicio de la crisis.

There are more things in heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy.

W. Shakespeare

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis hemos investigado un modelo de sistema dinámico espacio temporal del tipo red de mapas acoplados, en el cual hemos incluido simultáneamente un número de ingredientes que hasta el presente habían sido considerados parcialmente por otros investigadores. Específicamente, hemos estudiado una red de mapas acoplados con distintas topologías de conectividad, con retardos en el acoplamiento entre los elementos y con forzamiento externo.

En primer lugar, hemos encontrado que la inclusión de retardo en los acoplamientos facilita la sincronización en una red de elementos dinámicos. Diferentes valores de retardo tienen asociadas diferentes zonas de sincronización en el espacio de parámetros.

El forzamiento externo también induce sincronización en la red de mapas acoplados. Esta sincronización puede ser total, cuando el estado sincronizado de los elementos es igual al estado del forzamiento, o puede ser generalizada, cuando los mapas se sincronizan entre sí pero no con el forzador. Este estado sincronizado lo hemos caracterizado

en el espacio de parámetros del sistema, constituido por la intensidad de acoplamiento entre los elementos (ϵ) y la magnitud del acoplamiento de los elementos con el forzador (γ), encontrando que la sincronización total ocurre para valores de γ mayores a 0,5.

Nuestros resultados también muestran que la topología de la conectividad juega un papel importante en la emergencia de la sincronización. Específicamente, hemos encontrado que las redes aleatorias poseen, en el espacio de parámetros del sistema, una región de sincronización mayor que las redes regulares.

El tiempo de convergencia hacia el estado sincronizado en una red aleatoria decae cuando se incrementa cualquiera de los parámetros de acoplamiento, ϵ ó γ ; mientras que en una red regular, el tiempo de convergencia hacia la sincronización varía en distintas regiones de parámetros.

Finalmente, hemos implementado un algoritmo para calcular la complejidad de series de tiempo de sistemas dinámicos, basados en la definición de complejidad de López-Ruiz *et al* [7]. Como una importante aplicación, hemos calculado la complejidad en función del tiempo para señales electroencefalográficas de un sujeto sano y de un paciente que experimenta una crisis epiléptica. Los resultados del análisis de las señales EEG sugieren que la epilepsia es un estado patológico de menor complejidad en relación con el estado sano del cerebro.

El método presentado para calcular la complejidad en series de tiempo, ha demostrado ser una herramienta útil y de fácil implementación, pues no requiere de altos recursos computacionales. Tanto las series temporales producidas por un modelo matemático como aquellas producidas por un sistema biológico –y que por tanto está expuesta al ruido y otros tipos de artefactos– son susceptibles a ser analizadas con la técnica presentada. Por otro lado, el conocimiento de las leyes físicas que rigen la dinámica del sistema son importantes para definir los límites de los parámetros necesarios para realizar el cálculo de la complejidad.

Los resultados de esta tesis muestran la importancia de la interdisciplinariedad en el estudio actual de sistemas complejos.

Bibliografía

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, p. 821, 1990.
- [3] B. B. Zhou and R. Roy, “Isochronal synchrony and bidirectional communication with delay-coupled nonlinear oscillators,” *Physical Review E*, vol. 75, no. 2, p. 026205, 2007.
- [4] F. M. Atay and J. Jost, “Delays, connection topology, and synchronization of coupled chaotic maps,” *Physical Review Letters*, vol. 92, no. 14, p. 144101, 2004.
- [5] C. Masoller and A. C. Martí, “Random delays and the synchronization of chaotic maps,” *Physical Review Letters*, vol. 94, no. 13, p. 134102, 2005.
- [6] M. Pineda and M. G. Cosenza, “Synchronization in driven versus autonomous coupled chaotic maps,” *Physical Review E*, vol. 71, no. 5, p. 057201, 2005.
- [7] R. López-Ruiz, H. L. Mancini, and X. Calbet, “A statistical measure of complexity,” *Phys. Lett. A*, 209, 321, 1995.
- [8] C. Bennett, “In emerging syntheses in science, ed. d. pines,” *Adisson-Wesley, MA*, 1988.

- [9] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, “Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, pp. 65–68, Jul 1993.
- [10] K. Kaneko, “Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 72, no. 3, p. 480, 1984.
- [11] I. Waller and R. Kapral, “Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators,” *Physical Review A*, vol. 30, no. 4, p. 2047, 1984.
- [12] S. Tokuzo and K. Kengo, “Periodicity manifestations in the turbulent regime of the globally coupled map lattices,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 3489–3503, Sep 2000.
- [13] S. Milgram, “The small world problem,” *Psychol. Today* 2, pp. 60–67, 1967.
- [14] S. H. Strogatz, “Exploring complex networks,” *Nature*, vol. 410, no. 6825, p. 268, 2001.
- [15] A. Parravano, “Looking at map networks with time delay interactions from a local perspective,” *Physica A Statistical and Theoretical Physics*, vol. 371, no. 2, p. 767, 2006.
- [16] C. Hemming and R. Kapral, “Phase front dynamics in inhomogeneously forced oscillatory systems,” *Physica A*, vol. 306, p. 199, 2002.
- [17] P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney, “Crossover of the behavior of surface waves in a vibrated granular material,” *Physica A*, vol. 342, no. 3-4, p. 479, 2004.
- [18] A. Kolmogorov, “Three approaches to the quantitative definition of information,” *Probl. Inform. Theory* 1, 3, 1965.

- [19] G. J. Chaitin, “Information, randomness and incompleteness,” *Singapur, World Scientific*, 1990.
- [20] A. Lempel and J. Ziv, “On the complexity of finite sequences,” *IEEE Trans. Inform. Theory* 22, 1976.
- [21] P. Grassberger *Int. J. Theor. Phys.* 25, 907, 1986.
- [22] C. E. Shannon and W. Weaver, “The mathematical theory of communication,” *University of Illinois Press, IL*, 1949.
- [23] M. Perakh, “Defining complexity,” *On Talk Reason*, www.talkreason.org/articles/complexity.pdf, 2004.
- [24] X. Calbet and R. López-Ruiz, “Tendency towards maximum complexity in an isolated non-equilibrium system,” *Phys. Rev., E* 63, p. 66116, 2001.
- [25] M. Escalona-Morán, L. Molina, and M. Cosenza, “Complejidad estadística en series temporales: Aplicación a señales eeg,” *A ser publicado en la Revista Científica UNET*, 2008.
- [26] C. Shatz *Brain Sci* 214, 652-653, 1981.
- [27] A. Babloyantz and A. Destexhe, “Low dimension chaos in an instance of epilepsy,” *Proc Natl Acad Sci USA* 83, 3513, 1986.
- [28] W. Jia, “An epileptic seizure prediction algorithm based on second-order complexity measure,” *Physiol Meas* 26, 609, 2005.
- [29] O. Álvarez, “Estudio de la dinámica local y del surgimiento de organización temporal colectiva en sistemas de mapas singulares caóticos,” *Tesis de Licenciatura. Universidad de Los Andes. Mérida - Venezuela.*, pp. 35–38, 1997.

Apéndice A

Condición de estabilidad para un caso especial.

La solución sincronizada en una RMA es aquella para la cual se cumple que $x_t^i = x_t^j = x_t \forall i, j$. En este caso, el segundo término de la ecuación (3.1) se convierte en:

$$\frac{\epsilon}{n^i} \sum_{j=1}^N C^{ij} f(x_{t-\tau}^j) = \epsilon f(x_{t-\tau}), \quad (\text{A.1})$$

y la ecuación (3.1) se reescribe como

$$x_{t+1} = (1 - \epsilon - \gamma)f(x_t) + \epsilon f(x_{t-\tau}) + \gamma f(y_t) \quad (\text{A.2})$$

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

$$f(x) = 4x(1 - x).$$

Cuando hay acoplamiento retardado entre vecinos ($\tau > 0$ y $\epsilon > 0$), existe un término que desvía continuamente la órbita de la dinámica local de la red y no está presente en el sistema forzador. Por lo tanto, no puede existir sincronización total en esta circunstancia. Sin embargo, para el caso especial sin acoplamiento a los vecinos ($\epsilon = 0$) y/o sin retardo ($\tau = 0$) la solución sincronizada se reduce a:

$$x_{t+1} = (1 - \gamma)f(x_t) + \gamma f(y_t) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= f(y_t) \\ f(x) &= 4x(1-x), \end{aligned}$$

lo cual corresponde a la dinámica de dos mapas acoplados unidireccionalmente. En este caso, podrían ocurrir dos situaciones:

- Sincronización total: $x_t = y_t$ ó
- Sincronización generalizada: $x_t \neq y_t$.

El rango de valores γ para los cuales ocurre ésto puede obtenerse calculando la estabilidad de la sincronización total. Previo a esto, debemos buscar una base donde el sistema esté desacoplado [29].

La ecuación (A.3) adquiere la siguiente forma vectorial

$$\vec{z}_{t+1} = (1 - \gamma)\vec{f}(z_t) + \gamma M\vec{f}(z_t), \quad (\text{A.4})$$

lo cual expresa

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = (1 - \gamma) \begin{bmatrix} f(x_t) \\ f(y_t) \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_t) \\ f(y_t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La matriz M puede diagonalizarse a través de la siguiente operación:

$$D = P^{-1}MP \quad (\text{A.6})$$

donde los elementos de la matriz diagonal D son los autovalores μ_i de M

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

y P es la matriz que posee en sus columnas los autovectores de M:

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \text{con } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \quad (\text{A.8})$$

Multiplicando por P^{-1} a la izquierda de la ecuación (A.4) y por la matriz identidad $I = PP^{-1}$ al lado derecho de M se obtiene:

$$\begin{aligned} P^{-1}\vec{z}_{t+1} &= (1 - \gamma)P^{-1}\vec{f}(x_t) + \gamma \underbrace{P^{-1}MP}_{D} P^{-1}\vec{f}(z_t) \\ \vec{z}_{t+1} &= (1 - \gamma)\vec{f}(z_t) + \gamma D\vec{f}(z_t) \end{aligned}$$

ó, equivalentemente

$$z_{t+1}^i = (1 - \gamma)f(z_t^i) + \gamma\mu^i f(z_t^i) \quad (\text{A.9})$$

donde $z_t^1 = x_t$ y $z_t^2 = y_t$.

En el estado sincronizado, $z_t^1 = z_t^2 = z_t$ y la ecuación (A.9) se escribe

$$z_{t+1} = (1 - \gamma - \mu_i\gamma)f(z_t) \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado, la condición de estabilidad (sección 2.5 del capítulo 2) sobre la ecuación (A.10) en una órbita de tamaño m implica

$$\begin{aligned} \left| \prod_{t=1}^m (1 - \gamma - \mu_i\gamma)f'(z_t) \right| &< 1 \\ (1 - \gamma - \mu_i\gamma)^m \left| \prod_{t=1}^m f'(z_t) \right| &< 1 \\ (1 - \gamma - \mu_i\gamma) \left| \prod_{t=1}^m f'(z_t) \right|^{1/m} &< 1 \end{aligned}$$

en el límite $\lim t \rightarrow \infty$ esto puede reescribirse en términos del exponente de Lyapunov (λ) (sección 2.5 del capítulo 2) del mapa utilizado:

$$(1 - \gamma - \mu_i\gamma)e^\lambda < 1 \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, utilizando el autovalor $\mu_1 = 0$, la condición de estabilidad para el caso considerado es

$$\gamma > 1 - e^{-\lambda} \quad (\text{A.12})$$